REGENSBURGER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN 23

Bewertungsspektrum und rigide Geometrie

Roland Huber

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT
REGENSBURG

REGENSBURGER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN 23

Bewertungsspektrum und rigide Geometrie

Roland Huber

Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg

REGENSBURGER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN 23

Bestellungen sind an die

Naturwissenschaftliche Fakultät I - Mathematik
Universität, Postfach 397
8400 Regensburg, BRD

zu richten.

Preis (ohne Gewähr) 15,– DM

Anschrift des Autors:

Roland Huber
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

AMS Subject Classification: 13 A 18, 13 J 20

Eingang des Manuskripts: 22.09.1992

Bd. 23 ausgegeben: Juli 1993

ISSN 0179 - 9746 ISBN 3 - 88246 - 174 - 8

INHALTSVERZEICHNIS

0. Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen Bewertungsspektrum und rigider Geometrie. Insbesondere wollen wir die Sichtweise darstellen, die das Bewertungsspektrum für die rigide Geometrie liefert.

Für die gesamte Einleitung fixieren wir einen vollständigen Rang 1 bewerteten Körper k. In der rigiden Geometrie ordnet man gewissen k-Banachalgebren, den sogenannten k-affinoiden Algebren, geometrische Objekte zu, die man k-affinoide Varietäten nennt. Der zugrundeliegende Raum einer k-affinoiden Varietät $\operatorname{Sp} A$ zu einer k-affinoiden Algebra A ist die Menge $\operatorname{Max} A$ der maximalen Ideale von A, versehen mit einer Grothendiecktopologie. Räume, die durch Verkleben k-affinoider Varietäten entstehen, bezeichnet man als k-analytische Varietäten.

Zwei wesentliche Gesichtspunkte dieser Arbeit sind:

(1) Wir definieren eine gewisse Klasse topologischer Ringe, die wir als f-adische Ringe bezeichnen, und konstruieren zu jedem f-adischen Ring, der einer gewissen Noetherizitätsbedingung genügt, einen lokal geringten Raum $\operatorname{Spa} A$. Diese „noetherschen" f-adischen Ringe umfassen zum Beispiel die strikt noetherschen k-Banachalgebren (insbesondere die k-affinoiden Algebren) und die noetherschen adischen Ringe. (Wir betrachten hier ausschließlich kommutative Ringe.) Lokal geringte Räume, die lokal isomorph zu Räumen der Form $\operatorname{Spa} A$ sind, nennen wir analytische oder adische Räume.

(2) Indem wir einer k-affinoiden Varietät $\operatorname{Sp} A$ den analytischen Raum $\operatorname{Spa} A$ zuordnen, erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der k-affinoiden Varietäten in die Kategorie der analytischen Räume. Dieser Funktor setzt sich kanonisch fort zu einem volltreuen Funktor r von der Kategorie aller k-analytischen Varietäten in die Kategorie der analytischen Räume über k. Der Übergang von einer k-analytischen Varietät X zu dem analytischen Raum $r(X)$ ist ungefähr zu vergleichen mit dem Übergang von einer algebraischen Varietät zu dem zugehörigen Schema in der algebraischen Geometrie oder mit dem Übergang von einem semialgebraischen Raum zu dem zugehörigen reell abgeschlossenen Raum in der semialgebraischen Geometrie ([S1]). Der Vorteil des Übergangs von X zu $r(X)$ besteht darin, daß sich dadurch die rigide Geometrie zum Teil besser verstehen läßt und sich manche Probleme einfacher lösen lassen.

Wir wollen etwas näher auf die eben genannten Punkte (1) und (2) eingehen. Jede k-affinoide Algebra hat eine beschränkte additiv abgeschlossene Nullumgebung, eine beschränkte multiplikativ abgeschlossene Nullumgebung und eine topologisch nilpotente Einheit. Topologische Ringe, die diese Eigenschaften besitzen, nennen wir Tate-Ringe. Man kann sich leicht überlegen, daß die Tate-Ringe genau die topologischen Ringe der folgenden Bauart sind: Seien A ein Ring und s ein Nichtnullteiler von A. Die Lokalisation A_s versehen wir mit der Gruppentopologie, so daß $\{s^n A \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Dann ist A_s ein topologischer Ring. Da A eine additiv und multiplikativ abgeschlossene und beschränkte Nullumgebung und s eine topologisch nilpotente Einheit ist, ist A_s ein Tate-Ring.

Wir wollen zu einem Tate-Ring A einen analytischen Raum konstruieren. Die Menge der maximalen Ideale von A als zugrundeliegende Menge zu nehmen, ist aus vielerlei Gründen nicht sinnvoll. (Zum Beispiel zeigen schon die einfachsten Beispiele von Ringhomomorphismen zwischen vollständigen Tate-Ringen, daß das Urbild eines maximalen Ideals im allgemeinen kein maximales Ideal ist.) Stattdessen arbeiten wir mit Bewertungen von A. Wir benutzen hier die klassische Definition einer Bewertung eines Ringes aus [B], VI.3.1. Ist $v: A \to \Gamma_\infty$ eine Bewertung von A mit Wertegruppe Γ (wir schreiben in dieser Arbeit alle Bewertungen additiv), so heißt v stetig, wenn die Abbildung v stetig bezüglich der Ringtopologie auf A und der Anordnungstopologie auf Γ_∞ ist. Wir setzen

$$(*) \qquad \mathrm{Cont}\,(A) := \{v \mid v \quad \text{stetige Bewertung von} \quad A\}.$$

(Genauer definieren wir Cont$\,(A)$ als die Menge der Äquivalenzklassen der stetigen Bewertungen von A, wobei die Äquivalenz von Bewertungen von A entsprechend wie im Körperfall definiert ist.) Cont$\,(A)$ versehen wir mit der Topologie, die von den Mengen $\{v \in \mathrm{Cont}\,(A) \mid v(a) \geq v(b) \neq \infty\}(a, b \in A)$ erzeugt wird. Ein entscheidender Punkt für die gesamte Arbeit ist das Ergebnis, daß Cont$\,(A)$ ein spektraler Raum ist (d.h. homöomorph zum Zariski-Spektrum eines Ringes). Bei spektralen Räumen spielen die konstruierbaren Teilmengen ([EGA*], 0.2.3) eine wichtige Rolle. Die die Topologie definierenden Mengen $\{v \in \mathrm{Cont}\,(A) \mid v(a) \geq v(b) \neq \infty\}$ sind im allgemeinen nicht konstruierbar. Um die konstruierbaren Teilmengen von Cont$\,(A)$ beschreiben zu können, treffen wir eine aus der rigiden Geometrie wohlbekannte Definition: Eine Teilmenge U von Cont$\,(A)$ heißt rational, wenn es $f_0, \ldots, f_n \in A$ gibt, so daß $U = \{v \in \mathrm{Cont}\,(A) \mid v(f_i) \geq v(f_0) \neq \infty$ für $i = 1, \ldots, n\}$ und $A = f_0 A + \ldots + f_n A$. Die rationalen Teilmengen besitzen die wichtige Eigenschaft, daß sie konstruierbar sind und eine Basis für die Topologie von Cont$\,(A)$ bilden.

Bei der Definition der Strukturgarbe auf Cont (A) gehen wir entsprechend wie in [T], 7.1 vor. Dort wird jeder affinen Teilmenge U einer k-affinoiden Varietät eine k-affinoide Algebra zugeordnet, die einer gewissen universellen Eigenschaft genügt. Anstelle der Kategorie der k-affinoiden Algebren und des Funktors Max betrachten wir hier die Kategorie der vollständigen Tate-Ringe und den Funktor Cont, und können dann mit der entsprechenden universellen Eigenschaft jeder rationalen Teilmenge U von Cont (A) einen Tate-Ring $\mathcal{O}_A(U)$ zuordnen. Da die rationalen Teilmengen eine Basis der Topologie von Cont (A) bilden, erhalten wir eine Prägarbe $\mathcal{O}_A$ topologischer Ringe auf Cont (A). Im allgemeinen ist $\mathcal{O}_A$ keine Garbe. $\mathcal{O}_A$ ist eine Garbe topologischer Ringe, wenn A strikt noethersch ist (d.h. für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist der Ring $\hat{A}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ der strikt konvergenten Potenzreihen über der Vervollständigung $\hat{A}$ von A noethersch). Jede Bewertung $x \in$ Cont (A) setzt sich kanonisch fort zu einer Bewertung v_x des Halms $\mathcal{O}_{A,x}$. Dieser ist lokal und v_x hat das maximale Ideal als Träger. Das Tripel $X = (\text{Cont}\,(A), \mathcal{O}_A, (v_x \mid x \in \text{Cont}\,(A)))$ nennen wir den affinoiden analytischen Raum zu A. Ist B ein weiterer strikt noetherscher Tate-Ring und $Y = (\text{Cont}\,(B), \mathcal{O}_B, (v_x \mid x \in \text{Cont}\,(B)))$ der affinoide analytische Raum zu B, so definieren wir die Morphismen $X \to Y$ als Paare (φ, ψ), wobei $\varphi\colon \text{Cont}\,(A) \to \text{Cont}\,(B)$ eine stetige Abbildung und $\psi\colon \mathcal{O}_B \to \varphi_*\mathcal{O}_A$ ein Morphismus topologischer Garben ist, so daß für jedes $x \in$ Cont (A) der induzierte Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{B,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{A,x}$ mit den Bewertungen $v_{\varphi(x)}$ und v_x verträglich ist. Die Morphismen $X \to Y$ entsprechen dann eineindeutig den stetigen Ringhomomorphismen $\hat{B} \to \hat{A}$.

Der passende Rahmen zur Definition allgemeiner analytischer Räume ist die Kategorie $(VL)_{top}$, deren Objekte Tripel $(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ sind, wobei X ein topologischer Raum, $\mathcal{O}$ eine Garbe topologischer Ringe auf X mit lokalen Halmen $\mathcal{O}_x$ und jedes v_x eine Bewertung von $\mathcal{O}_x$ mit Träger im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_x$ ist, und deren Morphismen entsprechend wie die Morphismen zwischen affinoiden analytischen Räumen definiert sind. Die Kategorie der analytischen Räume ist definiert als die volle Unterkategorie von $(VL)_{top}$ bestehend aus den Objekten von $(VL)_{top}$, die lokal isomorph zu affinoiden analytischen Räumen sind.

Bei der obigen Definition eines affinoiden analytischen Raums waren wir etwas ungenau, denn die Struktur eines Objekts $(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ von $(VL)_{top}$ ist nicht allein durch die Garbe $\mathcal{O}$ bestimmt, sondern zusätzlich durch die Familie von Bewertungen $(v_x \mid x \in X)$ oder durch die Garbe $\mathcal{O}^+$ mit $\mathcal{O}^+(U) := \{s \in \mathcal{O}(U) \mid v_x(s) \geq 0$ für jedes $x \in U\}$. Dem entsprechend kann man nicht einem Tate-Ring, sondern nur einem Paar (A, A^+), wobei A ein Tate-Ring und A^+ ein Unterring von A ist, einen affinoiden analytischen Raum zuordnen. Da durch (A, A^+) eine affinoide Situation beschrieben wird, nennen wir (A, A^+) einen affinoiden Ring. Den analytischen Raum zu (A, A^+) bezeichnen wir mit $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. Der $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ zugrundeliegende topologische Raum ist die prokonstruierbare Teilmenge $\{v \in \mathrm{Cont}(A) \mid v(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^+\}$ von $\mathrm{Cont}(A)$.

Wir erläutern nun die Beziehung zwischen den analytischen Varietäten der rigiden Geometrie und den hier definierten analytischen Räumen. Sei A eine k-affinoide Algebra. Zu A betrachten wir die analytische Varietät $\mathrm{Sp}\, A = (\mathrm{Max}\, A, \mathcal{O})$ und den analytischen Raum $\mathrm{Spa}(A, A^\circ) = (\mathrm{Spa}(A, A^\circ), \mathcal{A})$, wobei A° der Ring der potenzbeschränkten Elemente von A ist. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung von k, und deshalb setzt sich die Bewertung von k eindeutig fort zu einer Bewertung $\alpha_\mathfrak{m}$ von A mit Träger $\mathfrak{m}$. Es ist $\alpha_\mathfrak{m} \in \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Auf diese Weise betrachten wir $\mathrm{Max}\, A$ als Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Der entscheidende Punkt ist nun, daß $\mathrm{Max}\, A$ c-dicht in dem spektralen Raum $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ ist, d.h. für jede nichtleere konstruierbare Teilmenge Q von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ ist $Q \cap \mathrm{Max}\, A \neq \emptyset$. Zum Beweis dieser Tatsache benutzen wir das modelltheoretische Ergebnis, daß die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper mit nichttrivialer Bewertungsteilbarkeit Quantorenelimination besitzt. (Ist die Bewertung von k diskret, so kann man dieses modelltheoretische Argument vermeiden (siehe (3.5.11)). Aus der c-Dichtheit von $\mathrm{Max}\, A$ in $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ folgt:

- $Q \mapsto Q \cap \mathrm{Max}\, A$ ist eine Bijektion von der Menge der rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ auf die Menge der rationalen Teilmengen von $\mathrm{Max}\, A$.
- Sind U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ und $(U_i \mid i \in I)$ eine Familie rationaler Teilmengen von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$, so gilt $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ genau dann, wenn $(U_i \cap \mathrm{Max}\, A \mid i \in I)$ eine zulässige Überdeckung von $U \cap \mathrm{Max}\, A$ ist.

Hieraus ergibt sich, daß die Kategorie der Garben auf der Topologie von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ kanonisch äquivalent ist zu der Kategorie der Garben auf der Grothendiecktopologie von Max. Unter dieser Äquivalenz entsprechen einander die Strukturgarben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{O}$.

Ist X eine k-analytische Varietät, die durch Verkleben k-affinoider Varietäten $(\mathrm{Sp}\, A_i \mid i \in I)$ entsteht, so ordnen wir X den analytischen Raum $r(X)$ zu, der durch das entsprechende Verkleben der affinoiden analytischen Räume $(\mathrm{Spa}(A_i, A_i^\circ) \mid i \in I)$ entsteht. Dies gibt einen volltreuen Funktor r von der Kategorie der analytischen Varietäten über k in die Kategorie der analytischen Räume über $\mathrm{Spa}(k, k^\circ)$.

Aus der c-Dichtheit von $\mathrm{Max}\, A$ in $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ ergibt sich die folgende Beschreibung der Punkte von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$, die van der Put in [P] bewiesen hat. Eine Menge $\mathcal{F}$ von rationalen Teilmengen von $\operatorname{Max} A$ heißt Filter, wenn (i) $\operatorname{Max} A \in \mathcal{F}, \emptyset \notin \mathcal{F}$; (ii) Sind $X, Y \in \mathcal{F}$, so ist $X \cap Y \in \mathcal{F}$; (iii) Ist $X \in \mathcal{F}$ und ist Y eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Max} A$ mit $X \subseteq Y$, so ist $Y \in \mathcal{F}$; (iv) Sind $X_1, \ldots, X_n$ rationale Teilmengen von $\operatorname{Max} A$, so daß $\bigcup_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{F}$, so ist $X_i \in \mathcal{F}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Man hat eine Bijektion von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ auf die Menge der Filter von rationalen Teilmengen von $\operatorname{Max} A$ durch $\operatorname{Spa}(A, A^\circ) \ni x \mapsto \{Q \cap \operatorname{Max} A \mid Q$ rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ mit $x \in Q\}$.

Bisher haben wir nur Tate-Ringe behandelt. Aber in der algebraischen Geometrie spielt eine andere Klasse topologischer Ringe eine wichtige Rolle, nämlich die adischen Ringe. Es stellt sich heraus, daß auch für adische Ringe die obige Definition $(*)$ von $\operatorname{Cont}(A)$ durchaus sinnvoll ist. Um Tate-Ringe und adische Ringe simultan behandeln zu können, betrachten wir die Klasse der f-adischen Ringe: Ein topologischer Ring A heißt f-adisch, wenn er einen offenen Unterring besitzt, dessen Teilraumtopologie adisch mit endlich erzeugtem Definitionsideal ist. (Einen offenen Unterring von A mit dieser Eigenschaft nennen wir Definitionsring von A.) Trivialerweise ist jeder adische Ring, der ein endlich erzeugtes Definitionsideal besitzt, ein f-adischer Ring. Wie oben angegeben, ist auch jeder Tate-Ring ein f-adischer Ring. Für einen f-adischen Ring A definieren wir den topologischen Raum $\operatorname{Cont}(A)$ genauso wie oben für Tate-Ringe. Die Definition einer rationalen Teilmenge von $\operatorname{Cont}(A)$ ist hier die folgende: Eine Teilmenge U von $\operatorname{Cont}(A)$ heißt rational, wenn es $f_0, f_1, \ldots, f_n \in A$ gibt, so daß $U = \{v \in \operatorname{Cont}(A) \mid v(f_i) \geq v(f_0) \neq \infty$ für $i = 1, \ldots, n\}$ und das Ideal $f_0 A + \ldots + f_n A$ offen ist. Da für einen Tate-Ring der Ring selbst das einzige offene Ideal ist, stimmt diese Definition mit der obigen überein, falls A tatesch ist. Genauso wie für Tate-Ringe gilt auch für beliebige f-adische Ringe, daß $\operatorname{Cont}(A)$ ein spektraler Raum ist und die rationalen Teilmengen von $\operatorname{Cont}(A)$ konstruierbar sind und eine Basis für die Topologie von $\operatorname{Cont}(A)$ bilden. Ähnlich wie für Tate-Ringe ordnen wir jeder rationalen Teilmenge U von $\operatorname{Cont}(A)$ über eine universelle Eigenschaft einen f-adischen Ring $\mathcal{O}_A(U)$ zu, und erhalten dadurch eine Prägarbe topologischer Ringe auf $\operatorname{Cont}(A)$. Für jedes $x \in \operatorname{Cont}(A)$ setzt sich die Bewertung x von A kanonisch fort zu einer Bewertung v_x des lokalen Rings $\mathcal{O}_{A,x}$. Wie oben angegeben, ist $\mathcal{O}_A$ eine Garbe, wenn A ein strikt noetherscher Tate-Ring ist. Für beliebige f-adische Ringe kann man zeigen, daß $\mathcal{O}_A$ eine Garbe topologischer Ringe ist, wenn A einen noetherschen Definitionsring hat. (Ein Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring hat, ist strikt noethersch. Aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.) Wir nennen $(\operatorname{Cont}(A), \mathcal{O}_A, (v_x \mid x \in X))$ den affinoiden adischen Raum zu dem Ring A. (Genau genommen kann man nicht einem f-adischen Ring einen adischen Raum zuordnen, sondern nur einem affinoiden Ring, d.h. einem Paar (A, A^+), wobei A ein f-adischer Ring und A^+ ein Unterring von A ist. Den adischen Raum zu (A, A^+) bezeichnen wir wieder mit $\mathrm{Spa}\,(A, A^+)$.) Die Kategorie der adischen Räume ist definiert als die volle Unterkategorie von $(VL)_{top}$ bestehend aus den Objekten von $(VL)_{top}$, die lokal isomorph zu affinoiden adischen Räumen sind.

Indem man jedem noetherschen affinen formalen Schema $\mathrm{Spf}\, A$ den adischen Raum $\mathrm{Spa}\,(A, A)$ zuordnet, erhält man einen Funktor von der Kategorie der noetherschen affinen formalen Schemata in die Kategorie der affinoiden adischen Räume. Dieser Funktor setzt sich kanonisch fort zu einem volltreuen Funktor von der Kategorie der lokal noetherschen formalen Schemata in die Kategorie der adischen Räume.

In vielen grundlegenden Eigenschaften verhalten sich affinoide analytische Räume wie man es von affinoiden analytischen Varietäten gewohnt ist. Der Grund hierfür ist, daß der globale Schnittring $\mathcal{O}(X)$ eine topologisch nilpotente Einheit hat. Adische Räume stehen zwischen analytischen Räumen und formalen Schemata. Um dies präzisieren zu können, ist die folgende Definition von Vorteil: Ein Punkt x eines adischen Raumes X heißt analytisch, wenn x eine offene Umgebung U in X besitzt, so daß der durch U gegebene offene Teilraum von X ein analytischer Raum ist. X_a bezeichnet die Menge aller analytischen Punkte von X. Wir setzen $X_{na} := X \backslash X_{na}$. Nach Definition ist X_a offen in X und ein analytischer Raum. Der lokal geringte Raum $(X_{na}, \mathcal{O} \mid X_{na})$ ist im wesentlichen ein formales Schema. Grob gesprochen entsteht also ein adischer Raum dadurch, daß man ein formales Schema an einen analytischen Raum anklebt.(Es kann der Fall eintreten, daß $X_a = \emptyset$. Ist X affinoid, so bedeutet dies, daß X der adische Raum zu einem diskret topologisierten Ring A ist. Dann ist X im wesentlichen einfach das affine Schema zu dem Ring A.)

Ein wesentlicher Grund, warum wir uns nicht auf tatesche Ringe und adische Ringe beschränken können, sondern allgemeine f-adische Ringe betrachten müssen, ist der folgende. Seien A ein f-adischer Ring und S der adische Raum zu A. Dann kann man jedem Schema X lokal von endlichem Typ über $\mathrm{Spec}\, A$ auf kanonische Weise einen adischen Raum zuordnen, den wir mit $X \times_{\mathrm{Spec}\, A} S$ bezeichnen. Aber selbst wenn A adisch ist, benötigt man, um $X \times_{\mathrm{Spec}\, A} S$ zu beschreiben, f-adische Ringe, die weder tatesch noch adisch sind.

Das Herzstück dieser Arbeit ist Kapitel 3, in dem wir analytische und adische Räume definieren, ihre Beziehung zu rigid analytischen Varietäten und formalen Schemata herstellen und einige Eigenschaften untersuchen. Erwähnt seien hier die beiden Hauptergebnisse über kohärente Garben:

- Sei X ein affinoider analytischer oder adischer Raum. Sei $\varphi: X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ der kanonische Morphismus lokal geringter Räume. Dann ist $M \mapsto \varphi^*(\tilde{M})$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(X)$-Moduln und der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln.
- Sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume. Sei Y affinoid und sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ ist dann $R^p f_* \mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Genauer: $H^p(X, \mathcal{F})$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul und $R^p f_* \mathcal{F}$ ist der kohärente $\mathcal{O}_Y$-Modul zu dem $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul $H^p(X, \mathcal{F})$.

Dabei definieren wir hier eigentliche Morphismen anders als in der rigiden Geometrie. In der rigiden Geometrie kann man die eigentlichen Morphismen nicht als die universell abgeschlossenen Morphismen charakterisieren. (Denn zum Beispiel jede offene Einbettung zwischen k-affinoiden Varietäten ist universell abgeschlossen.) Deshalb definiert man eigentliche Morphismen analytischer Varietäten durch Schrumpfungen von Überdeckungen. Jedoch in der Kategorie der analytischen oder adischen Räume macht der Begriff universell abgeschlossen durchaus Sinn. Wir definieren deshalb auch: Ein Morphismus zwischen analytischen oder adischen Räumen heißt eigentlich, wenn er separiert, von endlichem Typ und universell abgeschlossen ist. Die Beziehung zu den eigentlichen Morphismen k-analytischer Varietäten ist die folgende. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen k-analytischen Varietäten. Seien $r(X)$ und $r(Y)$ die zu X und Y assoziierten analytischen Räume und $r(f): r(X) \to r(Y)$ der durch f induzierte Morphismus. Dann gilt: Ist f eigentlich, so ist auch $r(f)$ eigentlich. Ist die Bewertung von k diskret, so kann man mit Hilfe eines Ergebnisses von Lütkebohmert ([Lü]) auch die Umkehrung zeigen: Ist $r(f)$ eigentlich, so ist auch f eigentlich.

Wir erwähnen hier zwei Beispiele adischer Räume, die in (3.7.5) und (3.10.8) näher ausgeführt sind.

- Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, der vollständig in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie ist. Wir nehmen an, daß A von gleicher Charakteristik ist. Sei X der adische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A). X hat genau einen nichtanalytischen Punkt t, nämlich die triviale Bewertung von A mit Träger $\mathfrak{m}$. Wir betrachten den analytischen Raum $X_a = X \setminus \{t\}$. Es gibt einen vollständigen Rang 1 bewerteten Körper K, so daß jeder Punkt von X_a eine offene Umgebung hat, die der analytische Raum assoziiert zu einer K-analytischen Varietät ist, aber es gibt im allgemeinen keine analytische Varietät Y, so daß X_a der zu Y assoziierte analytische Raum ist. Man kann also sagen, daß X_a durch Verkleben K-analytischer Varietäten entsteht, wobei jedoch die Klebemorphismen keine K-Morphismen sind.

- In diesem Beispiel betrachten wir Mumford's Konstruktion semiabelscher Schemata ([Mu]). Sei A ein exzellenter normaler Integritätsbereich, der mit einer vollständigen adischen Topologie versehen ist. Seien $\tilde{G}$ ein Torus über $S := \operatorname{Spec} A$ und $Y \subseteq \tilde{G}(K)$ ein Periodengitter, das eine Polarisation besitzt. (K ist der Quotientenkörper von A.) Zu dem Datum $(\tilde{G}, Y)$ konstruiert Mumford in [Mu] ein semiabelsches Gruppenschema G über S. Dabei stellt man sich G als den „Quotienten" von $\tilde{G}$ nach Y vor. Diese Vorstellung läßt sich in der Kategorie der adischen Räume präzisieren, denn es gilt das folgende: Sei R der adische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A). Seien $\tilde{G} \times_S R$ und $G \times_S R$ die zu $\tilde{G}$ und G assoziierten adischen Räume. Dann gibt es einen Morphismus $\rho: \tilde{G} \times_S R \to G \times_S R$, so daß in der Kategorie der adischen Räume $(G \times_S R, \rho)$ der Quotient von $\tilde{G} \times_S R$ nach einer abgeschlossenen Untergruppe L von $\tilde{G} \times_S R$ ist. Dabei ist $L \to R$ ein Gitter über R, dessen Rang faserweise variiert.

Wir nehmen nun an, daß k reell abgeschlossen ist. In der reellen algebraischen Geometrie interessiert man sich für die Mengen $X(k)$ der k-rationalen Punkte von algebraischen Varietäten X über k. Um zum Beispiel die topologischen Eigenschaften von $X(k)$ untersuchen zu können, betrachtet man $X(k)$ als semialgebraischen Raum (d.h. man versieht $X(k)$ mit einer gewissen Grothendiecktopologie und Strukturgarbe ([DK])). Wir können nun statt einer algebraischen Varietät über k eine rigid analytische Varietät $X = (X, \mathcal{O})$ über k betrachten. Ein Vorschlag, wie man in diesem Fall die Menge $X(k)$ der k-rationalen Punkte von X in Analogie zu den semialgebraischen Räumen mit einer geometrischen Struktur versehen kann, ist der folgende (einfachheitshalber nehmen wir an, daß X quasisepariert ist). Die zulässigen offenen Teilmengen von $X(k)$ sind die Mengen der Form $\{x \in X(k) \cap V \mid c_1(x) > 0, \ldots, c_n(x) > 0\}$, wobei V eine quasikompakte zulässige offene Teilmenge von X ist und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{O}(V)^*$. Die zulässigen Überdeckungen sind die endlichen Überdeckungen. Sei U eine zulässige offene Teilmenge von $X(k)$. Eine Abbildung $f: U \to k$ nennen wir Wurzelfunktion, wenn es eine zulässige offene Teilmenge V von X, ein normiertes Polynom $p(T) \in \mathcal{O}(V)[T]$ und natürliche Zahlen m, n gibt, so daß $U \subseteq V$ und für jedes $x \in U$ das Polynom $p(x)(T) \in k[T]$ genau m Nullstellen $a_1(x) < a_2(x) < \ldots < a_m(x)$ in k hat, die Diskriminante von $p(x)(T)$ nicht verschwindet und $f(x) = a_n(x)$. Für jede zulässige offene Teilmenge U von $X(k)$

sei $\mathcal{A}(U)$ die Menge aller Funktionen $f: U \to k$, die sich lokal (in der Grothendiecktopologie von $X(k)$) durch Wurzelfunktionen approximieren lassen, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine zulässige Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von U und Wurzelfunktionen $f_i: U_i \to k \, (i \in I)$, so daß $\mid f(x) - f_i(x) \mid < \epsilon$ für jedes $i \in I$ und jedes $x \in U_i$. Dann ist $\mathcal{A}(U)$ eine k-Banachalgebra und $U \mapsto \mathcal{A}(U)$ eine Garbe auf $X(k)$. Dies ist die Strukturgarbe von $X(k)$. Ähnlich wie hier angedeutet wird in [Hu] allgemeiner zu jedem analytischen oder adischen Raum ein „semialgebraischer" Raum konstruiert. Dies erlaubt es, analytische und adische Räume von einem semialgebraischen Standpunkt aus zu betrachten.

Kapitel 1 und 2 haben vorbereitenden Charakter für Kapitel 3. Kapitel 2 beschäftigt sich mit einigen allgemeinen Eigenschaften f-adischer Ringe. In Kapitel 1 wird eine für die gesamte Arbeit wichtige Grundlage dargelegt. Denn zur Untersuchung des oben definierten topologischen Raumes Cont (A) ist es für viele Fragen wichtig, Cont (A) als Teilraum eines größeren topologischen Raumes zu betrachten, nämlich als Teilraum des Bewertungsspektrums von A. Das Bewertungsspektrum Spv A von A ist die Menge der Äquivalenzklassen der Bewertungen von A. Wir versehen hier Spv A mit der Topologie $\mathcal{T}$, die von den Mengen $\{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(a) \geq v(b) \neq \infty\} (a, b \in A)$ erzeugt wird. Es gibt aber noch weitere sinnvolle Topologien auf Spv A, zum Beispiel die Topologie $\mathcal{T}'$, die von den Mengen $\{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(a) > v(b)\} (a, b \in A)$ erzeugt wird. Welche Topologie man auf Spv A wählt, hängt ab von der Situation, in der man das Bewertungsspektrum anwenden möchte. Wir haben für diese Arbeit unter anderem deshalb die Topologie $\mathcal{T}$ auf Spv A gewählt, weil in der rigiden Geometrie die zulässigen offenen Teilmengen durch Ungleichungen $\geq$ definiert werden. Wir wollen hier erwähnen, daß im wesentlichen alle Ergebnisse, die wir in Kapitel 1 für $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T})$ darlegen, entsprechend auch für $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T}')$ gelten. Die ersten mir bekannten allgemeinen Arbeiten über das Bewertungsspektrum sind [Pu] und [S]. In [S] wird im wesentlichen mit der Topologie $\mathcal{T}'$ gearbeitet.

In der Arbeit [Be] werden ebenfalls analytische Räume in Verbindung mit rigider Geometrie definiert. Wir wollen hier Berkovich's Definition analytischer Räume mit der Definition aus dieser Arbeit vergleichen. Sei L ein Körper, versehen mit einer Rang 0 oder Rang 1 Bewertung. L sei vollständig in der Bewertungstopologie. Sei A eine L-affinoide Banachalgebra im Sinne der Definition [Be], 2.1.1. Ist L trivial bewertet, so ist A ein f-adischer Ring, der aber nicht unbedingt einen noetherschen Definitionsring hat, und ist L Rang 1 bewertet, so ist A ein strikt noetherscher Tate-Ring. Sei $X = (X, \mathcal{O}_X)$ der in [Be] konstruierte analytische Raum zu A. Ist L trivial bewertet, so läßt sich X nur sehr schwer mit den hier definierten adischen Räumen vergleichen. Wir gehen nicht näher darauf ein. Ab jetzt sei L Rang 1 bewertet. Wie oben skizziert, haben wir zu A den analytischen Raum $Y = (\mathrm{Cont}\,(A), \mathcal{O}_A, (v_x \mid x \in \mathrm{Cont}\,(A)))$. Die Beziehung zwischen X und Y kann man folgendermaßen beschreiben.

Wir gehen aus von der Menge $\mathrm{Spv}\, A$ aller Bewertungen von A, von den oben definierten Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ auf $\mathrm{Spv}\, A$, und der Menge $Z := \mathrm{Cont}\,(A) \subseteq \mathrm{Spv}\, A$ aller stetigen Bewertungen von A. Wie oben dargelegt, ist $(Z, \mathcal{T} \mid Z)$ ein spektraler Raum. Ebenso kann man zeigen, daß $(Z, \mathcal{T}' \mid Z)$ ein spektraler Raum ist. Die beiden Topologien $\mathcal{T} \mid Z$ und $\mathcal{T}' \mid Z$ sind eng miteinander verknüpft, sie sind nämlich zueinander dual (d.h. die abgeschlossenen konstruierbaren Teilmengen von $\mathcal{T} \mid Z$ sind genau die offenen konstruierbaren Teilmengen von $\mathcal{T}' \mid Z$). (N.B. Auch $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ sind spektrale Topologien, aber sie sind im allgemeinen nicht zueinander dual.) Seien $U = (Z, \mathcal{T} \mid Z)_{\min}$ und $V = (Z, \mathcal{T}' \mid Z)_{\max}$ die Teilräume der minimalen Punkte und maximalen Punkte von $(Z, \mathcal{T} \mid Z)$ und $(Z, \mathcal{T}' \mid Z)$. Als Teilmenge von $\mathrm{Spv}\, A$ stimmen U und V überein (da $\mathcal{T} \mid Z$ und $\mathcal{T}' \mid Z$ zueinander dual sind), aber die Topologien auf U und V sind verschieden. Aber immerhin sind sie miteinander vergleichbar, nämlich die Topologie von U ist stärker als die Topologie von V. Deshalb gibt es zu jeder offenen Teilmenge S von V eine offene Teilmenge W von $(Z, \mathcal{T} \mid Z)$ mit $S = V \cap W$. Sei $\mathrm{o}(S)$ die größte offene Teilmenge W von $(Z, \mathcal{T} \mid Z)$ mit $S = V \cap W$. Indem man jeder offenen Teilmenge S von V den Ring $\mathcal{O}_A(\mathrm{o}(S))$ zuordnet, erhält man eine Garbe $\mathcal{A}$ auf V. Es gilt: $(X, \mathcal{O}_X) = (V, \mathcal{A})$.

Als Raum der abgeschlossenen Punkte eines spektralen Raumes ist V quasikompakt (und da die Spezialisierungen eines jeden Punktes von $(Z, \mathcal{T}' \mid Z)$ eine Kette bilden, ist V auch hausdorffsch). Der Raum U macht geometrisch keinen Sinn, da U als Raum der minimalen Punkte eines spektralen Raumes total unzusammenhängend ist. Dagegen entsprechen die Zusammenhangskomponenten von V genau den Zusammenhangskomponenten von $(Z, \mathcal{T}' \mid Z)$ und damit auch den Zusammenhangskomponenten von $(Z, \mathcal{T} \mid Z)$. Deshalb und da A noethersch ist, hat V nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Mein herzlicher Dank gilt Professor M. Knebusch und Professor N. Schwartz. Von beiden erhielt ich wertvolle Anregungen für diese Arbeit. Von Knebusch kam schon vor Jahren der Anstoß, über die Beziehung zwischen rigid analytischer Geometrie und semialgebraischer Geometrie nachzudenken. Von Schwartz lernte ich durch seine Vorträge über die Arbeit [S] das Bewertungsspektrum kennen. Desweiteren danke ich Prof. L. Gerritzen für seinen Hinweis auf die Arbeit [Be]. Frau Bonn danke ich für ihr freundliches Tippen dieser Arbeit und ihre große Hilfsbereitschaft dabei.

1. Bewertungsspektrum

1.1. Das Bewertungsspektrum eines Ringes

Zunächst wiederholen wir die Definition einer Bewertung eines Ringes wie sie in [B], VI.3.1 angegeben ist. Sei Γ eine angeordnete abelsche Gruppe. Sei Γ_∞ die Menge $\Gamma \cup \{\infty\}$. Wir setzen die Anordnung und die Verknüpfung von Γ fort auf Γ_∞ durch $\infty \geq x$ und $x + \infty = \infty + x = \infty$ für jedes $x \in \Gamma_\infty$. Dadurch wird Γ_∞ zu einem angeordneten Monoid. Sei A ein Ring. (Wir betrachten hier ausschließlich kommutative Ringe mit Einselement.)

Definition 1.1.1. Eine Bewertung von A mit Werten in Γ_∞ ist eine Abbildung $v\colon A \longrightarrow \Gamma_\infty$, so daß für alle $x, y \in A$ gilt:

a) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$
b) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$
c) $v(0) = \infty$, $v(1) = 0$

Zu einer Bewertung $v\colon A \longrightarrow \Gamma_\infty$ führen wir eine Reihe von Notationen ein. Die von $\{v(a) | a \in A,\, v(a) \neq \infty\}$ erzeugte Untergruppe von Γ heißt die Wertegruppe von v und wird mit Γ_v bezeichnet. Der Rang von v ist definitionsgemäß der Rang der angeordneten Gruppe Γ_v. Eine wichtige Rolle spielt die von $\{v(a) | a \in A,\, v(a) \leq 0\}$ erzeugte konvexe Untergruppe von Γ. Sie wird mit $c\Gamma$ bezeichnet und heißt die charakteristische Untergruppe von v. Die Menge $v^{-1}(\infty)$ ist ein Primideal von A. Es heißt der Träger von v und wird mit $\operatorname{supp}(v)$ bezeichnet. v heißt trivial bzw. diskret vom Rang 1 bzw. mikrobial, wenn $\Gamma_v = (0)$ bzw. Γ_v isomorph zu $\mathbb{Z}$ bzw. $(\Gamma_v)_\infty$ ein von ∞ verschiedenes kofinales Element besitzt. Dabei heißt ein $x \in (\Gamma_v)_\infty$ kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$, wenn es zu jedem $y \in \Gamma_v$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \cdot x > y$.

Sind a, b Elemente von A mit $v(a) \neq v(b)$, so ist $v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$. Ist I ein Ideal von A mit $v(i) = \infty$ für jedes $i \in I$, so faktorisiert v über eine Bewertung $\bar{v}\colon A/I \longrightarrow \Gamma_\infty$ mit $\bar{v}(a+I) = v(a)$. Ist S ein multiplikatives System von A mit $v(s) \neq \infty$ für jedes $s \in S$, so faktorisiert v über eine Bewertung $\bar{v}\colon S^{-1}A \longrightarrow \Gamma_\infty$ mit $\bar{v}(\frac{a}{s}) = v(a) - v(s)$.

Also induziert v eine Bewertung $\bar{v}\colon \operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v)) \longrightarrow \Gamma_\infty$. Der Bewertungsring dieser Bewertung $\bar{v}$ wird mit $A(v)$ bezeichnet und heißt der Bewertungsring von v. Jeder Bewertungsring eines Residuenkörpers $\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ von A ist der Bewertungsring einer Bewertung von A.

Zwei Bewertungen v und w von A heißen äquivalent, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.

i) Für alle $a, b \in A$ gilt

$$v(a) \geq v(b) \iff w(a) \geq w(b).$$

ii) Es gibt einen ordnungstreuen Monoidisomorphismus

$$f\colon (\Gamma_v)_\infty \longrightarrow (\Gamma_w)_\infty \quad \text{mit} \quad w = f \circ v\,.$$

iii) Es ist $\operatorname{supp}(v) = \operatorname{supp}(w)$ und $A(v) = A(w)$.

Die Menge der Äquivalenzklassen der Bewertungen von A wird mit $\operatorname{Spv} A$ bezeichnet. Jeder Ringhomomorphismus $f\colon A \longrightarrow B$ induziert eine kanonische Abbildung $\operatorname{Spv}(f)\colon \operatorname{Spv} B \longrightarrow \operatorname{Spv} A$. Für ein $v \in \operatorname{Spv} B$ schreiben wir oft auch $v|A$ statt $\operatorname{Spv}(f)(v)$. Im folgenden unterscheiden wir nicht zwischen einer Bewertung von A und ihrer Äquivalenzklasse.

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Teilmengen Q von $\operatorname{Spv} A$, die sich schreiben lassen als

$$\begin{aligned} Q = \bigcup_{i=1}^{k} \{v \in \operatorname{Spv} A \,|\, & v(a_{i1}) > v(b_{i1}), \ldots, v(a_{in(i)}) > v(b_{in(i)}), \\ & v(c_{i1}) \geq v(d_{i1}), \ldots, v(c_{im(i)}) \geq v(d_{im(i)})\} \end{aligned}$$

wobei die a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} beliebige Elemente aus A sind. $\mathcal{S}$ ist eine boolesche Algebra.

Für beliebige $a, b \in A$ setzen wir

$$R_A\left(\frac{a}{b}\right) = \{v \in \operatorname{Spv} A \,|\, v(a) \geq v(b) \neq \infty\}$$

und allgemeiner für $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in A$

$$R_A\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} R_A\left(\frac{a_i}{b_i}\right).$$

Diese Teilmengen von $\operatorname{Spv} A$ heißen rational. Jede rationale Teilmenge von $\operatorname{Spv} A$ ist ein Element von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}$ wird als boolesche Algebra von den rationalen Teilmengen erzeugt. Es gilt das einfache Lemma

Lemma 1.1.2. i) Zu jeder rationalen Teilmenge X von $\operatorname{Spv} A$ gibt es $f_0, f_1, \dots, f_n \in A$ mit $X = R_A(\frac{f_1}{f_0}, \frac{f_2}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0})$.
ii) Es ist

$$R_A(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}) \cap R_A(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_m}{g_0}) =$$
$$R_A(\frac{f_i g_0}{f_0 g_0}, \frac{g_j f_0}{f_0 g_0} \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m) =$$
$$R_A(\frac{f_i g_j}{f_0 g_0} \mid i = 0, \dots, n,\ j = 0, \dots, m)$$

Lemma 1.1.3. Seien $f_0, f_1, \dots, f_n \in A$ und $g \in A$. Sei I das von $f_0, \dots, f_n$ erzeugte Ideal. Es gelten
i) Ist $g \in \sqrt{I}$, so ist $\{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(f_1) \geq v(f_0), \dots, v(f_n) \geq v(f_0),\ v(g) \neq \infty\}$ rational.
ii) Ist $I = A$, so ist $R_A(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}) = \{f \in \operatorname{Spv} A \mid v(f_1) \geq v(f_0), \dots, v(f_n) \geq v(f_0)\}$.

Beweis: i) Sei $g \in \sqrt{I}$. Wir zeigen

$$(*)\ R_A(\tfrac{f_1}{f_0}, \dots, \tfrac{f_n}{f_0}) \cap R_A(\tfrac{g}{g}) = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(f_1) \geq v(f_0), \dots, v(f_n) \geq v(f_0),\ v(g) \neq \infty\}$$

Die Relation $\subseteq$ ist klar. Wir zeigen $\supseteq$.
Sei $v \in \operatorname{Spv} A$ mit $v(f_1) \geq v(f_0), \dots, v(f_n) \geq v(f_0)$, $v(g) \neq 0$. Zu zeigen ist, daß $v(f_0) \neq \infty$. Angenommen, es sei $v(f_0) = \infty$. Dann ist $v(f_0) = v(f_1) = \dots = v(f_n) = \infty$ und damit $v(i) = \infty$ für jedes $i \in \sqrt{I}$, insbesondere $v(g) = \infty$, Widerspruch.
ii) folgt aus $(*)$ mit $g = 1$.

Definition 1.1.4. Wir versehen $\operatorname{Spv} A$ mit der Topologie $\mathcal{T}_A$, die die rationalen Teilmengen als Basis hat. Der topologische Raum $\operatorname{Spv} A = (\operatorname{Spv} A, \mathcal{T}_A)$ heißt das Bewertungsspektrum von A.

Die Topologien $\mathcal{T}_A$ lassen sich folgendermaßen charakterisieren: Für die Topologien $\mathcal{T}_A$ gilt

i) Für jeden Ring A und für jedes $a \in A$ ist
$$\{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(a) \geq 0\} \in \mathcal{T}_A$$

ii) Ist $f\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, so daß $\operatorname{Spec}(f)$ eine offene Einbettung von Schemata ist, so ist $\operatorname{Spv}(f)\colon (\operatorname{Spv} B, \mathcal{T}_B) \longrightarrow (\operatorname{Spv} A, \mathcal{T}_A)$ eine offene Einbettung topologischer Räume

und die $\mathcal{T}_A$ sind die schwächsten Topologien, die i) und ii) erfüllen, d.h. haben wir zu jedem Ring A eine Topologie $\mathcal{T}'_A$ auf $\operatorname{Spv} A$, so daß i) und ii) gelten für die Topologien

$\mathcal{T}'_A$ anstelle der Topologien $\mathcal{T}_A$, so ist für jeden Ring A die Topologie $\mathcal{T}_A$ schwächer als $\mathcal{T}'_A$.

Bemerkung 1.1.5. i) Ist A ein Körper, so ist $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T}_A)$ die abstrakte Riemannsche Fläche aus [ZS], VI. 17 (mit dem Unterschied, daß in [ZS] die triviale Bewertung ausgeschlossen ist).
ii) Die Trägerabbildung $\operatorname{supp}: \operatorname{Spv} A \longrightarrow \operatorname{Spec} A$, $v \longmapsto \operatorname{supp}(v)$ ist stetig.
iii) Sei M die Menge der trivialen Bewertungen von A. Wir versehen M mit der Teilraumtopologie von $\operatorname{Spv} A$. Dann ist $\operatorname{supp}|M: M \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ ein Homöomorphismus.

Ein topologischer Raum heißt spektral, wenn er homöomorph zu dem Zariski-Spektrum eines Ringes ist. Für jeden topologischen Raum hat man den Begriff der konstruierbaren Teilmenge ([EGA*], 0.2.3). Eine Abbildung zwischen spektralen Räumen heißt spektral, wenn sie stetig ist und das Urbild konstruierbarer Teilmengen konstruierbar ist.

Wir wollen nun zeigen

Satz 1.1.6. $\operatorname{Spv} A$ ist ein spektraler Raum und $\mathcal{S}$ ist die Menge der konstruierbaren Teilmengen von $\operatorname{Spv} A$.

Ist $f: A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, so ist das Urbild einer rationalen Teilmenge von $\operatorname{Spv} A$ unter $\operatorname{Spv}(f)$ eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spv} B$. Deshalb ist $\operatorname{Spv}(f)$ eine spektrale Abbildung.

Zum Beweis von Satz (1.1.6) führen wir eine Hilfstopologie auf $\operatorname{Spv} A$ ein. Sei $\mathcal{T}_{\text{cons}}$ die Topologie auf $\operatorname{Spv} A$, die $\mathcal{S}$ als Basis hat.

Proposition 1.1.7. $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T}_{\text{cons}})$ ist ein kompakter Hausdorffraum. $\mathcal{S}$ ist die Menge aller Teilmengen von $\operatorname{Spv} A$, die zugleich offen und abgeschlossen sind in der Topologie $\mathcal{T}_{\text{cons}}$.

Beweis: Jede Bewertung v von A definiert eine zweistellige Relation $|$ auf A durch

$$a|b \iff v(b) \geq v(a)\,.$$

Diese Relation hat die folgenden Eigenschaften
1) $\forall\, a, b \in A : a|b$ oder $b|a$
2) $\forall\, a, b, c \in A : a|b$ und $b|c \Longrightarrow a|c$

3) $\forall\, a,b,c \in A : a|b$ und $a|c \Longrightarrow a|b+c$

4) $\forall\, a,b,c \in A : a|b \Longrightarrow ac|bc$

5) $\forall\, a,b,c \in A : ac|bc$ und $0 \not| c \Longrightarrow a|b$

6) $0 \not| 1$

Äquivalente Bewertungen definieren dieselbe Relation und nicht äquivalente Bewertungen definieren verschiedene Relationen. Wir haben deshalb eine injektive Abbildung von $\operatorname{Spv} A$ in die Potenzmenge $\mathcal{P}(A \times A)$ von $A \times A$, indem wir jede Bewertung auf die zugehörige Relation abbilden. Wir identifizieren $\operatorname{Spv} A$ mit dem Bild dieser Abbildung. Dieses Bild ist gerade die Menge aller zweistelligen Relationen auf A, die 1) — 6) erfüllen.

Auf $\{0,1\}$ betrachten wir die diskrete Topologie und $\{0,1\}^{A\times A} = \mathcal{P}(A \times A)$ versehen wir mit der Produkttopologie. Dadurch wird $\mathcal{P}(A \times A)$ zu einem kompakten Hausdorffraum. $\operatorname{Spv} A$ ist abgeschlossen in $\mathcal{P}(A \times A)$ und die Teilraumtopologie von $\mathcal{P}(A \times A)$ auf $\operatorname{Spv} A$ ist gerade $\mathcal{T}_{\text{cons}}$. Deshalb ist $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T}_{\text{cons}})$ ein kompakter Hausdorffraum.

Sei U eine Teilmenge von $\operatorname{Spv} A$, die offen und abgeschlossen in $\mathcal{T}_{\text{cons}}$ ist. U ist dann offen und kompakt und somit eine endliche Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{S}$, also selbst ein Element aus $\mathcal{S}$.

Wir zitieren hier Proposition 7 aus [H]. Mit dieser Proposition werden wir fast alle in dieser Arbeit auftretenden spektralen Räume konstruieren.

Lemma 1.1.8. Sei X ein quasikompakter topologischer Raum. Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Teilmengen von X, die zugleich offen und abgeschlossen sind. Sei $\mathcal{T}$ eine T_0-Topologie auf X, die von einer Teilmenge von $\mathcal{L}$ erzeugt wird. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein spektraler Raum und $\mathcal{L}$ die Menge der konstruierbaren Teilmengen von $(X, \mathcal{T})$.

Man rechnet sofort nach, daß $\operatorname{Spv} A$ ein T_0-Raum ist. Somit folgt (1.1.6) aus (1.1.7) und (1.1.8).

Sei $v: A \longrightarrow \Gamma_\infty$ eine Bewertung von A. Wir wollen die Spezialisierungen von v in $\operatorname{Spv} A$ untersuchen. Zu jeder konvexen Untergruppe H von Γ haben wir zwei Abbildungen:

$$v/H: A \longrightarrow (\Gamma/H)_\infty, \quad (v/H)(a) = \begin{cases} v(a) \bmod H & \text{wenn } v(a) \in \Gamma \\ \infty & \text{wenn } v(a) = \infty \end{cases}$$

$$v|H: A \longrightarrow H_\infty, \quad (v|H)(a) = \begin{cases} v(a) & \text{wenn } v(a) \in H \\ \infty & \text{wenn } v(a) \notin H \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, daß v/H eine Bewertung von A ist für jede konvexe Untergruppe H von Γ und daß $v|H$ eine Bewertung von A ist für jede konvexe Untergruppe H von Γ mit $c\Gamma \subseteq H$. (Ist $c\Gamma \not\subseteq H$, so ist $v|H$ keine Bewertung von A, denn: Sei $a \in A$ mit $v(a) < 0$ und $v(a) \notin H$. Es ist dann $v(-a) = v(1+a) = v(a)$, also $(v|H)(-a) = (v|H)(1+a) = \infty$ und somit gilt nicht $(v|H)(1) \geq \min\{(v|H)(1+a), (v|H)(-a)\}$).

Bemerkung 1.1.9. Sei $\varphi: A \longrightarrow K := \mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(v))$ die kanonische Abbildung. Sei $\bar{v}: K \longrightarrow \Gamma_\infty$ die von v induzierte Bewertung und sei $A(v)$ der Bewertungsring von $\bar{v}$. Sei $\mathfrak{p}$ das durch H gegebene Primideal von $A(v)$, also $\mathfrak{p} = \{x \in A(v) | \bar{v}(x) > H\}$. Dann ist $\mathrm{supp}\,(v/H) = \mathrm{supp}\,(v)$ und $A(v/H) = A(v)_\mathfrak{p}$.

Es ist $\varphi(A) \subseteq A(v)_\mathfrak{p}$ genau dann, wenn $c\Gamma \subseteq H$. Sei nun $c\Gamma \subseteq H$. Dann induziert φ eine Abbildung $A \longrightarrow A(v)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$. Es ist $A(v)/\mathfrak{p}$ ein Bewertungsring des Körpers $A(v)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$. Der Ringhomomorphismus von A in den bewerteten Körper $(A(v)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p},\ A(v)/\mathfrak{p})$ induziert die Bewertung $v|H$.

Für jede konvexe Untergruppe H von Γ ist v/H eine Generalisierung von v und für jede konvexe Untergruppe H von Γ mit $c\Gamma \subseteq H$ ist $v|H$ eine Spezialisierung von v.

Definition 1.1.10. Die Bewertungen $v|H$ (H konvexe Untergruppe von Γ mit $c\Gamma \subseteq H$) heißen die Primärspezialisierungen von v. Die Bewertungen v/H (H konvexe Untergruppe von Γ) heißen die Sekundärgeneralisierungen von v. Eine Bewertung w von A heißt Sekundärspezialisierung (bzw. Primärgeneralisierung) von v, wenn v eine Sekundärgeneralisierung (bzw. Primärspezialisierung) von w ist.

Die Primärspezialisierungen (bzw. Sekundärspezialisierungen) verhalten sich transitiv, d.h. ist v Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von u und ist w Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) in v, so ist w Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von u.

Proposition 1.1.11. Die Sekundärspezialisierungen von v sind genau die Spezialisierungen von v, die denselben Träger wie v haben.

Beweis: Die kanonische Abbildung $\mathrm{Spv}\,\mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(v)) \longrightarrow \mathrm{Spv}\,A$ ist ein Homöomorphismus von $\mathrm{Spv}\,\mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(v))$ auf $\{w \in \mathrm{Spv}\,A | \mathrm{supp}\,(w) = \mathrm{supp}\,(v)\}$. Die Behauptung folgt dann aus (1.1.9).

Es gilt die folgende einfache Proposition.

Proposition 1.1.12. Die Primärspezialisierungen von v bilden eine Kette (d.h. sind x und y zwei Primärspezialisierungen von v, so ist x eine Primärspezialisierung von y oder y eine Primärspezialisierung von x) und sind eindeutig durch ihren Träger bestimmt.

Eine Teilmenge T von A heißt v-konvex, wenn für beliebige $a, b, c \in A$ gilt: Ist $v(a) \geq v(c) \geq v(b)$ und $a, b \in T$, so auch $c \in T$. Ist $0 \in T$, so ist also T genau dann v-konvex, wenn für $b, c \in A$ gilt: Ist $v(c) \geq v(b)$ und $b \in T$, so ist $c \in T$.

Proposition 1.1.13. Die Träger der Primärspezialisierungen von v sind genau die v-konvexen Primideale von A.

Beweis: Es ist sofort zu sehen, daß der Träger einer Primärspezialisierung von v v-konvex ist. Sei nun $\mathfrak{p}$ ein v-konvexes Primideal. Es ist $v(A \backslash \mathfrak{p}) < v(\mathfrak{p})$, insbesondere ist $v(A \backslash \mathfrak{p}) \subseteq \Gamma$. Sei G die von $v(A \backslash \mathfrak{p})$ erzeugte Untergruppe von Γ. Es ist dann $G < v(\mathfrak{p})$, denn: Angenommen, dies ist nicht der Fall. Da $v(A \backslash \mathfrak{p})$ additiv abgeschlossen ist, gibt es dann $a, b \in A \backslash \mathfrak{p}$ und $c \in \mathfrak{p}$ mit $v(a) - v(b) \geq v(c)$, also $v(a) \geq v(bc)$. Dies ist ein Widerspruch zu $v(A \backslash \mathfrak{p}) < v(\mathfrak{p})$. Sei H die konvexe Hülle von G in Γ. Es ist dann H eine konvexe Untergruppe von Γ mit $H < v(\mathfrak{p})$ und $v(A \backslash \mathfrak{p}) \subseteq H$, also $\mathfrak{p} = \{a \in A | v(a) > H\}$. Ist $a \in A$ mit $v(a) \leq 0$, so ist $a \in A \backslash \mathfrak{p}$, also $v(a) \in H$. Deshalb ist $c\Gamma \subseteq H$. Wir haben $\mathfrak{p} = \operatorname{supp}(v|H)$.

Eine Bewertung w von A heißt verallgemeinerte Primärspezialisierung von v, wenn w eine Primärspezialisierung von v ist oder wenn $c\Gamma = (0)$ und w eine triviale Bewertung von A mit $\operatorname{supp}(v \mid c\Gamma) \subseteq \operatorname{supp}(w)$ ist. Im letzteren Falle haben wir nach (1.1.5 iii) eine Spezialisierungskette $v \succ v \mid c\Gamma \succ w$. Also ist jede verallgemeinerte Primärspezialisierung von v eine Spezialisierung von v.

Nun können wir die Spezialisierungen von v beschreiben.

Satz 1.1.14. Jede Spezialisierung von v ist eine Sekundärspezialisierung einer verallgemeinerten Primärspezialisierung von v.

Beweis: Sei w eine Spezialisierung von v. Ist $c\Gamma = (0)$ und $v(a) \leq 0$ für alle $a \in A \backslash \operatorname{supp}(w)$, so ist $\operatorname{supp}(v|c\Gamma) = \{a \in A | \, v(a) > 0\} \subseteq \operatorname{supp}(w)$, und deshalb ist die triviale Bewertung u von A mit $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{supp}(w)$ eine verallgemeinerte Primärspezialisierung von v und w eine Sekundärspezialisierung von u. Zu betrachten bleibt also noch der Fall, daß $c\Gamma \neq (0)$ oder $v(a) > 0$ für ein $a \in A \backslash \operatorname{supp}(w)$.

Wir machen die einfache Beobachtung

(1) Für beliebige $a, b \in A$ gilt: Ist $v(a) \geq v(b)$, $w(a) \neq \infty$ und $w(b) = \infty$, so ist $v(a) = v(b) \neq \infty$.

Begründung von (1): Aus $w(a) \neq \infty$ und $w(b) = \infty$ folgt $w \in R_A(\frac{b}{a})$. Da v eine Generalisierung von w ist, haben wir auch $v \in R_A(\frac{b}{a})$, also $v(b) \geq v(a) \neq \infty$. Mit $v(a) \geq v(b)$ erhalten wir $v(a) = v(b) \neq \infty$.

Zunächst zeigen wir, daß $\operatorname{supp}(w)$ v-konvex ist. Seien $x, y \in A$ mit $y \in \operatorname{supp}(w)$ und $v(x) \geq v(y)$. Zu zeigen ist, daß $x \in \operatorname{supp}(w)$. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Wir haben dann

(2) $v(x) \geq v(y)$, $w(x) \neq \infty$, $w(y) = \infty$

Aus (1) und (2) folgt

(3) $v(x) = v(y) \neq \infty$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: $c\Gamma \neq (0)$.

Sei $a \in A$ mit $v(a) < 0$. Es gilt dann nach (2)

(4) $v(x) \geq v(ay)$, $w(x) \neq \infty$, $w(ay) = \infty$.

Aus (1) und (4) folgt $v(x) = v(ay)$ im Widerspruch zu (3).

2. Fall: Es sei $v(a) > 0$ für ein $a \in A \backslash \operatorname{supp}(w)$.

Aus (2) folgt dann

(5) $v(ax) \geq v(y)$, $w(ax) \neq \infty$, $w(y) = \infty$.

Aus (1) und (5) folgt $v(ax) = v(y)$ im Widerspruch zu (3).

Damit ist gezeigt, daß $\operatorname{supp}(w)$ ein v-konvexes Primideal ist. Sei u die Primärspezialisierung von v mit $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{supp}(w)$ (Proposition 1.1.13). Wir zeigen, daß w eine Sekundärspezialisierung von u ist. Nach Proposition (1.1.11) genügt es zu zeigen, daß w eine Spezialisierung von u ist. Seien $a, b \in A$ mit $w \in R_A(\frac{a}{b})$. Zu zeigen ist, daß $u \in R_A(\frac{a}{b})$. Da v eine Generalisierung von w ist, ist $v \in R_A(\frac{a}{b})$, also $v(a) \geq v(b)$. Es ist dann $u(a) \geq u(b)$, da u eine Primärspezialisierung von v ist. Da $w(b) \neq \infty$ und $\operatorname{supp}(u) = \operatorname{supp}(w)$, ist $u(b) \neq \infty$. Also $u \in R_A(\frac{a}{b})$.

Lemma 1.1.15. Sei w eine Primärspezialisierung von v.

i) Sei v' eine Sekundärspezialisierung von v. Es gibt genau eine Sekundärspezialisierung w' von w, so daß w' eine Primärspezialisierung von v' ist.

ii) Sei w' eine Sekundärspezialisierung von w. Es gibt eine Sekundärspezialisierung v' von v, so daß w' eine Primärspezialisierung von v' ist.

iii) Sei v' eine Sekundärgeneralisierung von v. Es gibt genau eine Sekundärgeneralisierung w' von w, so daß w' eine verallgemeinerte Primärspezialisierung von v' ist.

iv) Sei w' eine Sekundärgeneralisierung von w. Es gibt eine Sekundärgeneralisierung v' von v, so daß w' eine Primärspezialisierung von v' ist.

Beweis: i) Die Eindeutigkeit von w' folgt aus (1.1.11) und (1.1.12). Sei H' eine konvexe Untergruppe von $\Gamma_{v'}$ mit $v = v'/H'$. Sei L eine konvexe Untergruppe von $\Gamma_{v'}/H'$, so daß $w = v|L$. Sei L' die konvexe Untergruppe von $\Gamma_{v'}$ mit $H' \subseteq L'$ und $L = L'/H'$. Es ist dann $c\Gamma_{v'} \subseteq L'$. Wir setzen $w' = v'|L'$.
ii) Nach Bemerkung (1.1.9) gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $A(v)$, so daß $(\mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(w)), A(w)) \subseteq (A(v)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}, A(v)/\mathfrak{p})$ eine Erweiterung bewerteter Körper ist. Sei B ein Bewertungsring des Körpers $A(v)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, so daß $B \subseteq A(v)/\mathfrak{p}$ und $B \cap \mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(w)) = A(w')$. Sei v' die Bewertung von A, so daß $\mathrm{supp}\,(v') = \mathrm{supp}\,(v)$ und $A(v') = \lambda^{-1}(B)$, wobei $\lambda\colon A(v) \longrightarrow A(v)/\mathfrak{p}$ die kanonische Abbildung ist.
iii) Die Eindeutigkeit von w' folgt aus (1.1.11) und (1.1.12) und die Existenz von w' folgt aus (1.1.14).
iv) Sei H eine konvexe Untergruppe von Γ_v mit $w = v \mid H$ und sei L eine konvexe Untergruppe von H mit $w' = w/L$. Wir setzen $v' := v/L$. Die Gruppe H/L enthält die charakteristische Untergruppe von v'. Wir haben deshalb die Primärspezialisierung $(v/L) \mid (H/L)$ von v', die mit w' übereinstimmt.

Lemma 1.1.16. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{supp}\,(v)$. Es gibt eine Primärgeneralisierung w von v mit $\mathrm{supp}\,(w) = \mathfrak{p}$.

Beweis: Sei $(B, \mathfrak{m})$ ein Bewertungsring von $\mathrm{Quot}\,(A/\mathfrak{p})$, der den lokalen Ring $(A/\mathfrak{p})_{\mathrm{supp}\,(v)/\mathfrak{p}}$ dominiert. Sei C ein Bewertungsring von $B/\mathfrak{m}$ mit $C \cap \mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(v)) = A(v)$. Sei w die Bewertung von A mit $\mathrm{supp}\,(w) = \mathfrak{p}$ und $A(w) = \lambda^{-1}(C)$, wobei $\lambda\colon B \longrightarrow B/\mathfrak{m}$ die kanonische Abbildung ist.

Korollar 1.1.17. Jede Spezialisierung von v ist eine Primärspezialisierung einer Sekundärspezialisierung von v.

Beweis: Sei w eine Spezialisierung von v. Ist w eine Sekundärspezialisierung einer Primärspezialisierung von v, so folgt die Behauptung aus (1.1.15.ii). Es sei nun $c\Gamma = (0)$ und $\mathrm{supp}\,(v|c\Gamma) \subseteq \mathrm{supp}\,(w)$. Nach dem Lemma (1.1.16) gibt es eine Primärgeneralisierung w' von w mit $\mathrm{supp}\,(w') = \mathrm{supp}\,(v|c\Gamma)$. Es ist w' eine Sekundärspezialisierung von $v|c\Gamma$. Sei v' eine Bewertung von A, die eine Sekundärspezialisierung von v und eine Primärgeneralisierung von w' ist (1.1.15.ii). Es ist dann w eine Primärspezialisierung von v'.

Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Wir betrachten nun die Beziehungen zwischen den Spezialisierungen in $\mathrm{Spv}\,A$ und $\mathrm{Spv}\,B$, die durch die Abbildung $g :=$

$\operatorname{Spv}(f): \operatorname{Spv} B \longrightarrow \operatorname{Spv} A$ gegeben werden. Seien $v, w \in \operatorname{Spv} B$ gegeben. Ist w eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von v, so ist $g(w)$ eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von $g(v)$. Ist $\operatorname{Spec}(f): \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ eine offene Einbettung von Schemata, so gilt auch die Umkehrung, d.h. ist $g(w)$ eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von $g(v)$, so ist w eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von v.
g bildet die Menge der Sekundärspezialisierungen (bzw. Sekundärgeneralisierungen) von v surjektiv ab auf die Menge der Sekundärspezialisierungen (bzw. Sekundärgeneralisierungen) von $g(v)$. Um analoge Aussagen für Primärspezialisierungen (bzw. Primärgeneralisierungen) zu erhalten, benötigen wir entsprechende Voraussetzungen wie in der kommutativen Algebra. Dazu die folgenden beiden Sätze. Zuvor noch eine einfache Beobachtung.

Proposition 1.1.18. Sei w eine Primärspezialisierung von v. Sei M die Menge der Punkte von $\operatorname{Spv} B$, die Primärspezialisierungen von v und Primärgeneralisierungen von w sind. Sei L die Menge der Punkte von $\operatorname{Spv} A$, die Primärspezialisierungen von $g(v)$ und Primärgeneralisierungen von $g(w)$ sind. g bildet die Menge M surjektiv auf die Menge L ab.

Beweis: Sei H eine konvexe Untergruppe von Γ_v mit $w = v|H$. Wir haben $g(v) = v|A: A \longrightarrow (\Gamma_v)_\infty$ und $g(w) = w|A: A \longrightarrow H_\infty$. Sei x ein Element aus L. Es gibt eine konvexe Untergruppe T von Γ_v mit $H \subseteq T$ und $x = g(v)|T$. Für $y = v|T$ gilt $y \in M$ und $g(y) = x$.

Satz 1.1.19. Ist f flach, so bildet g die Menge der Primärgeneralisierungen von v surjektiv ab auf die Menge der Primärgeneralisierungen von $g(v)$.

Beweis: Sei t eine Primärgeneralisierung von $s := g(v)$ in $\operatorname{Spv} A$. Wir wollen zeigen, daß eine Primärgeneralisierung w von v in $\operatorname{Spv} B$ mit $g(w) = t$ existiert. Nach der Bemerkung (1.1.9) gibt es zwei Bewertungsringe A' und C mit $C \subseteq A'$ und $\operatorname{Quot}(C) = \operatorname{Quot}(A')$ und einen Ringhomomorphismus $h: A \longrightarrow A'$, so daß für die Punkte t' und s' von $\operatorname{Spv} A'$, die durch die Bewertungsringe C und $C/\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A') gegeben sind, gilt: $\operatorname{Spv}(h)(t') = t$ und $\operatorname{Spv}(h)(s') = s$. Aus $f: A \longrightarrow B$ erhalten wir durch Tensorieren mit A' den Ringhomomorphismus $f': A' \longrightarrow A' \otimes_A B := B'$. Sei v' eine Bewertung von B' mit $v'|B = v$ und $v'|A' = s'$. Es genügt zu zeigen, daß es eine Primärgeneralisierung w' von v' in $\operatorname{Spv} B'$ gibt mit $w'|A' = t'$. Da f' flach ist, gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von B' mit $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{supp}(v')$ und $f'^{-1}(\mathfrak{p}) = (0)$. Sei $(D, \mathfrak{m})$ ein Bewertungsring von $\operatorname{Quot}(B'/\mathfrak{p})$, der den lokalen Ring $(B'/\mathfrak{p})_{\operatorname{supp}(v')/\mathfrak{p}}$

dominiert. $D/\mathfrak{m}$ ist eine Körpererweiterung von $K := \operatorname{Quot}\left(B'/\operatorname{supp}(v')\right)$. Sei E ein Bewertungsring von $D/\mathfrak{m}$, der den Bewertungsring $B'(v')$ von K fortsetzt. Sei nun w' die Bewertung von B' mit $\operatorname{supp}(w') = \mathfrak{p}$ und $B'(w') = \lambda^{-1}(E)$, wobei $\lambda: D \longrightarrow D/\mathfrak{m}$ die kanonische Abbildung ist. Es ist dann w' eine Primärgeneralisierung von v' mit $w'|A' = t'$.

Satz 1.1.20. Sei f ganz. Dann gelten

i) In den Fasern von g gibt es keine echten Spezialisierungen.

ii) Die Menge der Primärspezialisierungen von v wird unter g bijektiv abgebildet auf die Menge der Primärspezialisierungen von $g(v)$.

iii) Ist f injektiv, so ist g surjektiv.

iv) Ist A integer und normal, B integer und f injektiv, so wird unter g die Menge der Primärgeneralisierungen von v surjektiv abgebildet auf die Menge der Primärgeneralisierungen von $g(v)$.

Beweis: Der Beweis von i) und iii) ist trivial. Wir beweisen ii). Sei $w := g(v) = v|A: A \longrightarrow (\Gamma_v)_\infty$. Da f ganz ist, gibt es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $v(b) \geq w(a)$. Deshalb stimmen die charakteristischen Untergruppen von v und w überein. Hieraus folgt ii).

Nun zum Beweis von iv). Sei w' eine Primärgeneralisierung von $v' := g(v)$. Zu zeigen ist die Existenz einer Primärgeneralisierung w von v mit $g(w) = w'$. Sei L eine algebraische Körpererweiterung von $\operatorname{Quot}(B)$, die normal über $\operatorname{Quot}(A)$ ist. Sei C der ganze Abschluß von A in L. Seien v'' und w'' Bewertungen von C mit $v''|B = v$ und $w''|A = w'$. Nach ii) gibt es eine Primärspezialisierung t von w'' in $\operatorname{Spv} C$ mit $t|A = v'$. Da $t|A = v''|A$, gibt es nach [B], V.2.3 Prop. 6 und [B], VI.8.6 Cor. 1 einen A-Automorphismus $h: C \longrightarrow C$ mit $\operatorname{Spv}(h)(t) = v''$. Wir setzen $w := \operatorname{Spv}(h)(w'')|B$. Es ist dann w eine Primärgeneralisierung von v mit $w|A = w'$.

Satz 1.1.21. Sei $f: A \longrightarrow B$ ein endlich präsentierter Ringhomomorphismus. Für jede konstruierbare Teilmenge Q von $\operatorname{Spv} B$ ist $\operatorname{Spv}(f)(Q)$ konstruierbar in $\operatorname{Spv} A$.

Beweis: Sei $B = A[T_1, \ldots, T_l]/(p_1, \ldots, p_s)$. Sei $h: A[T_1, \ldots, T_l] \longrightarrow B$ die Restklassenabbildung. Wir können annehmen, daß Q die Gestalt hat
$\{v \in \operatorname{Spv} B \mid v(h(a_1)) > v(h(b_1)), \ldots, v(h(a_n)) > v(h(b_n)),$
$v(h(c_1)) \geq v(h(d_1)), \ldots, v(h(c_m)) \geq v(h(d_m))\}$ mit $a_i, b_i, c_i, d_i \in A[T_1, \ldots, T_l]$.

Sei L die formale Sprache der Körper erweitert um ein zweistelliges Relationszeichen $|$. Einen bewerteten Körper (F, B) betrachten wir als Struktur dieser Sprache, indem wir $a|b$ setzen, wenn es ein $x \in B$ gibt mit $ax = b$. Wir betrachten die L-Formel $\phi = \exists\, X(\bar{p}_1(X) = \ldots = \bar{p}_s(X) = 0 \wedge \bar{d}_1(X)|\bar{c}_1(X) \wedge \ldots \wedge \bar{d}_m(X)|\bar{c}_m(X) \wedge \neg(\bar{a}_1(X)|\bar{b}_1(X)) \wedge \ldots \wedge \neg(\bar{a}_n(X)|\bar{b}_n(X)))$, wobei $X = (X_1, \ldots, X_l)$ und $\bar{p}_i$, $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$, $\bar{d}_i$ aus den Polynomen p_i, a_i, b_i, c_i, d_i dadurch entstehen, indem man die Koeffizienten durch Variablen der Sprache L ersetzt. Nach [Pr], 4.17 gibt es eine quantorenfreie L-Formel Σ, so daß $(F, B) \models \phi \longleftrightarrow \Sigma$ für jeden nichttrivial bewerteten algebraisch abgeschlossenen Körper (F, B).

Es gilt nun $\operatorname{Spv}(f)(Q) = \{v \in \operatorname{Spv} A|$ es gibt eine Erweiterung bewerteter Körper $(F, B)|\,(\operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v)), A(v))$, so daß F algebraisch abgeschlossen und $B \neq F$ und $(F, B) \models \phi'\} = \{v \in \operatorname{Spv} A|$ es gibt eine Erweiterung bewerteter Körper $(F, B)|\,(\operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v)), A(v))$, so daß F algebraisch abgeschlossen und $B \neq F$ und $(F, B) \models \Sigma'\} = \{v \in \operatorname{Spv} A|\,(\operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v)), A(v)) \models \Sigma'\}$, wobei ϕ' und Σ' aus ϕ und Σ entstehen, indem man die freien Variablen durch die entsprechenden Koeffizienten der Polynome p_i, a_i, b_i, c_i, d_i ersetzt. Die Menge $\{v \in \operatorname{Spv} A|\,(\operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v)), A(v)) \models \Sigma'\}$ ist konstruierbar.

1.2. Das Bewertungsspektrum eines Ringes von endlichem Typ über einem Körper

Seien k ein Körper und $\alpha: k \twoheadrightarrow \Gamma_\infty$ eine nichttriviale Bewertung. Für jede k-Algebra A setzen wir

$$\mathrm{Spv}\,(\alpha, A) = \{v \in \mathrm{Spv}\,A \mid v|k = \alpha\}.$$

Wir versehen $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ mit der Teilraumtopologie von $\mathrm{Spv}\,A$. Als Faser der spektralen Abbildung $\mathrm{Spv}\,A \longrightarrow \mathrm{Spv}\,k$ ist $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,A$. Es ist $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ konvex in $\mathrm{Spv}\,A$, d.h. hat man Spezialisierungen $x \succ y \succ z$ in $\mathrm{Spv}\,A$ mit $x, z \in \mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$, so ist auch $y \in \mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Da es in $\mathrm{Spv}\,k$ keine echten Primärgeneralisierungen bzw. Primärspezialisierungen gibt, ist $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ abgeschlossen gegenüber Primärgeneralisierungen und Primärspezialisierungen in $\mathrm{Spv}\,A$.

Sei K ein Erweiterungskörper von k und sei β eine Bewertung auf K, die α fortsetzt. Die kanonische Abbildung $A \longrightarrow A \otimes_k K$ induziert dann eine Abbildung $f: \mathrm{Spv}\,(\beta, A \otimes_k K) \longrightarrow \mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Ohne Beweis geben wir einige Eigenschaften dieser Abbildung an.

Proposition 1.2.1. i) f ist surjektiv und spektral.
ii) Ist K algebraisch über k, so ist f offen und abgeschlossen und die Bilder konstruierbarer Mengen sind konstruierbar.
iii) Ist (K, β) eine Henselisierung von (k, α), so ist f ein Homöomorphismus.

Sei nun A eine endlich erzeugte k-Algebra. Wir setzen

$$\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A) = \{v \in \mathrm{Spv}\,(\alpha, A) \mid \mathrm{supp}\,(v) \text{ ist ein maximales Ideal von } A\}.$$

Jeder Punkt aus $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ ist abgeschlossen in $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Aber im allgemeinen ist $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ eine echte Teilmenge der Menge der abgeschlossenen Punkte von $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Ist (k, α) henselsch, so gibt die Trägerabbildung $\mathrm{supp}: \mathrm{Spv}\,A \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$ eine Bijektion zwischen $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ und der Menge der abgeschlossenen Punkte von $\mathrm{Spec}\,A$.

Wir versehen $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ mit der Teilraumtopologie von $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Man kann diese Topologie auch folgendermaßen beschreiben. Sei zunächst k algebraisch abgeschlossen. Wir versehen k mit der Bewertungstopologie von α und alle k^n mit der Produkttopologie. Sei $A = k[T_1, \ldots, T_n]/I$. Dann ist die Topologie auf $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ gleich der Teilraumtopologie von k^n auf $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ bezüglich der Inklusion

$\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A) = (\operatorname{Spec} A)(k) \hookrightarrow k^n$. Sei nun k beliebig. Seien $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluß von k und $\bar{\alpha}$ eine Fortsetzung von α auf $\bar{k}$. Nach (i) und (ii) in (1.2.1) ist die kanonische Abbildung $g\colon \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\bar{\alpha},\ A\otimes_k\bar{k}) \longrightarrow \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ surjektiv und offen. Also ist die Topologie auf $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ die Quotiententopologie der Topologie auf $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\bar{\alpha},\ A\otimes_k\bar{k})$ bezüglich der Abbildung g.

Wir nennen eine Teilmenge P von $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ konstruierbar, wenn es eine konstruierbare Teilmenge Q des spektralen Raumes $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ gibt mit $Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A) = P$. (Diese Definition einer konstruierbaren Teilmenge von $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ stimmt nicht überein mit der üblichen Definition einer konstruierbaren Teilmenge des topologischen Raumes $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$.)

Satz 1.2.2. Durch $Q \longmapsto Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ erhält man eine Bijektion von der Menge der konstruierbaren Teilmengen von $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ auf die Menge der konstruierbaren Teilmengen von $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$.

Beweis: Sei Q eine nichtleere konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$. Wir zeigen, daß auch $Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ nichtleer ist. Sei $A = k[T_1, \ldots, T_l]/(p_1, \ldots, p_s)$ und sei v ein Element von Q. Wir benutzen hier die entsprechenden Bezeichnungen wie im Beweis von (1.1.21). Wir haben $\big(\operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v)), A(v)\big) \models \phi'$. Seien F ein algebraischer Abschluß von $\operatorname{Quot}\big(A/\operatorname{supp}(v)\big)$ und B ein Bewertungsring von F, der $A(v)$ fortsetzt. Sei $\bar{k}$ der algebraische Abschluß von k in F. Es gilt dann $(F, B) \models \phi'$ und damit auch $(\bar{k}, B \cap \bar{k}) \models \phi'$. Somit haben wir einen Ringhomomorphismus von A in den bewerteten Körper $(\bar{k}, B \cap \bar{k})$, so daß die dadurch definierte Bewertung von A in $Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ liegt.

Satz 1.2.3. i) Eine konstruierbare Teilmenge Q von $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ ist genau dann abgeschlossen gegenüber Primärgeneralisierungen, wenn $Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ offen ist in der Topologie von $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$.
ii) Eine konstruierbare Teilmenge Q von $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ ist genau dann abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen, wenn $Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ abgeschlossen ist in der Topologie von $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$.

Beweis: ii) folgt aus i) durch Übergang zum Komplement. Wir beweisen i). Sei eine konstruierbare Teilmenge Q von $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ gegeben.

Sei Q abgeschlossen gegenüber Primärgeneralisierungen. Wir zeigen, daß $Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ offen ist in der Topologie von $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$. Sei ein $w \in Q \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ gegeben. Sei u eine Generalisierung von w in $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$.

Da $\Gamma \subseteq c\Gamma_u$ und somit $c\Gamma_u \neq (0)$, gibt es nach (1.1.14) ein $v \in \operatorname{Spv} A$, so daß u eine Primärgeneralisierung von v und v eine Sekundärgeneralisierung von w ist. Mit $u, w \in \operatorname{Spv}(\alpha, A)$ ist auch $v \in \operatorname{Spv}(\alpha, A)$. Da $w \in \operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\alpha, A)$, ist dann $v = w$. Also ist jede Generalisierung von w in $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$ eine Primärgeneralisierung von w und damit in Q enthalten. Deshalb ist Q eine Umgebung von w in $\operatorname{Spv}(\alpha, A)$.

Sei nun $Q \cap \operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\alpha, A)$ offen in der Topologie von $\operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\alpha, A)$. Sei $w \in Q$ gegeben und sei v eine Primärgeneralisierung von w. Wir zeigen, daß $v \in Q$. Hierbei benutzen wir eine einfache Idee aus [D].

Es gibt eine Körpererweiterung K von k und eine Fortsetzung β von α auf K und ein $w' \in \operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$, so daß K algebraisch abgeschlossen ist und $f(w') = w$, wobei $f\colon \operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K) \longrightarrow \operatorname{Spv}(\alpha, A)$ die kanonische Abbildung ist. Seien $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluß von k und α eine Fortsetzung von α auf $\bar{k}$.
Sei $g\colon \operatorname{Spv}(\bar{\alpha}, A \otimes_k \bar{k}) \longrightarrow \operatorname{Spv}(\alpha, A)$ die kanonische Abbildung.
Sei $A = k[T_1, \ldots, T_l]/(p_1, \ldots, p_s)$. Wir identifizieren $\operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\bar{\alpha}, A \otimes_k \bar{k})$ mit dem Teilraum $\{x \in \bar{k}^l \,|\, p_1(x) = \ldots = p_s(x) = 0\}$ von $\bar{k}^l$ und $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$ mit dem Teilraum $\{x \in K^l | p_1(x) = \ldots = p_s(x) = 0\}$ von K^l. Dann lassen sich die Aussagen, daß $g^{-1}(Q) \cap \operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\bar{\alpha}, A \otimes_k \bar{k})$ offen ist in $\operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\bar{\alpha}, A \otimes_k \bar{k})$ und daß $f^{-1}(Q) \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$ offen ist in $\operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$, formulieren in der Sprache L der bewerteten Körper (siehe Beweis von (1.1.21)). Deshalb ist $f^{-1}(Q) \cap \operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$ offen in $\operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$.

Sei V eine offene konstruierbare Umgebung von w' in $\operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$
mit $V \cap \operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K) \subseteq f^{-1}(Q) \cap \operatorname{Max} \operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$. Nach (1.2.2) ist $V \subseteq f^{-1}(Q)$. Nach (1.1.19) gibt es eine Primärgeneralisierung v' von w' in $\operatorname{Spv} A \otimes_k K$ mit $v'|A = v$. Mit w' ist auch v' ein Element aus $\operatorname{Spv}(\beta, A \otimes_k K)$. Deshalb ist $v' \in V$ und somit $v \in Q$.

Zum besseren Verständnis des Bewertungsspektrums betrachten wir als Beispiel $\operatorname{Spv}\big(\alpha, k[T]\big)$ etwas genauer, wobei $k[T]$ der Polynomring ein einer Variablen über k ist. Wir geben keine Beweise an, da die Ergebnisse im folgenden nicht wesentlich benötigt werden. Wir setzen k als algebraisch abgeschlossen voraus. (Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so betrachte man $\operatorname{Spv}\big(\bar{\alpha}, \bar{k}[T]\big)$ und benutze (1.2.1).)

Für beliebige $a, b \in k$ setzen wir

$$X(a;b) = R_{k[T]}\left(\frac{T-a}{b}\right) \cap \operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$$

$$Y(a;b) = \operatorname{Spv}(\alpha, k[T]) \setminus R_{k[T]}\left(\frac{b}{T-a}\right)$$

Die $X(a;b)$ heißen die offenen Kreise von Spv $(\alpha,\ k[T])$ und die $Y(a;b)$ heißen die abgeschlossenen Kreise von Spv $(\alpha,\ k[T])$. Die offenen Kreise sind offene konstruierbare Teilmengen von Spv $(\alpha,\ k[T])$ und die abgeschlossenen Kreise sind abgeschlossene konstruierbare Teilmengen von Spv $(\alpha, k[T])$.

Jeder nichtleere offene Kreis ist nicht abgeschlossen in Spv $(\alpha,\ k[T])$ und jeder abgeschlossene Kreis ist nicht offen in Spv $(\alpha,\ k[T])$. Dies liegt jeweils nur an einer einzigen Spezialisierung, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 1.2.4. i) Sei Z ein nichtleerer offener Kreis. Es gibt dann eindeutig bestimmte Punkte x, y von Spv $(\alpha,\ k[T])$, so daß $x \in Z$, $y \in$ Spv $(\alpha,\ k[T])\backslash Z$ und $x \succ y$. Die Spezialisierung $x \succ y$ ist eine Sekundärspezialisierung.
ii) Sei Z ein abgeschlossener Kreis. Es gibt dann eindeutig bestimmte Punkte x, y von Spv $(\alpha, k[T])$, so daß $x \in Z$, $y \in$ Spv $(\alpha,\ k[T])\backslash Z$ und $y \succ x$. Die Spezialisierung $y \succ x$ ist eine Primärspezialisierung, wenn Z einpunktig ist, sonst eine Sekundärspezialisierung.

Die Spezialisierungen aus (1.2.4) kann man explizit angeben. Seien a, b Elemente aus k mit $b \neq 0$. Sei P die eindeutige Gruppenanordnung von $\Gamma \oplus \mathbb{Z}$, die die Anordnung von Γ fortsetzt (wir betrachten Γ durch $\Gamma = \Gamma \oplus 0$ als Teilmenge von $\Gamma \oplus \mathbb{Z}$) und so daß $\gamma = \gamma \oplus 0 < 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \alpha(b)$ und $\gamma = \gamma \oplus 0 > 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \geq \alpha(b)$. Sei Q die eindeutige Gruppenanordnung auf $\Gamma \oplus \mathbb{Z}$, die die Anordnung von Γ fortsetzt und so daß $\gamma < 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \leq \alpha(b)$ und $\gamma > 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma > \alpha(b)$. Seien Γ' und Γ'' die angeordneten Gruppen $(\Gamma \oplus \mathbb{Z}, P)$ und $(\Gamma \oplus \mathbb{Z}, Q)$. Wir erhalten nun Bewertungen $u\colon k[T] \longrightarrow \Gamma_\infty$, $v\colon k[T] \longrightarrow \Gamma'_\infty$, $w\colon k[T] \longrightarrow \Gamma''_\infty$, indem wir für ein Polynom $p = a_0 + a_1(T-a) + \ldots + a_n(T-a)^n$ setzen

$$\begin{aligned}
u(p) &= \min\{\alpha(a_i) + i \cdot \alpha(b) \mid i = 0, \ldots, n\}\\
v(p) &= \min\{\alpha(a_i) + i \cdot (0 \oplus 1) \mid i = 0, \ldots, n\}\\
w(p) &= \min\{\alpha(a_i) + i \cdot (0 \oplus 1) \mid i = 0, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

v und w sind Sekundärspezialisierungen von u.

Wir betrachten nun den offenen Kreis $X(a;b)$. Es ist $u \in X(a;b)$ und $v \in$ Spv $(\alpha, k[T])\backslash X(a;b)$. Für den abgeschlossenen Kreis $Y(a;b)$ haben wir $w \in Y(a;b)$ und $u \in$ Spv $(\alpha, k[T]) \setminus Y(a;b)$.

Es bleibt noch zu betrachten der einpunktige abgeschlossene Kreis $Y(a;0)$. Sei R die eindeutig bestimmte Gruppenanordnung auf $\Gamma \oplus \mathbb{Z}$, die die Anordnung von Γ fortsetzt und so daß $\gamma < 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$. Wir erhalten dann wieder eine Bewertung $u_d: k[T] \longrightarrow (\Gamma \oplus \mathbb{Z}, R)_\infty$, $a_0 + a_1(T-a) + \ldots + a_n(T-a)^n \longmapsto \min\{\alpha(a_i) + i \cdot (0 \oplus 1) \mid i = 0, \ldots, n\}$. Es ist u_d eine Primärgeneralisierung des Punktes w_d von $Y(a;0)$.

Bemerkung. Ähnlich wie wir hier die Bewertungen u, v, w mit den Kreisen $X(a;b)$ und $Y(a;b)$ in Verbindung gebracht haben, kann man jede Bewertung von $k[T]$, die α fortsetzt, in der „Kreis-Geometrie" von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ interpretieren.

Satz 1.2.5. Die boolesche Algebra der konstruierbaren Teilmengen von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ wird erzeugt von den offenen Kreisen und den abgeschlossenen Kreisen.

Ein gelochter Kreis von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ ist eine Menge der Form $Z_0 \backslash (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n)$, wobei jedes Z_i ein offener oder abgeschlossener Kreis von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ oder ganz $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ ist.

Die Bezeichnung gelochter Kreise ist motiviert durch das folgende Lemma.

Lemma 1.2.6. Jeder nichtleere gelochte Kreis Z von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ hat eine eindeutige Darstellung $Z = Z_0 \backslash (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n)$, wobei Z_i ein offener oder abgeschlossener Kreis von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ oder ganz $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ ist für $i \in \{0, \ldots, n\}$ und $\emptyset \neq Z_i \subsetneq Z_0$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Lemma 1.2.7. Jede konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ ist eine endliche Vereinigung gelochter Kreise.

Satz 1.2.8. Eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein gelochter Kreis ist.

Korollar 1.2.9. Jede konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Satz 1.2.10. Sei Z ein nichtleerer gelochter Kreis und sei $Z = Z_0 \backslash (Z_1 \cup \ldots \cup Z_n)$ die Darstellung von Z aus Lemma (1.2.6).
i) Z ist genau dann offen in $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$, wenn Z_0 ein offener Kreis oder $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ ist und $Z_1, \ldots, Z_n$ abgeschlossene Kreise sind.
ii) Z ist genau dann abgeschlossen in $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$, wenn Z_0 ein abgeschlossener Kreis oder $\operatorname{Spv}(\alpha, k[T])$ ist und $Z_1, \ldots, Z_n$ offene Kreise sind.

1.3. Konstruktion einiger spektraler Teilmengen des Bewertungsspektrums

In diesem Abschnitt konstruieren wir einige Teilmengen des Bewertungsspektrums, die (versehen mit der Teilraumtopologie) spektrale Räume sind, die aber im allgemeinen keine prokonstruierbare Teilmengen sind. In dem folgenden Lemma beschreiben wir das Konstruktionsprinzip allgemein.

Sei X ein topologischer Raum. Unter einer Spezialisierung von X verstehen wir ein Paar (x, y) von Punkten von X, so daß y eine Spezialisierung von x ist. Im folgenden betrachten wir einen topologischen Raum X zusammen mit einer Menge F von Spezialisierungen von X. Die Elemente von F nennen wir die zulässigen Spezialisierungen von X. Ein Punkt y von X heißt eine zulässige Spezialisierung eines Punktes x von X, wenn $(x, y) \in F$.

Lemma 1.3.1. Sei X ein spektraler Raum. Es sei eine Menge von zulässigen Spezialisierungen von X gegeben. Wir setzen

$$Y = \{x \in X \mid x \text{ hat keine echte zulässige Spezialsierung }\}.$$

Es gelte

(S1) Jedes $x \in Y$ hat ein Fundamentalsystem von offenen konstruierbaren Umgebungen in X, die abgeschlossen sind gegenüber zulässigen Spezialisierungen.

(S2) Jedes $x \in X$ hat eine zulässige Spezialisierung, die in Y liegt.

(N.B. Hat ein $x \in X$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen, die abgeschlossen sind gegenüber zulässigen Spezialisierungen, so ist $x \in Y$). Dann gilt

i) Zu jedem $x \in X$ gibt es genau eine zulässige Spezialisierung y mit $y \in Y$. Dieses y bezeichnen wir mit $r(x)$. Wir haben also eine Retraktion $r: X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto r(x)$.

ii) Y (versehen mit der Teilraumtopologie von X) ist ein spektraler Raum und r ist eine spektrale Abbildung. Also ist eine Teilmenge T von Y genau dann konstruierbar (bzw. prokonstruierbar, bzw. offen, bzw. abgeschlossen), wenn $r^{-1}(T)$ konstruierbar (bzw. prokonstruierbar, bzw. offen, bzw. abgeschlossen) ist.

iii) Wie bei jeder Retraktion gibt $T \longmapsto r^{-1}(T)$ eine Bijektion von der Menge der Teilmengen von Y auf die Menge der Teilmengen M von X, für die gilt

$$(1) \qquad \forall x \in X: x \in M \iff r(x) \in M$$

Die Umkehrabbildung ist $M \longmapsto M \cap Y$. Gilt neben (S1) und (S2) auch noch

(S3) Für jedes $x \in X$ sind je zwei zulässige Spezialisierungen von x vergleichbar (d.h. sind y und z zulässige Spezialisierungen von x, so ist y eine zulässige Spezialisierung von z oder z eine zulässige Spezialisierung von y),

so erfüllt eine Teilmenge M von X genau dann (1), wenn M abgeschlossen ist gegenüber zulässigen Spezialisierungen und zulässigen Generalisierungen.

Beweis: Sei $x \in X$ gegeben. Angenommen, x habe zwei verschiedene zulässige Spezialisierungen u und v, die beide in Y liegen. Da X ein T_0-Raum ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß es eine offene Teilmenge U von X gibt mit $u \in U$ und $v \notin U$. Jede Umgebung V von u mit $V \subseteq U$ enthält x, enthält aber nicht die zulässige Spezialisierung v von x. Dies ist ein Widerspruch zu (S1).

Wir zeigen nun, daß Y ein spektraler Raum und r eine spektrale Abbildung ist. Sei P die Menge aller offenen Teilmengen T von Y, so daß $r^{-1}(T)$ offen und konstruierbar in X ist. Sei Q die Menge aller Teilmengen T von Y, so daß $r^{-1}(T)$ konstruierbar in X ist. Für jede offene Teilmenge U von X, die abgeschlossen gegenüber zulässigen Spezialisierungen ist, gilt (1). Daher $U = r^{-1}(U \cap Y)$ und somit $U \cap Y \in P$ für jede offene konstruierbare Teilmenge U von X, die abgeschlossen gegenüber zulässigen Spezialisierungen ist. Nach (S1) folgt daher

(2) P ist eine Basis für die Topologie von Y.

Sei $\mathcal{T}$ die Topologie von Y, die Q als Basis hat. Jedes Element aus Q ist offen und abgeschlossen in der Topologie $\mathcal{T}$. In der Topologie $\mathcal{T}$ ist Y quasikompakt. Nun folgt aus (1.1.8) und (2), daß Y ein spektraler Raum und r eine spektrale Abbildung ist.

Es gelte nun noch zusätzlich (S3). Sei M eine Teilmenge von X, die (1) erfüllt, und sei $x \in M$.

Sei y eine zulässige Generalisierung von x. Zu zeigen ist, daß $y \in M$. Es ist $r(y)$ eine zulässige Spezialisierung von x oder x eine zulässige Spezialisierung von $r(y)$. Ist $r(y)$ eine zulässige Spezialisierung von x, so ist $r(x) = r(y)$, da $r(y) \in Y$ und $r(x)$ die einzige zulässige Spezialisierung von x ist, die in Y liegt. Aus (1) und $r(x) = r(y)$ folgt $y \in M$. Ist x eine zulässige Spezialisierung von $r(y)$, so ist $r(y) = x \in M$, da $r(y) \in Y$. Mit $r(y)$ ist auch y ein Element von M.

Sei nun y eine zulässige Spezialisierung von x. Wir zeigen, daß $y \in M$. Es ist $r(x)$ eine zulässige Spezialisierung von y oder y eine zulässige Spezialisierung von $r(x)$. Ist $r(x)$ eine zulässige Spezialisierung von y, so ist $r(x) = r(y)$, da $r(x) \in Y$ und $r(y)$ die einzige zulässige Spezialisierung von y ist, die in Y liegt. Aus $r(x) = r(y)$ folgt $y \in M$. Ist y eine zulässige Spezialisierung von $r(x)$, so ist $y = r(x) \in M$, da $r(x) \in Y$.

Neben den Eigenschaften (S1), (S2), (S3) betrachten wir auch noch die folgende Eigenschaft zulässiger Spezialisierungen

(S4) Ist v eine zulässige Spezialisierung von u und w eine zulässige Spezialisierung von v, so ist w eine zulässige Spezialisierung von u.

Sei A ein Ring. Im folgenden betrachten wir einige Mengen zulässiger Spezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$. Alle zulässigen Spezialisierungen werden Primärspezialisierungen sein und die folgende Eigenschaft erfüllen.

(S5) Ist w eine zulässige Spezialisierung von v und ist u ein Element von $\operatorname{Spv} A$, das eine Primärspezialisierung von v und eine Primärgeneralisierung von w ist, so ist w eine zulässige Spezialisierung von u.

Lemma (1.3.1) bleibt zum Teil richtig, wenn man (S2) durch (S5) ersetzt. Wir formulieren dies in dem folgenden Lemma.

Lemma 1.3.2. Es sei eine Menge von zulässigen Spezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$ gegeben. Jede zulässige Spezialisierung sei eine Primärspezialisierung und es gelte (S1) und (S5). Dann ist $\{v \in \operatorname{Spv} A | \, v$ hat keine echte zulässige Spezialisierung$\}$ (versehen mit der Teilraumtopologie von $\operatorname{Spv} A$) ein spektraler Raum.

Man beachte, daß unter den Voraussetzungen von Lemma (1.3.2) (S2) im allgemeinen nicht gilt. Wir geben hier keinen Beweis von Lemma (1.3.2). (Wir werden (1.3.2) nur einmal in der Bemerkung nach Satz (1.3.20) benutzen.)

Für spätere Anwendungen ist es wichtig zu wissen, unter welchen Bedingungen man die zulässigen Spezialisierungen gerade als die Spezialisierungen einer geeigneten spektralen Topologie interpretieren kann. Dazu die folgenden beiden Punkte (1.3.3) und (1.3.4).

Lemma 1.3.3. Es gibt genau eine Topologie $\mathcal{P}$ auf $\operatorname{Spv} A$, so daß $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{P})$ ein spektraler Raum ist, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie $\operatorname{Spv} A$ hat und dessen Spezialisierungen gerade die Primärspezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$ sind. Die Topologie $\mathcal{P}$ wird von den Mengen $\{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(a) \geq v(b) \neq \infty\}$ und $\{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(a) > v(b)\} (a, b \in A)$ erzeugt.

Beweis: Sei $\mathcal{P}$ die Topologie auf $\operatorname{Spv} A$, die von den Teilmengen $\{v \in \operatorname{Spv} A | \, v(a) \geq v(b) \neq \infty\}$ und $\{v \in \operatorname{Spv} A | \, v(a) > v(b)\}$ $(a, b \in A)$ erzeugt wird. Nach (1.1.7) und (1.1.8) ist $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{P})$ ein spektraler Raum, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie $\operatorname{Spv} A$ hat. Man sieht sofort, daß die Primärspezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$ auch Spezialisierungen in der Topologie $\mathcal{P}$ sind.

Sei w eine Spezialisierung von v in der Topologie $\mathcal{P}$. Zu zeigen ist, daß w eine Primärspezialisierung von v ist. Wir unterscheiden zwei Fälle. Sei zunächst w eine Sekundärspezialisierung einer Primärspezialisierung w' von v. Angenommen, es sei $w' \neq w$. Dann ist $A(w) \subsetneqq A(w')$ und somit $\mathfrak{m}' \subsetneqq \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ die maximalen Ideale von $A(w), A(w')$ sind. Deshalb gibt es $a, b \in A$ mit $w(a) > w(b)$ und $w'(a) = w'(b) \neq \infty$. Da v eine Primärgeneralisierung von w' ist, gilt dann auch $v(a) = v(b) \neq \infty$. Daher gibt es ein $U \in \mathcal{P}$ mit $w \in U$ und $v \notin U$, Widerspruch. Also ist $w' = w$ und damit w eine Primärspezialisierung von v.

Sei nun $c\Gamma_v = (0)$ und $\operatorname{supp}(v|c\Gamma_v) \underset{\neq}{\subset} \operatorname{supp}(w)$. Sei a ein Element aus $\operatorname{supp}(w) \setminus \operatorname{supp}(v|c\Gamma_v)$ und sei $b = 1$. Dann ist $w(a) > w(b)$ und $(v|c\Gamma_v)(a) \neq \infty$, also $v(a) = 0 = v(b)$. Deshalb gibt es ein $U \in \mathcal{P}$ mit $w \in U$ und $v \notin U$, Widerspruch.

Bemerkung. Lemma (1.3.3) bleibt richtig, wenn man anstelle der Primärspezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$ die Sekundärspezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$ nimmt.

Korollar 1.3.4. In $\operatorname{Spv} A$ seien zulässige Spezialisierungen ausgezeichnet. Es sind äquivalent

i) Es gibt eine Menge $\mathcal{L}$ von konstruierbarenTeilmengen von $\operatorname{Spv} A$, so daß eine Bewertung w von A genau dann eine zulässige Spezialisierung einer Bewertung v von A ist, wenn gilt
   a) w ist eine Primärspezialisierung von v.
   b) Für jedes $Q \in \mathcal{L}$ gilt: Ist $v \in Q$, so ist $w \in Q$.

ii) Es gibt (genau) eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $\operatorname{Spv} A$, so daß $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{P}$ ist und $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T})$ ein spektraler Raum ist, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie $\operatorname{Spv} A$ hat und dessen Spezialisierungen gerade die zulässigen Spezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$ sind.

Beweis: i) $\Longrightarrow$ ii): Sei $\mathcal{T}$ die Topologie von $\operatorname{Spv} A$, die von $\mathcal{P} \cup \{\operatorname{Spv} A \setminus Q \mid Q \in \mathcal{L}\}$ erzeugt wird. Nach (1.1.7) und (1.1.8) ist $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T})$ ein spektraler Raum, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie $\operatorname{Spv} A$ hat. Die Spezialisierungen von $(\operatorname{Spv} A, \mathcal{T})$ sind die zulässigen Spezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$.
ii) $\Longrightarrow$ i): Setze $\mathcal{L} = \{\operatorname{Spv} A \setminus U \mid U \in \mathcal{T}$ und U konstruierbar$\}$.

Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von A. Seien v und w Bewertungen von A. Wir nennen w eine I-zulässige Spezialisierung von v, wenn gilt

a) Ist $v(I) \neq \{\infty\}$, so ist w eine Primärspezialisierung von v mit $w(I) \neq \{\infty\}$.
b) Ist $v(I) = \{\infty\}$, so ist $v = w$.

Sei $T = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(I) = \{\infty\}\}$. Für die I-zulässigen Spezialisierungen gilt (1.3.4.i) mit $\mathcal{L} = \{\operatorname{Spv} A \setminus T\} \cup \{Q \mid Q$ konstruierbar und $Q \subseteq T\}$. Also erfüllen die I-zulässigen Spezialisierungen (S2) und (S4). (Natürlich gelten auch (S3) und (S5).)

Bemerkung. Sei v eine Bewertung von A, so daß $v(I) \neq \{\infty\}$ und $v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset$. Dann gibt es eine kleinste konvexe Untergruppe U von Γ_v mit $v(I) \cap U \neq \emptyset$. Für jedes $i \in I$ ist entweder $v(i) > U$ oder $v(i)$ kofinal in U.

Beweis: Sei $s_1, \ldots, s_n$ ein Erzeugendensystem von I. Wegen $v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset$ und $v(I) \neq \{\infty\}$, ist $v(s_k) > 0$ für $k = 1, \ldots, n$ und $v(s_k) \neq \infty$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Sei U die von $\min\{v(s_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ erzeugte konvexe Untergruppe von Γ_v. Es ist $v(I) \cap U \neq \emptyset$. Sei T eine konvexe Untergruppe von Γ_v mit $v(I) \cap T \neq \emptyset$. Wir zeigen $U \subseteq T$.

Da $v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset$, ist $c\Gamma_v \subseteq T$. Wir wählen ein $i \in I$ mit $v(i) \in T$ und schreiben $i = a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in A$. Wegen $c\Gamma_v \subseteq T$ und $v(i) \geq \min\{v(a_k) + v(s_k) \mid k = 1, \ldots, n\}$, gibt es ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $v(s_k) \in T$. Es ist dann auch $\min\{v(s_i) \mid i = 1, \ldots, n\} \in T$ und somit $U \subseteq T$.

Sei ein $s_0 \in I$ gegeben. Es ist dann $s_0, s_1, \ldots, s_n$ ein Erzeugendensystem von I. Wie wir wissen, ist $\gamma := \min\{v(s_k) \mid k = 0, \ldots, n\} > 0$ und U die von γ erzeugte konvexe Untergruppe von Γ_v. Also ist entweder $v(s_0) > U$ oder $v(s_0)$ kofinal in U.

Mit dieser Bemerkung können wir nun für jede Bewertung v von A definieren

$$c\Gamma_v(I) = \begin{cases} \Gamma_v & \text{wenn } v(I) = \{\infty\} \\ c\Gamma_v & \text{wenn } v(I) \cap c\Gamma_v \neq \emptyset \\ \text{kleinste konvexe Untergruppe } U & \text{wenn } v(I) \neq \{\infty\} \text{ und} \\ \text{von } \Gamma_v \text{ mit } v(I) \cap U \neq \emptyset & v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset \end{cases}$$

Lemma 1.3.5. Für jede Bewertung v von A sind äquivalent

a) $\Gamma_v = c\Gamma_v(I)$.
b) $\Gamma_v = c\Gamma_v$ oder $v(i)$ ist kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ für jedes $i \in I$.
c) $\Gamma_v = c\Gamma_v$ oder $v(i)$ ist kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ für jedes Element i eines Erzeugendensystems von I.

Beweis: Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt unmittelbar aus der Definition von $c\Gamma_v(I)$ und der obigen Bemerkung. Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus der Tatsache, daß $\{a \in A \mid v(a) \text{ ist kofinal in } (\Gamma_v)_\infty\}$ ein Ideal von A ist, wenn $\Gamma_v \neq c\Gamma_v$.

Lemma 1.3.6. Seien v und w Bewertungen von A.

i) w ist genau dann eine I-zulässige Spezialisierung von v, wenn es eine konvexe Untergruppe H von Γ_v gibt mit $c\Gamma_v(I) \subseteq H$ und $w = v|H$.

ii) v hat genau dann keine echte I-zulässige Spezialisierung, wenn $\Gamma_v = c\Gamma_v(I)$.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus der Defintion von $c\Gamma_v(I)$ und (ii) folgt direkt aus (i).

Lemma 1.3.7. Seien $f_0, f_1, \ldots, f_n \in A$ mit $I \subseteq \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$. Dann ist $R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$ abgeschlossen gegenüber I-zulässigen Spezialisierungen.

Beweis: Sei v ein Element von $R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$ und sei w eine I-zulässige Spezialisierung von v. Zu zeigen ist $w \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$. Ist $v(I) = \{\infty\}$, so ist $v = w$ und nichts ist zu beweisen. Sei nun $v(I) \neq \{\infty\}$. Dann ist $w(I) \neq \{\infty\}$. Aus $v(f_i) \geq v(f_0)$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt $w(f_i) \geq w(f_0)$ für $i = 1, \ldots, n$, da w eine Primärspezialisierung von v ist. Angenommen, es sei $w(f_0) = \infty$. Dann ist $w(f_i) = \infty$ für $i = 0, \ldots, n$, woraus sich ergibt $w(\sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}) = \{\infty\}$ und somit $w(I) = \{\infty\}$, Widerspruch.

Lemma 1.3.8. Sei v eine Bewertung von A mit $\Gamma_v = c\Gamma_v(I)$. Zu jeder Umgebung U von v in $\operatorname{Spv} A$ gibt es $f_0, \ldots, f_n \in A$, so daß $v \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}) \subseteq U$ und $I \subseteq \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$.

Beweis: Wir wählen $g_0, g_1, \ldots, g_m \in A$ mit $v \in R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$. Sei $s_1, \ldots, s_n$ ein Erzeugendensystem von I. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $\Gamma_v = c\Gamma_v$.
Da $v(g_0) \neq \infty$, gibt es ein $d \in A$ mit $0 \geq v(g_0) + v(d) = v(g_0 d)$. Dann ist $v \in R_A(\frac{g_1 d}{g_0 d}, \ldots, \frac{g_m d}{g_0 d}, \frac{1}{g_0 d}) \subseteq R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$ und $I \subseteq (g_0 d, \ldots, g_m d, 1)$.

2. Fall: $\Gamma_v \neq c\Gamma_v$.
Da $v(g_0) \neq \infty$, gibt es nach (1.3.5) ein $k \in \mathbb{N}$ mit $v(s_i^k) \geq v(g_0)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $v \in R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}, \frac{s_1^k}{g_0}, \ldots, \frac{s_n^k}{g_0}) \subseteq R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$ und $I \subseteq \sqrt{(g_0, g_1, \ldots, g_m, s_1^k, \ldots, s_n^k)}$.

Definition 1.3.9. Wir versehen die Menge $\{v \in \operatorname{Spv} A | \, \Gamma_v = c\Gamma_v(I)\}$ mit der Teilraumtopologie von $\operatorname{Spv} A$. Dieser topologische Raum wird mit $\operatorname{Spv}(A, I)$ bezeichnet. Die Teilmengen

$$\operatorname{Spv}(A, I) \cap R_A\Big(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}\Big),$$
$$\text{wobei} \quad f_0, \ldots, f_n \in A \quad \text{mit} \quad I \subseteq \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$$

heißen die rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spv}(A, I)$.

Satz 1.3.10. i) Der topologische Raum $\mathrm{Spv}\,(A,I)$ ist spektral und die Retraktion $r_I\colon \mathrm{Spv}\,A \longrightarrow \mathrm{Spv}\,(A,I)$, $v \longmapsto v|c\Gamma_v(I)$ ist eine spektrale Abbildung.
ii) Die rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spv}\,(A,I)$ sind konstruierbar. Der Durchschnitt zweier rationaler Teilmengen von $\mathrm{Spv}\,(A,I)$ ist wieder rational. Die rationalen Teilmengen bilden eine Basis für die Topologie von $\mathrm{Spv}\,(A,I)$.

Beweis: Aus (1.1.2.ii) folgt, daß der Durchschnitt zweier rationaler Teilmengen von $\mathrm{Spv}\,(A,I)$ wieder rational ist. Die restlichen Behauptungen folgen mit (1.3.6), (1.3.7) und (1.3.8) aus (1.3.1).

Wir haben zwei Extremfälle, nämlich $I = (0)$ und $I = A$. Die einzige (0)-zulässige Spezialisierung von v ist v selbst. Es ist $c\Gamma_v(0) = \Gamma_v$ für jedes v. Deshalb ist $\mathrm{Spv}\,\big(A,(0)\big) = \mathrm{Spv}\,A$. Die Definition (1.3.9) einer rationalen Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,\big(A,(0)\big)$ stimmt überein mit der Definition einer rationalen Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,A$ in (1.1).
Wir betrachten nun den Fall $I = A$. Die A-zulässigen Spezialisierungen einer Bewertung v sind die Primärspezialisierungen von v. Es ist $c\Gamma_v(A) = c\Gamma_v$ für jedes v, also $\mathrm{Spv}\,(A,A) = \{v \in \mathrm{Spv}\,A \,|\, \Gamma_v = c\Gamma_v\}$. Mit (1.1.3.ii) erhalten wir, daß die rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spv}\,(A,A)$ gerade die Mengen der Form $\big\{v \in \mathrm{Spv}\,(A,A) \,|\, v(f_1) \geq v(f_0), \ldots, v(f_n) \geq v(f_0)\big\}$ sind, wobei $f_0, \ldots, f_n \in A$ mit $(f_0, \ldots, f_n) = A$. (Also entspricht die Definition der rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spv}\,(A,A)$ genau der Definition der rationalen Teilmengen in der rigid analytischen Geometrie.)

Bemerkung 1.3.11. Seien I und J endlich erzeugte Ideale von A. Es gilt

i) Ist $I \subseteq \sqrt{J}$, so ist $\mathrm{Spv}\,(A,J) \subseteq \mathrm{Spv}\,(A,I)$. Also ist $\mathrm{Spv}\,(A,I) = \mathrm{Spv}\,(A,J)$, wenn $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, und $\mathrm{Spv}\,(A,A) \subseteq \mathrm{Spv}\,(A,I)$ für jedes endlich erzeugte Ideal I.
ii) $\mathrm{Spv}\,(A, I \cap J) = \mathrm{Spv}\,(A,I) \cup \mathrm{Spv}\,(A,J)$
iii) $\mathrm{Spv}\,(A, I + J) = \mathrm{Spv}\,(A,I) \cap \mathrm{Spv}\,(A,J)$

Seien I und J endlich erzeugte Ideale von A mit $J \subseteq \sqrt{I}$. Die Inklusion $\mathrm{Spv}\,(A,I) \longrightarrow \mathrm{Spv}\,(A,J)$ ist im allgemeinen nicht spektral (schon die Inklusion $\mathrm{Spv}\,(A,I) \longrightarrow \mathrm{Spv}\,\big(A,(0)\big) = \mathrm{Spv}\,A$ ist im allgemeinen nicht spektral). Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Retraktion $r_{J|I}\colon \mathrm{Spv}\,(A,J) \longrightarrow \mathrm{Spv}\,(A,I)$, so daß kommutiert

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} & & \mathrm{Spv}\,(A,J) \\ & {\scriptstyle r_J}\nearrow & \\ \mathrm{Spv}\,A & & \downarrow {\scriptstyle r_{J|I}} \\ & {\scriptstyle r_I}\searrow & \\ & & \mathrm{Spv}\,(A,I) \end{array} \quad .$$

Da r_J und r_I identifizierend und spektral sind, ist $r_{J|I}$ spektral.

Seien A, B Ringe mit endlich erzeugten Idealen I, J und sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Es gilt

Lemma 1.3.12. Ist $J \subseteq \sqrt{I \cdot B}$, so ist $r_I(v|A) = r_I(r_J(v)|A)$ für jedes $v \in \operatorname{Spv} B$.

Wir definieren eine Abbildung $\operatorname{Spv}(f, I, J)\colon \operatorname{Spv}(B, J) \longrightarrow \operatorname{Spv}(A, I)$ durch $v \longmapsto r_I(v|A)$. Sei C ein weiterer Ring mit endlich erzeugtem Ideal K und Ringhomomorphismus $g\colon B \longrightarrow C$.

Proposition 1.3.13. Es gilt
i) $\operatorname{Spv}(f, I, J)$ ist stetig.
ii) Ist $J \subseteq \sqrt{I \cdot B}$, so ist $\operatorname{Spv}(f, I, J)$ spektral.
iii) Ist $J \subseteq \sqrt{I \cdot B}$, so ist $\operatorname{Spv}(f, I, J) \circ \operatorname{Spv}(g, J, K) = \operatorname{Spv}(g \circ f, I, K)$.

Beweis: i) ist klar. Wir beweisen ii). Sei Q eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(A, I)$. Dann ist $\operatorname{Spv}(f)^{-1}\left(r_I^{-1}(Q)\right)$ konstruierbar in $\operatorname{Spv} B$. Nach (1.3.12) gilt $r_J^{-1}\left(\operatorname{Spv}(f, I, J)^{-1}(Q)\right) = \operatorname{Spv}(f)^{-1}\left(r_I^{-1}(Q)\right)$. Also ist $\operatorname{Spv}(f, I, J)^{-1}(Q)$ konstruierbar in $\operatorname{Spv}(B, J)$. iii) folgt unmittelbar aus (1.3.12).

Als Beispiel betrachten wir wieder einen Ring A mit zwei endlich erzeugten Idealen I und J, so daß $J \subseteq \sqrt{I}$. Die Inklusion $\operatorname{Spv}(A, I) \subseteq \operatorname{Spv}(A, J)$ ist die Abbildung $\operatorname{Spv}(\mathrm{id}, J, I)$, die Retraktion $r_{J|I}$ ist die Abbildung $\operatorname{Spv}(\mathrm{id}, I, J)$ und das kommutative Dreieck (3) entspricht (1.3.13.iii).

1.3.14. Einige Beispiele prokonstruierbarer Teilmengen von $\operatorname{Spv}(A, I)$:

i) Jedes Element aus $L = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(I) = \{\infty\}\}$ hat keine echte I-zulässige Spezialisierung. Deshalb ist L in $\operatorname{Spv}(A, I)$ enthalten. Es ist $r_I^{-1}(L) = L$. Also ist L eine abgeschlossene konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(A, I)$.

ii) Sei M die Menge der trivialen Bewertungen von A. Wir wissen schon, daß M (versehen mit der Teilraumtopologie von $\operatorname{Spv} A$) ein spektraler Raum ist (1.1.5.iii). Es ist $M \subseteq \operatorname{Spv}(A, I)$ und die Inklusion $M \longrightarrow \operatorname{Spv}(A, I)$ ist spektral. Deshalb ist M eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(A, I)$.

Wir wollen die prokonstruierbare Teilmenge $r_I^{-1}(M)$ von $\operatorname{Spv} A$ bestimmen. Sei $s_1, \ldots, s_n$ ein Erzeugendensystem von I. Wir setzen $E_0 = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(I) = \{\infty\}$ und für jedes $a \in A$ ist $v(a) = 0$ oder $v(a) = \infty\}$ und $E_i = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(s_i) \leq 0$ und $v(a) \geq 0$ für jedes $a \in A\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. $E_0, \ldots, E_n$ sind prokonstruierbare

Teilmengen von $\mathrm{Spv}\,A$, die abgeschlossen sind gegenüber I-zulässigen Generalisierungen und I-zulässigen Spezialisierungen. Es ist $M = \mathrm{Spv}\,(A,I) \cap \bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i$ und deshalb $r_I^{-1}(M) = \bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i$.
(N.B. Es ist $M = \{v \in \mathrm{Spv}\,(A,I) | \Gamma_v = (0)\}$, also
$r_I^{-1}(M) = \{v \in \mathrm{Spv}\,A | c\Gamma_v(I) = (0)\}$. Man rechnet sofort nach, daß gilt
$\{v \in \mathrm{Spv}\,A | c\Gamma_v(I) = (0)\} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i$.)
Wir betrachten noch den Spezialfall $I = A$. Wir erhalten
$r_A^{-1}(M) = \{v \in \mathrm{Spv}\,A | v(a) \geq 0$ für jedes $a \in A\}$. Diese letzte Menge bezeichnen wir auch mit $\mathrm{Spv}^+(A)$.

iii) Sei k ein Körper und sei α eine nichttriviale Bewertung von k. Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ ist eine prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,A$, die abgeschlossen ist gegenüber Primärgeneralisierungen und Primärspezialisierungen. Deshalb ist $X = \mathrm{Spv}\,(\alpha,A) \cap \mathrm{Spv}\,(A,A)$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,(A,A)$. Es ist $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A) \subseteq X$. Es gilt nun

Proposition. Durch $Q \longmapsto Q \cap \mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ erhält man eine Bijektion von der Menge der konstruierbaren Teilmengen von X auf die Menge der konstruierbaren Teilmengen von $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$, die zugleich offen und abgeschlossen sind in der Topologie von $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$.

Beweis: Für jede konstruierbare Teilmenge Q von X ist $r_A^{-1}(Q)$ eine konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$, die abgeschlossen ist gegenüber Primärgeneralisierungen und Primärspezialisierungen, und es ist $Q \cap \mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A) = r_A^{-1}(Q) \cap \mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Nach (1.2.3) ist $Q \cap \mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ offen und abgeschlossen in $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Die Injektivität unserer Abbildung folgt aus (1.2.2). Nun zur Surjektivität. Sei P eine konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$, die offen und abgeschlossen ist in $\mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$. Sei Q die konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,(\alpha, A)$ mit $Q \cap \mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A) = P$. Nach (1.2.3) ist Q abgeschlossen gegenüber Primärgeneralisierungen und Primärspezialisierungen. Deshalb ist $Q \cap \mathrm{Spv}\,(A, A)$ eine konstruierbare Teilmenge von X. Es ist $\big(Q \cap \mathrm{Spv}\,(A, A)\big) \cap \mathrm{Max}\,\mathrm{Spv}\,(\alpha, A) = P$.

Bemerkung. Die I-zulässigen Spezialisierungen sind außerhalb
$T := \{v \in \mathrm{Spv}\,A | v(I) = \{\infty\}\}$ die Primärspezialisierungen und innerhalb T die trivialen Spezialisierungen $v \succ v$. Man kann aber auch die Verhältnisse von innerhalb und außerhalb vertauschen, d.h. die zulässigen Spezialisierungen außerhalb T seien nun die trivialen Spezialisierungen und innerhalb T die Primärspezialisierungen. Wir

wollen diese Definition von zulässigen Spezialisierungen gleich für beliebige abgeschlossene Teilmengen T von $\operatorname{Spv} A$ treffen.
Sei also T eine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spv} A$. Wir definieren: w heißt eine zulässige Spezialisierung von v, wenn gilt

a) Ist $v \notin T$, so ist $v = w$.
b) Ist $v \in T$, so ist w eine Primärspezialisierung von v.

Dann ist (1.3.4.i) erfüllt mit $\mathcal{L} = \{Q \mid Q \text{ konstruierbar und } Q \subseteq \operatorname{Spv} A \setminus T\}$. Benutzt man die obigen Ergebnisse über A-zulässige Spezialisierungen, so sieht man, daß (S1) erfüllt ist. Also läßt sich (1.3.1) anwenden.

Im folgenden wenden wir (1.3.1) noch an auf zwei weitere Typen von zulässigen Spezialisierungen im Bewertungsspektrum. Die spektralen Teilmengen, die wir dabei erhalten, benötigen wir zwar nicht für diese Arbeit, sie könnten jedoch vielleicht nützlich sein zu weitergehenden Konstruktionen in der rigid analytischen Geometrie. Wir führen sie deshalb hier auf.

Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von A. Eine Bewertung w von A heißt $\bar{I}$-zulässige Spezialisierung einer Bewertung v von A, wenn gilt

a) Ist $v(I) \neq \infty$, so ist w eine Primärspezialisierung von v mit $w(I) \neq \{\infty\}$.
b) Ist $v(I) = \infty$, so ist w eine Primärspezialisierung von v.

Es ist dann (1.3.4.i) erfüllt, also gelten (S2) und (S4). Ebenso gelten (S3) und (S5). Für jede Bewertung v von A definieren wir

$$c\Gamma_v(\bar{I}) = \begin{cases} c\Gamma_v & \text{wenn } v(I) = \{\infty\} \text{ oder} \\ & v(I) \cap c\Gamma_v \neq \emptyset \\ \text{kleinste konvexe Untergruppe} & \text{wenn } v(I) \neq \{\infty\} \text{ und} \\ U \text{ von } \Gamma_v \text{ mit } v(I) \cap U \neq \emptyset & v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset \end{cases}$$

Offensichtlich gilt

Lemma 1.3.15. i) Eine Bewertung w von A ist genau dann eine $\bar{I}$-zulässige Spezialisierung von v, wenn es eine konvexe Untergruppe H von Γ_v gibt mit $c\Gamma_v(\bar{I}) \subseteq H$ und $w = v|H$.
ii) v hat genau dann keine echte $\bar{I}$-zulässige Spezialisierung, wenn $\Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{I})$.

Lemma 1.3.16. Seien $f_0, f_1, \ldots, f_n$ Elemente von A, die eine der folgenden Bedingungen erfüllen

a) $A = (f_0, \ldots, f_n)$.

b) $I \subseteq \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$ und $f_0 \in \sqrt{I}$:
Dann ist $R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$ abgeschlossen gegenüber $\bar{I}$-zulässigen Spezialisierungen.

Beweis: Gilt (a), so ist nach (1.3.7) $R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$ abgeschlossen gegenüber A-zulässigen Spezialisierungen (d.h. Primärspezialisierungen) und somit abgeschlossen gegenüber $\bar{I}$-zulässigen Spezialisierungen. Es gelte nun (b). Sei $v \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$ und sei w eine $\bar{I}$-zulässige Spezialisierung von v. Da $v(f_0) \neq \infty$ und $f_0 \in \sqrt{I}$, ist $v(I) \neq \{\infty\}$. Deshalb ist w eine I-zulässige Spezialisierung. Nach (1.3.7) ist $w \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$.

Lemma 1.3.17. Sei v eine Bewertung von A mit $v(I) \neq \{\infty\}$ und $\Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{I})$. Sei U eine Umgebung von v in $\operatorname{Spv} A$. Dann gibt es $f_0, f_1, \ldots, f_n \in A$, so daß $v \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}) \subseteq U$ und $\sqrt{I} = \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$.

Beweis: Seien $g_0, \ldots, g_m \in A$ mit $v \in R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$. Sei $s_1, \ldots, s_n$ ein Erzeugendensystem von I und sei $s \in I$ mit $v(s) \neq \infty$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $\Gamma_v = c\Gamma_v$.
Es gibt ein $d \in A$, so daß $v(d) \neq \infty$ und $v(s_i) \geq v(g_0 s) + v(d) = v(g_0 s d)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $v \in R_A(\frac{g_1 sd}{g_0 sd}, \ldots, \frac{g_m sd}{g_0 sd}, \frac{s_1}{g_0 sd}, \ldots, \frac{s_n}{g_0 sd}) \subseteq R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$ und $I = (g_0 sd, \ldots, g_m sd, s_1, \ldots, s_n)$.

2. Fall: $\Gamma_v \neq c\Gamma_v$.
Nach (1.3.5) gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $v(s_i^k) \geq v(g_0 s)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist
$v \in R_A(\frac{g_1 s}{g_0 s}, \ldots, \frac{g_m s}{g_0 s}, \frac{s_1^k}{g_0 s}, \ldots, \frac{s_n^k}{g_0 s}) \subseteq R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$ und
$\sqrt{I} = \sqrt{(g_0 s, \ldots, g_m s, s_1^k, \ldots, s_n^k)}$.

Lemma 1.3.18. Sei v eine Bewertung von A mit $\Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{I})$ und sei U eine Umgebung von v in $\operatorname{Spv} A$. Es gibt dann $f_0, f_1, \ldots, f_n \in A$, so daß $v \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}) \subseteq U$ und $A = (f_0, \ldots, f_n)$ oder $\sqrt{I} = \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$.

Beweis: Ist $v(I) \neq \{\infty\}$, so folgt die Behauptung aus (1.3.17). Ist $v(I) = \{\infty\}$, so ist $\Gamma_v = c\Gamma_v = c\Gamma_v(A)$ und die Behauptung folgt aus (1.3.8).

Definition 1.3.19. Der Teilraum $\{v \in \operatorname{Spv} A \mid \Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{I})\}$ von $\operatorname{Spv} A$ wird mit $\operatorname{Spv}(A, \bar{I})$ bezeichnet. Eine Teilmenge von $\operatorname{Spv}(A, \bar{I})$ heißt rational, wenn sie von der Form $\operatorname{Spv}(A, \bar{I}) \cap R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$ ist, wobei $f_0, \ldots, f_n$ Elemente von A sind, für die gilt (a) $A = (f_0, \ldots, f_n)$ oder (b) $I \subseteq \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$ und $f_0 \in \sqrt{I}$. Die Teilmengen $\operatorname{Spv}(A, \bar{I}) \cap R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$, wobei $f_0, \ldots, f_n \in A$ mit $A = (f_0, \ldots, f_n)$ oder $\sqrt{I} = \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$, heißen spezielle rationale Teilmengen.

Satz 1.3.20. i) Der topologische Raum $\operatorname{Spv}(A,\bar{I})$ und die Retraktion $\operatorname{Spv} A \longrightarrow \operatorname{Spv}(A,\bar{I})$, $v \longmapsto v|c\Gamma_v(\bar{I})$ sind spektral.
ii) Die rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spv}(A,\bar{I})$ sind konstruierbar. Der Durchschnitt zweier rationaler Teilmengen ist eine rationale Teilmenge und der Durchschnitt zweier spezieller rationaler Teilmengen ist eine spezielle rationale Teilmenge. Die speziellen rationalen Teilmengen bilden eine Basis für die Topologie von $\operatorname{Spv}(A,\bar{I})$.

Beweis: Die Behauptung über die Durchschnitte folgt aus (1.1.2.ii). Die restlichen Behauptungen folgen mit (1.3.15), (1.3.16) und (1.3.18) aus (1.3.1).

Wir betrachten die Extremfälle $I = (0)$ und $I = A$. Es gilt: $(\bar{0})$-zulässige Spezialisierung $=$ $\bar{A}$-zulässige Spezialisierung $=$ A-zulässige Spezialisierung, und deshalb $\operatorname{Spv}(A,(\bar{0})) = \operatorname{Spv}(A,\bar{A}) = \operatorname{Spv}(A,A)$. Die Definitionen der rationalen Teilmengen der Räume $\operatorname{Spv}(A,(\bar{0}))$, $\operatorname{Spv}(A,\bar{A})$ und $\operatorname{Spv}(A,A)$ stimmen überein.

Bemerkung. Seien $I_1,\ldots,I_n$ endlich erzeugte Ideale von A. Dann sind $\bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{Spv}(A,\bar{I}_k)$ und $\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Spv}(A,\bar{I}_k)$ spektrale Teilmenge von $\operatorname{Spv} A$. Die Behauptung für die Vereinigung folgt aus (1.3.26). Die Behauptung für den Durchschnitt läßt sich folgendermaßen beweisen. Wir nennen w eine zulässige Spezialisierung von v, wenn w eine $\bar{I}_k$-zulässige Spezialisierung von v ist für ein $k \in \{1,\ldots,n\}$. Es gilt dann offensichtlich (S5). Man kann zeigen, daß auch (S1) erfüllt ist. Nach (1.3.2) ist dann $\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Spv}(A,\bar{I}_k)$ eine spektrale Teilmenge von $\operatorname{Spv} A$. Man beachte, daß für diese Definition von zulässigen Spezialisierungen (S2) und (S4) im allgemeinen nicht erfüllt sind.

Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Menge endlich erzeugter Ideale von A. Seien v und w Bewertungen von A. Wir nennen w eine $\bar{\mathcal{F}}$-zulässige Spezialisierung von v, wenn w eine $\bar{I}$-zulässige Spezialisierung von v ist für jedes $I \in \mathcal{F}$.

Die $\bar{\mathcal{F}}$-zulässigen Spezialisierungen von $\operatorname{Spv} A$ erfüllen (1.3.4.i) und somit (S2) und (S4). Offensichtlich gelten auch (S3) und (S5).

Die Mengen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \cup \{A\}$ definieren dieselben zulässigen Spezialisierungen. Deshalb können wir bei Bedarf ohne Einschränkung annehmen, daß $A \in \mathcal{F}$.

Für jede Bewertung v von A setzen wir

$$c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}}) = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} c\Gamma_v(\bar{I}).$$

Wir erhalten wieder

Lemma 1.3.21. i) w ist genau dann eine $\bar{\mathcal{F}}$-zulässige Spezialisierung von v, wenn es eine konvexe Untergruppe H von Γ_v gibt mit $c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}}) \subseteq H$ und $w = v|H$.
ii) v hat genau dann keine echte $\bar{\mathcal{F}}$-zulässige Spezialisierung, wenn $\Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}})$.

Lemma 1.3.22. Seien $f_0, \ldots, f_n$ Elemente von A und $I_1, \ldots, I_m$ Elemente von $\mathcal{F}$, so daß $I \subseteq \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$ und $f_0 \in \sqrt{I}$ mit $I = I_1 \cdot \ldots \cdot I_m$. Dann ist $R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$ abgeschlossen gegenüber $\bar{\mathcal{F}}$-zulässigen Spezialisierungen.

Beweis: Ist w eine $\bar{I}_k$-zulässige Spezialisierung von v für $k = 1, \ldots, m$, so ist w auch eine $\bar{I}$-zulässige Spezialisierung von v. Also folgt die Behauptung aus (1.3.16).

Ist das von der Vereinigung aller Elemente von $\mathcal{F}$ erzeugte Ideal nicht A, so nehmen wir A zu der Menge $\mathcal{F}$ hinzu. Es gilt dann in jedem Fall

(4) $\qquad c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}}) = \cup(c\Gamma_v(\bar{I}) \mid I \in \mathcal{F} \text{ und } v(I) \neq \{\infty\})$ für jedes $v \in \operatorname{Spv} A$

Lemma 1.3.23. Sei v ein Element von $\operatorname{Spv} A$ mit $\Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}})$ und sei U eine Umgebung von v in $\operatorname{Spv} A$. Dann gibt es $f_0, \ldots, f_n \in A$ und $I \in \mathcal{F}$, so daß $v \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}) \subseteq U$ und $\sqrt{I} = \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$.

Beweis: Wir wählen $g_0, \ldots, g_m \in A$, so daß $v \in R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$. Da $v(g_0) \in \Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}})$, folgt aus (4), daß $v(g_0) \in c\Gamma_v(\bar{I})$ für ein $I \in \mathcal{F}$ mit $v(I) \neq \{\infty\}$. Wir setzen $w = v|c\Gamma_v(\bar{I})$. Dann gilt $\Gamma_w = c\Gamma_w(\bar{I})$, $w(I) \neq \{\infty\}$ und $w \in R_A(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_m}{g_0}) \subseteq U$. Nach (1.3.17) gibt es $f_0, \ldots, f_n \in A$, so daß $w \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}) \subseteq U$ und $\sqrt{I} = \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$. Da v eine Generalisierung von w ist, ist $v \in R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$.

Definition 1.3.24. Den topologischen Teilraum $\{v \in \operatorname{Spv} A \mid \Gamma_v = c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}})\}$ von $\operatorname{Spv} A$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}})$. Eine Teilmenge M von $\operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}})$ heißt rational, wenn es $f_0, \ldots, f_n \in A$ und $I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{F}$ gibt, so daß $M = \operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}}) \cap R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$, $I \subseteq \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$ und $f_0 \in \sqrt{I}$, wobei $I = I_1 \cdot \ldots \cdot I_m$. Gilt sogar $\sqrt{I} = \sqrt{(f_0, \ldots, f_n)}$, so heißt M eine spezielle rationale Teilmenge von $\operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}})$.

Satz 1.3.25. i) Der topologische Raum $\operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}})$ ist spektral und die Retraktion $\operatorname{Spv} A \longrightarrow \operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}})$, $v \longmapsto v|\, c\Gamma_v(\bar{\mathcal{F}})$ ist eine spektrale Abbildung.
ii) Die rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}})$ sind konstruierbar. Der Durchschnitt zweier rationaler Teilmengen ist eine rationale Teilmenge, der Durchschnitt zweier spezieller rationaler Teilmengen ist eine spezielle rationale Teilmenge. Die speziellen rationalen Teilmengen bilden eine Basis für die Topologie von $\operatorname{Spv}(A, \bar{\mathcal{F}})$.

Der Beweis von (1.3.25) ergibt sich aus (1.1.2), (1.3.1), (1.3.21), (1.3.22) und (1.3.23).

Bemerkung 1.3.26. i) Ist $\mathcal{F}$ endlich , so ist $\mathrm{Spv}\,(A,\bar{\mathcal{F}}) = \bigcup_{I\in\mathcal{F}} \mathrm{Spv}\,(A,\bar{I})$.
ii) Ist A endlich erzeugt über $\mathbb{Z}$, so gilt $\mathrm{Spv}\,(A,\bar{\mathcal{F}}) = \bigcup_{I\in\mathcal{F}} \mathrm{Spv}\,(A,\bar{I})$ für jedes $\mathcal{F}$, da jede Bewertung von A endlichen Rang hat.

Beispiel. Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A setzen wir $X_\mathfrak{p} = \mathrm{Spv}\,(C_\mathfrak{p}, C_\mathfrak{p})$ mit $C_\mathfrak{p} = B \otimes_A \mathrm{Quot}\,(A/\mathfrak{p})$. Wir betrachten $X_\mathfrak{p}$ als Teilmenge von $\mathrm{Spv}\, B$ durch die kanonischen Inklusionen $X_\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Spv}\, C_\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Spv}\, B$. Dann ist die Vereinigung aller $X_\mathfrak{p}$ eine spektrale Teilmenge von $\mathrm{Spv}\, B$, denn es gilt

$$\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\, A} X_\mathfrak{p} = \mathrm{Spv}\,(B,\bar{\mathcal{F}})\,,$$

wobei $\mathcal{F}$ die Menge von Idealen $\{B\cdot f(a) |\, a\in A\}$ ist.

Beweis: Sei v eine Bewertung von B. Sei $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathrm{supp}\,(v))$. Es gilt $v \in \bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\, A} X_\mathfrak{p} \iff v \in X_\mathfrak{q} \iff \Gamma_v$ ist die von $c\Gamma_v$ und $\{v(f(a))|\, a\in A\setminus\mathfrak{q}\}$ erzeugte konvexe Untergruppe von $\Gamma_v \iff \Gamma_v = c\Gamma_v \cup \bigcup_{a\in A\setminus\mathfrak{q}} \langle v(f(a))\rangle$, wobei $\langle v(f(a))\rangle$ die von $v(f(a))$ erzeugte konvexe Untergruppe von Γ_v ist $\iff \Gamma_v = \bigcup_{a\in A} c\Gamma_v(\overline{B\cdot f(a)}) \iff v \in \mathrm{Spv}\,(B,\bar{\mathcal{F}})$.

1.4. DAS BEWERTUNGSSPEKTRUM EINES SCHEMAS

Sei X ein Schema. Eine Bewertung von X ist ein Paar (x, v), wobei x ein Punkt von X und v eine Bewertung des Residuenkörpers von x ist. Häufig schreiben wir einfach v anstelle von (x, v). Der Punkt x heißt der Träger der Bewertung v und wird mit $\operatorname{supp}(v)$ bezeichnet. Die Wertegruppe von v wird mit Γ_v bezeichnet.

Die Menge aller Bewertungen von X wird mit $\operatorname{Spv} X$ bezeichnet. Wir versehen $\operatorname{Spv} X$ mit der Topologie, die von den Mengen $\{(x,v) \in \operatorname{Spv} X \mid x \in U,\ v(a(x)) \geq v(b(x)) \neq \infty\}$ erzeugt wird, wobei U eine offene Teilmenge von X und $a, b \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Jeder Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ von Schemata induziert eine stetige Abbildung $\operatorname{Spv}(f)\colon \operatorname{Spv} X \longrightarrow \operatorname{Spv} Y$. Ist f eine offene Einbettung von Schemata, so ist $\operatorname{Spv}(f)$ eine offene Einbettung topologischer Räume.

Eine Bewertung w von X heißt Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) einer Bewertung v von X, wenn es eine affine offene Teilmenge U von X gibt, so daß $v, w \in \operatorname{Spv} U = \operatorname{Spv} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ und w eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von v in $\operatorname{Spv} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist.

Die Menge der Punkte (x, v) von $\operatorname{Spv} X$, so daß es eine affine offene Umgebung U von x in X gibt mit $v(a(x)) \geq 0$ für jedes $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, wird mit $\operatorname{Spv}^+(X)$ bezeichnet.

Aus (1.1.6) folgt sofort

Satz 1.4.1. Ist X quasikompakt und quasisepariert, so ist $\operatorname{Spv} X$ ein spektraler Raum.

Sei v eine Bewertung von X. Für jede affine offene Teilmenge U von X mit $\operatorname{supp}(v) \in U$ sei $c\Gamma_{v,U} \subseteq \Gamma_v$ die charakteristische Untergruppe der durch v gegebenen Bewertung von $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Wir definieren

$$c\Gamma_v = \bigcap_U c\Gamma_{v,U}$$

wobei U alle affinen offenen Mengen von X durchläuft, die $\operatorname{supp}(v)$ enthalten. $c\Gamma_v$ heißt die charakteristische Untergruppe von v. Es ist klar, daß diese Definition der charakteristischen Untergruppe übereinstimmt mit derjenigen aus (1.1), wenn $X = \operatorname{Spec} A$ affin ist.

Proposition 1.4.2. Sei X quasikompakt. Dann gibt es eine affine offene Teilmenge U von X mit $\operatorname{supp}(v) \in U$ und $c\Gamma_v = c\Gamma_{v,U}$. Genauer: Sei $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung von X durch affine offene Teilmengen. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $\operatorname{supp}(v) \in U_i$ und $c\Gamma_v = c\Gamma_{v,U_i}$.

Beweis: Sei $(U_i | i \in I')$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i | i \in I)$. Sei S ein Element aus $(U_i | i \in I')$, so daß $\operatorname{supp}(v) \in S$ und $c\Gamma_{v,S} \subseteq c\Gamma_{v,U_i}$ für jedes $i \in I'$ mit $\operatorname{supp}(v) \in U_i$. Sei U eine affine offene Teilmenge von X mit $\operatorname{supp}(v) \in U$. Wir zeigen $c\Gamma_{v,S} \subseteq c\Gamma_{v,U}$.

Seien $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, so daß $\big(D(f_i) | i = 1, \ldots, n\big)$ eine Überdeckung von U ist, die die Überdeckung $(U_i \cap U | i \in I')$ verfeinert, wobei $D(f_i) = \{x \in U | f_i(x) \neq 0\}$.

Es ist $v(f_i) \in c\Gamma_{v,U}$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Denn: Angenommen, dies sei falsch. Dann ist $v(f_i) > c\Gamma_{v,U}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seien $g_1, \ldots, g_n \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$. Dann ist $0 = v(1) \geq \min\{v(f_i) + v(g_i) | i = 1, \ldots, n\} > c\Gamma_{v,U}$, Widerspruch.

Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $v(f_j) \in c\Gamma_{v,U}$. Dann ist $\operatorname{supp}(v) \in D(f_j)$ und $c\Gamma_{v,U} = c\Gamma_{v,D(f_j)}$. Sei $k \in I'$ mit $D(f_j) \subseteq U_k \cap U$. Dann ist $\operatorname{supp}(v) \in U_k$ und es gilt $c\Gamma_{v,S} \subseteq c\Gamma_{v,U_k} \subseteq c\Gamma_{v,D(f_j)} = c\Gamma_{v,U}$.

Proposition 1.4.3. Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Sei v eine Bewertung von X und sei w das Bild von v unter der Abbildung $\operatorname{Spv}(f)$. Wir betrachten Γ_w als Untergruppe von Γ_v.

i) Es ist $c\Gamma_w \subseteq c\Gamma_v$.

ii) Ist Y quasikompakt und f eigentlich, so ist $c\Gamma_v$ die konvexe Hülle von $c\Gamma_w$.

Beweis: i) Sei $(U_i | i \in I)$ eine Basis der Topologie von X bestehend aus affinen offenen Teilmengen, so daß es zu jedem $i \in I$ eine affine offene Teilmenge V_i von Y gibt mit $f(U_i) \subseteq V_i$. Sei I' die Menge der Indizes $i \in I$ mit $\operatorname{supp}(v) \in U_i$. Für jedes $i \in I'$ ist dann $\operatorname{supp}(w) \in V_i$ und $c\Gamma_{w,V_i} \subseteq c\Gamma_{v,U_i}$. Nach (1.4.2) gilt für jede affine offene Teilmenge U von X, die den Träger von v enthält: $\bigcap_{i \in I'} c\Gamma_{v,U_i} \subseteq c\Gamma_{v,U}$. Damit haben wir $c\Gamma_w \subseteq \bigcap_{i \in I'} c\Gamma_{w,V_i} \subseteq \bigcap_{i \in I'} c\Gamma_{v,U_i} = c\Gamma_v$.

ii) Sei H eine konvexe Untergruppe von Γ_v mit $c\Gamma_w \subseteq H$. Zu zeigen ist $c\Gamma_v \subseteq H$. Sei v' die Bewertung v/H von X. (Die Definition von v/H auf X erfolgt analog zur Definition im affinen Fall.) Die Bewertung $w' = w/H \cap \Gamma_w$ von Y ist das Bild von v' unter $\operatorname{Spv}(f)$. Nach (1.4.2) gibt es eine affine offene Teilmenge V von Y mit $\operatorname{supp}(w') = \operatorname{supp}(w) \in V$ und $c\Gamma_w = c\Gamma_{w,V}$. Da $c\Gamma_w \subseteq H$, ist $w'(a) \geq 0$ für jedes $a \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$, d.h. die Bewertung w' von V hat ein Zentrum auf V. Nach dem Bewertungskriterium für eigentliche Morphismen hat dann v' ein Zentrum auf X, d.h. es gibt eine affine offene Teilmenge U von X mit $\operatorname{supp}(v') = \operatorname{supp}(v) \in U$ und

$v'(a) \geq 0$ für jedes $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Also gibt es kein $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $v(a) < H$, d.h. es gilt $c\Gamma_{v,U} \subseteq H$. Damit haben wir $c\Gamma_v \subseteq c\Gamma_{v,U} \subseteq H$.

Korollar 1.4.4. Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus von Schemata. Sei v eine Bewertung von X. Die Menge der Primärspezialisierungen von v wird unter $\mathrm{Spv}\,(f)$ surjektiv abgebildet auf die Menge der Primärspezialisierungen von $\mathrm{Spv}\,(f)(v)$.

Bemerkung. Mit (1.1.17) folgt, daß (1.4.4) richtig bleibt, wenn man Spezialisierung statt Primärspezialisierung setzt.

Ab jetzt sei X ein quasikompaktes und separiertes Schema. Sei v eine Bewertung von X und sei H eine konvexe Untergruppe von Γ_v mit $c\Gamma_v \subseteq H$. Wir wollen eine Bewertung $v|H$ definieren. Nach (1.4.2) gibt es eine affine offene Teilmenge U von X mit $\mathrm{supp}\,(v) \in U$ und $c\Gamma_{v,U} \subseteq H$. Wir haben deshalb die Primärspezialisierung $v|H \in \mathrm{Spv}\,\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Spv}\,U \subseteq \mathrm{Spv}\,X$. Aus (1.1.9) und dem Bewertungskriterium für Separiertheit folgt, daß diese Definition von $v|H$ unabhängig von der Auswahl von U ist. Deshalb gilt

Proposition 1.4.5. Die Bewertungen $v|H$, wobei H die konvexen Untergruppen von Γ_v mit $c\Gamma_v \subseteq H$ durchläuft, sind die Primärspezialisierungen von v. Die Primärspezialisierungen von v bilden eine Kette mit kleinstem Element v und größtem Element $v|c\Gamma_v$. Es gibt eine affine offene Teilmenge U von X, so daß die Träger aller Primärspezialisierungen von v in U liegen.

Sei $\mathcal{I}$ eine quasikohärente Idealgarbe von endlichem Typ auf X. Wir wollen entsprechend zu $\mathrm{Spv}\,(A, I)$ nun $\mathrm{Spv}\,(X, \mathcal{I})$ definieren. Sei T die durch $\mathcal{I}$ definierte abgeschlossene Teilmenge von X. Eine Bewertung w von X heißt eine $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierung einer Bewertung v von X, wenn gilt

a) Ist $\mathrm{supp}\,(v) \notin T$, so ist w eine Primärspezialisierung von v mit $\mathrm{supp}\,(w) \notin T$.

b) Ist $\mathrm{supp}\,(v) \in T$, so ist $v = w$.

Nach (1.4.5) erfüllen die $\mathcal{I}$-zulässigen Spezialisierungen die Eigenschaft (S3). Wir setzen

$$\mathrm{Spv}\,(X, \mathcal{I}) = \{v \in \mathrm{Spv}\,X \mid x \text{ hat keine echte } \mathcal{I}\text{-zulässige Spezialisierung}\}$$

und versehen $\mathrm{Spv}\,(X, \mathcal{I})$ mit der Teilraumtopologie von $\mathrm{Spv}\,X$. (Man beachte: Ist U eine affine offene Teilmenge von X, so gilt im allgemeinen nicht $\mathrm{Spv}\,(X, \mathcal{I}) \cap \mathrm{Spv}\,U = \mathrm{Spv}\,(A, I)$, wobei $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ und $I = \Gamma(U, \mathcal{I})$.)

Lemma 1.4.6. Es gibt (genau) eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $\operatorname{Spv} X$, so daß $(\operatorname{Spv} X, \mathcal{T})$ ein spektraler Raum ist, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie $\operatorname{Spv} X$ hat und dessen Spezialisierungen gerade die $\mathcal{I}$-zulässigen Spezialisierungen sind.

Beweis: Seien $U_1, \ldots, U_n$ affine offene Teilmengen von X, die X überdecken. Sei $A_k = \Gamma(U_k, \mathcal{O}_X)$ und $I_k = \Gamma(U_k, \mathcal{I})$. Nach (1.3) gibt es eine Topologie $\mathcal{T}_k$ auf $\operatorname{Spv} U_k = \operatorname{Spv} A_k$, so daß $(\operatorname{Spv} A_k, \mathcal{T}_k)$ ein spektraler Raum ist, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie $\operatorname{Spv} A_k$ hat und dessen Spezialisierungen gerade die I_k-zulässigen Spezialisierungen sind. Es ist $Y_{ij} := \operatorname{Spv} U_i \cap \operatorname{Spv} U_j$ eine offene konstruierbare Teilmenge von $(\operatorname{Spv} A_i, \mathcal{T}_i)$ und $(\operatorname{Spv} A_j, \mathcal{T}_j)$. Weiterhin gilt für Punkte $x, y \in Y_{ij}$: y ist eine I_i-zulässige Spezialisierung von x genau dann, wenn y eine I_j-zulässige Spezialisierung von x ist. Also sind $(Y_{ij}, \mathcal{T}_i|Y_{ij})$ und $(Y_{ij}, \mathcal{T}_j|Y_{ij})$ spektrale Räume, die dieselben konstruierbaren Teilmengen und dieselben Spezialisierungen besitzen. Somit $\mathcal{T}_i|Y_{ij} = \mathcal{T}_j|Y_{ij}$. Die Topologien $\mathcal{T}_k$ verkleben sich deshalb zu einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\operatorname{Spv} X$. Für diese Topologie gilt (1.4.6).

Nach (1.4.6) erfüllen die $\mathcal{I}$-zulässigen Spezialisierungen die Eigenschaft (S2), d.h. es gibt zu jedem $x \in \operatorname{Spv} X$ ein $y \in \operatorname{Spv}(X, \mathcal{I})$, so daß y eine $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierung von x ist. Da (S3) gilt, ist y eindeutig bestimmt. Wir definieren eine Retraktion $r \colon \operatorname{Spv} X \longrightarrow \operatorname{Spv}(X, \mathcal{I})$ durch $x \longmapsto y$.

Satz 1.4.7. Der topologische Raum $\operatorname{Spv}(X, \mathcal{I})$ ist spektral und $r \colon \operatorname{Spv} X \longrightarrow \operatorname{Spv}(X, \mathcal{I})$ ist eine spektrale Abbildung.

Beweis: Wir zeigen zunächst

(1) Ist P eine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spv} X$, so ist die Menge G aller $\mathcal{I}$-zulässigen Generalisierungen aller Elemente von P abgeschlosen in $\operatorname{Spv} X$.

Als abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spv} X$ ist P prokonstruierbar in $\operatorname{Spv} X$. Nach (1.4.6) ist dann auch G prokonstruierbar in $\operatorname{Spv} X$. Deshalb genügt es zu zeigen, daß G abgeschlossen ist gegenüber Spezialisierungen in $\operatorname{Spv} X$. Sei y eine Spezialisierung eines Elements x von G. Wir zeigen $y \in G$. Indem wir eine affine offene Teilmenge von X betrachten, die den Träger von y enthält, erhalten wir aus (1.1.17), daß y eine Primärspezialisierung einer Sekundärspezialisierung x' von x ist. Sei z eine $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierung von x mit $z \in P$. Indem wir eine affine offene Teilmenge von X betrachten, die den Träger von z enthält, erhalten wir aus (1.1.15i), daß es einen Punkt z' von $\operatorname{Spv} X$ gibt, der eine Sekundärspezialisierung von z und eine Primärspezialisierung von x' ist. Da y und z' Primärspezialisierungen von x' sind, folgt aus (1.4.5), daß y eine

Primärspezialisierung von z' oder z' eine Primärspezialisierung von y ist. Ist y eine Primärspezialisierung von z', so ist $y \in P$, da P abgeschlossen ist. Somit $y \in P \subseteq G$. Ist z' eine Primärspezialisierung von y, so ist z' eine $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierung von y. Da $z' \in P$, ist dann $y \in G$.

Wir zeigen nun, daß die Eigenschaft (S1) für $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierungen erfüllt ist. Seien ein $x \in \operatorname{Spv}(X, \mathcal{I})$ und eine Umgebung V von x in $\operatorname{Spv} X$ gegeben. Sei U eine affine offene Teilmenge von X, die den Träger von x enthält. Sei G die Menge aller $\mathcal{I}$-zulässigen Generalisierungen aller Punkte von $\operatorname{Spv} X \setminus \operatorname{Spv} U$. Wir setzen $W = \operatorname{Spv} X \setminus G$. Es ist dann $x \in W \subseteq \operatorname{Spv} U$. Nach (1) ist W offen. Sei $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ und $I = \Gamma(U, \mathcal{I})$. Es ist $x \in \operatorname{Spv}(A, I)$. Nach (1.3.7) und (1.3.8) gibt es eine offene konstruierbare Teilmenge R von $\operatorname{Spv} A$, die abgeschlossen ist gegenüber I-zulässigen Spezialisierungen in $\operatorname{Spv} A$ und so daß $x \in R \subseteq V \cap W$. Wir müssen noch zeigen, daß R abgeschlossen ist gegenüber $\mathcal{I}$-zulässigen Spezialisierungen. Sei $v \in R$ und sei w eine $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierung von v in $\operatorname{Spv} X$. W ist nach Konstruktion abgeschlossen gegenüber $\mathcal{I}$-zulässigen Spezialisierungen. Mit $v \in W$ ist also auch $w \in W$. Da $W \subseteq \operatorname{Spv} U$, ist w ein Element von $\operatorname{Spv} A$. Dann ist w eine I-zulässige Spezialisierung von v in $\operatorname{Spv} A$ und somit $w \in R$.

Also ist (S1) für $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierungen erfüllt und (1.4.7) folgt aus (1.3.1).

Aus der Stetigkeit von r folgt

Korollar 1.4.8. Ist U eine quasikompakte offene Teilmenge von X, so ist $\operatorname{Spv}(X, \mathcal{I}) \cap \operatorname{Spv} U$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spv}(U, \mathcal{I}|U)$.

Bemerkung. Sei v eine Bewertung von X. Für jede affine offene Teilmenge U von X mit $\operatorname{supp}(v) \in U$ setzen wir $c\Gamma_{v,U}(\mathcal{I}) := c\Gamma_v(I)$, wobei wir v als Bewertung von $\operatorname{Spv} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ betrachten und I das Ideal $\Gamma(U, \mathcal{I})$ ist. Wir definieren

$$c\Gamma_v(\mathcal{I}) = \bigcap_U c\Gamma_{v,U}(\mathcal{I}),$$

wobei U die Menge aller affinen offenen Teilmengen von X durchläuft, die den Träger von v enthalten.

Es gibt eine affine offene Teilmenge U von X mit $\operatorname{supp}(v) \in U$ und $c\Gamma_v(\mathcal{I}) = c\Gamma_{v,U}(\mathcal{I})$. Eine Bewertung w von X ist genau dann eine $\mathcal{I}$-zulässige Spezialisierung, wenn es eine konvexe Untergruppe H von Γ_v gibt mit $c\Gamma_v(\mathcal{I}) \subseteq H$ und $w = v|H$. Für die Retraktion r erhalten wir $r(v) = v|\, c\Gamma_v(\mathcal{I})$.

1.5. Die Garbe der algebraischen Funktionen auf dem Bewertungsspektrum

Wir führen hier im einfachsten Fall das vor, was wir in Kapitel 3 ausführlich darstellen werden.

Definition 1.5.1. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und sei T eine Teilmenge von $\operatorname{Spv} X$. Wir versehen T mit der Teilraumtopologie von $\operatorname{Spv} X$. Sei $f: T \longrightarrow X$ die Einschränkung der Trägerabbildung auf T. Die Abbildung f ist stetig. Die Garbe $f^{-1}(\mathcal{O}_X)$ auf T heißt die Garbe der algebraischen Funktionen auf T (bezüglich X).

Ein bewerteter lokaler Ring ist ein lokaler Ring A zusammen mit einer Bewertung v von A, deren Träger das maximale Ideal ist. Der Unterring $A_v = \{a \in A \mid v(a) \geq 0\}$ von A heißt der Ring der ganzen Elemente von (A, v). Ein lokaler Ringhomomorphismus zwischen bewerteten lokalen Ringen (A, v) und (B, w) ist ein Ringhomomorphismus $f: A \longrightarrow B$ mit $\operatorname{Spv}(f)(w) = v$. Es gilt das einfache Lemma

Lemma 1.5.2. Seien (A, v) und (B, w) bewertete lokale Ringe.

i) Es ist A_v ein lokaler Ring.
ii) Ein Ringhomomorphismus $f: A \longrightarrow B$ ist genau dann ein lokaler Ringhomomorphismus zwischen den bewerteten lokalen Ringen (A, v) und (B, w), wenn gilt: f ist lokal, $f(A_v) \subseteq B_w$ und der induzierte Ringhomomorphismus $A_v \longrightarrow B_w$ ist lokal.

Wir wollen eine Kategorie (VL) definieren. Dazu betrachten wir Tripel $(X, \mathcal{O}_X, (v_x \mid x \in X))$, für die gilt

(1) X ist ein topologischer Raum, $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe von Ringen auf X mit lokalen Halmen $\mathcal{O}_{X,x}$ und jedes v_x ist eine Bewertung von $\mathcal{O}_{X,x}$, deren Träger das maximale Ideal ist.

Zu solch einem Tripel definieren wir eine Untergarbe $\mathcal{O}_X^+$ von $\mathcal{O}_X$: Für jede offene Teilmenge U von X ist $\mathcal{O}_X^+(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid v_x(f_x) \geq 0 \text{ für jedes } x \in U\}$. $\mathcal{O}_X^+$ ist eine Garbe von Ringen. $\mathcal{O}_X^+$ heißt die Garbe der ganzen Elemente von $\mathcal{O}_X$.

Definition 1.5.3. Die Objekte der Kategorie (VL) sind alle Tripel $(X, \mathcal{O}_X, (v_x \mid x \in X))$, die (1) erfüllen, und für die gilt

(2) Für jedes $x \in X$ ist der Halm der Garbe der ganzen Elemente von $\mathcal{O}_X$ in x der Ring der ganzen Elemente des bewerteten lokalen Rings $(\mathcal{O}_{X,x}, v_x)$, d.h. $(\mathcal{O}_X^+)_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid v_x(f) \geq 0\}$.

Die Morphismen zwischen zwei Objekten $(X, \mathcal{O}_X, (v_x|x \in X))$ und $(Y, \mathcal{O}_Y, (v_y|\, y \in Y))$ in (VL) sind alle Paare (f, φ), für die gilt: f ist eine stetige Abbildung $X \longrightarrow Y$ und φ ist ein Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$, so daß für jedes $x \in X$ die induzierte Abbildung $\varphi_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ringhomomorphismus zwischen den bewerteten lokalen Ringen $(\mathcal{O}_{Y,f(x)}, v_{f(x)})$ und $(\mathcal{O}_{X,x}, v_x)$ ist.

Die Struktur eines Objekts aus (VL) ist nicht allein durch die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ bestimmt, sondern zusätzlich durch die Familie von Bewertungen $(v_x|\, x \in X)$. Man kann auch sagen, die Struktur ist durch die beiden Garben $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_X^+$ gegeben, da man nach (2) aus der Garbe $\mathcal{O}_X^+$ die Bewertungen v_x gewinnen kann. Aus (1.5.2) folgt

Lemma 1.5.4. Seien $X = (X, \mathcal{O}_X, (v_x|x \in X))$ und $Y = (Y, \mathcal{O}_Y, (v_y|y \in Y))$ Objekte der Kategorie (VL).

i) Die Halme $(\mathcal{O}_X^+)_x$ sind lokale Ringe.
ii) Die Morphismen zwischen X und Y in der Kategorie (VL) sind die Morphismen lokal geringter Räume $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, die einen Morphismus lokal geringter Räume $(X, \mathcal{O}_X^+) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y^+)$ induzieren.

Die Eigenschaft (2) läßt sich folgendermaßen umformulieren.

Lemma 1.5.5. Für ein Tripel $(X, \mathcal{O}_X, (v_x|x \in X))$, das (1) erfüllt, sind äquivalent

a) Es gilt (2).
b) Für jede offene Teilmenge U von X und jedes $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist $\{x \in U \mid v_x(a_x) \geq 0\}$ offen in X.
c) Für jede offene Teilmenge U von X und jedes $a, b \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist $\{x \in U \mid v_x(a_x) \geq v_x(b_x) \neq \infty\}$ offen in X.

Aus (1.5.5) folgt

Bemerkung 1.5.6. Sei $(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ ein Objekt der Kategorie (VL). Seien x und y Punkte von X und sei y eine Spezialisierung von x. Sei $g : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ die kanonische Abbildung. Dann ist v_y eine Spezialisierung von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ in $\operatorname{Spv} \mathcal{O}_y$.

Wir erinnern an die universelle Eigenschaft eines affinen Schemas.

(3) Sei A ein Ring. Der lokal geringte Raum $X = \operatorname{Spec} A$ zusammen mit dem kanonischen Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

erfüllt die folgende Eigenschaft. Sind Y ein lokal geringter Raum und $f: A \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Ringhomomorphismus, so gibt es genau einen Morphismus lokal geringter Räume $\varphi: Y \longrightarrow X$, so daß $f = g \circ h$, wobei g der durch φ induzierte Ringhomomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist.

Wir wollen nun in (3) die Kategorie der lokal geringten Räume durch die Kategorie (VL) ersetzen. Da die Struktur eines Objektes X aus (VL) nicht allein durch die Garbe $\mathcal{O}_X$ sondern durch das Paar von Garben $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ bestimmt ist, scheint es sinnvoll zu sein, den Ring A in (3) durch ein Paar von Ringen zu ersetzen. Ein Paar von Ringen (A, B) besteht aus einem Ring A und einem Unterring B von A. Ein Ringhomomorphismus zwischen den Paaren von Ringen (A, B) und (C, D) ist ein Ringhomomorphismus $f: A \longrightarrow C$ mit $f(B) \subseteq D$.

(*) Sei (A, B) ein Paar von Ringen. Gesucht ist ein Objekt X der Kategorie (VL) zusammen mit einem Ringhomomorphismus $h: (A, B) \longrightarrow (\Gamma(X, \mathcal{O}_X), \Gamma(X, \mathcal{O}_X^+))$, so daß gilt: Ist Y ein Objekt der Kategorie (VL) und ist $f: (A, B) \longrightarrow (\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^+))$ ein Ringhomomorphismus, so gibt es genau einen Morphismus der Kategorie (VL) $\varphi: Y \longrightarrow X$, so daß $f = g \circ h$, wobei g der durch φ induzierte Ringhomomorphismus $(\Gamma(X, \mathcal{O}_X), \Gamma(X, \mathcal{O}_X^+)) \longrightarrow (\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^+))$ ist.

Sei ein Paar von Ringen (A, B) fixiert. Wir setzen $X = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(b) \geq 0$ für jedes $b \in B\}$ und versehen X mit der Teilraumtopologie von $\operatorname{Spv} A$. Sei $\mathcal{A}$ die Garbe der algebraischen Funktionen auf X. Jede Bewertung x von A mit $x \in X$ läßt sich fortsetzen zu einer Bewertung v_x von $A_{\operatorname{supp}(x)} = \mathcal{A}_x$. Der Träger von v_x ist das maximale Ideal von $\mathcal{A}_x$. Es folgt aus der Definition der Topologie von $\operatorname{Spv} A$, daß $(X, \mathcal{A}, (v_x | x \in X))$ die Eigenschaft (2) erfüllt. Also ist $X = (X, \mathcal{A}, (v_x | x \in X))$ ein Objekt der Kategorie (VL). Es gilt offensichtlich

Satz 1.5.7. X zusammen mit dem kanonischen Ringhomomorphismus $(A, B) \longrightarrow (\Gamma(X, \mathcal{A}), \Gamma(X, \mathcal{A}^+))$ löst das Problem (*).

Proposition 1.5.8. Seien $f_0, \ldots, f_n$ Elemente von A. Wir setzen $U = X \cap R_A(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$. Dann ist $H^0(U, \mathcal{A}) = A_{f_0}$ und $H^i(U, \mathcal{A}) = 0$ für $i > 0$.

Beweis: Sei $f: X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ die Trägerabbildung. Sei $g: \operatorname{Spec} A \longrightarrow X$ die Abbildung, die ein Primideal $\mathfrak{p}$ auf die triviale Bewertung mit Träger $\mathfrak{p}$ abbildet. Für jedes

$V = X \cap R_A(\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_m}{g_0})$ gilt $f(V) = g^{-1}(V) = D(g_0)$. Sei $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe des Schemas Spec A. Es ist g stetig mit $g_*(\mathcal{O}) = f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}$ und $R^k g_* \mathcal{O} = 0$ für $k > 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. In der Situation von (1.5.8) ist $\Gamma(U, \mathcal{A}^+)$ der ganze Abschluß von $B[\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}]$ in A_{f_0}.

2. Topologische Ringe

2.1. Nichtarchimedisch topologisierte Ringe

Sei A ein topologischer Ring und sei T eine Teilmenge von A. T heißt beschränkt, wenn es zu jeder Nullumgebung U von A eine Nullumgebung V von A gibt mit $\{v \cdot t \mid v \in V, t \in T\} \subseteq U$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $T(n) = \{t_1 \cdot \ldots \cdot t_n \mid t_1, \ldots, t_n \in T\}$. T heißt potenzbeschränkt, wenn $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} T(n)$ beschränkt ist. Ein $a \in A$ heißt potenzbeschränkt, wenn $\{a\}$ potenzbeschränkt ist.

T heißt topologisch nilpotent, wenn $\big(T(n) \mid n \in \mathbb{N}\big)$ eine Nullfolge ist, d.h. zu jeder Nullumgebung U von A gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $T(n) \subseteq U$ für jedes $n \geq N$. Ein $a \in A$ heißt topologisch nilpotent, wenn $\{a\}$ topologisch nilpotent ist. Es gilt das einfache Lemma

Lemma 2.1.1. i) Eine endliche Vereinigung beschränkter Mengen ist beschränkt.
ii) Jede endliche Teilmenge von A ist beschränkt.
iii) Sind $T_1, \ldots, T_n$ beschränkte Teilmengen von A, so sind $\{t_1 \cdot \ldots \cdot t_n \mid t_i \in T_i$ für $i = 1, \ldots, n\}$ und $\{t_1 + \ldots + t_n \mid t_i \in T_i$ für $i = 1, \ldots, n\}$ beschränkt.
iv) Eine endliche Vereinigung potenzbeschränkter Mengen ist potenzbeschränkt.
v) Eine Menge, die beschränkt und topologisch nilpotent ist, ist potenzbeschränkt.
vi) Eine endliche Vereinigung von Mengen, die beschränkt und topologisch nilpotent sind, ist topologisch nilpotent.
vii) Ist T_1 potenzbeschränkt und T_2 topologisch nilpotent, so ist $\{t_1 \cdot t_2 \mid t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\}$ topologisch nilpotent.

Definition 2.1.2. Ein nichtarchimedisch topologisierter Ring (kurz: nat-Ring) ist ein topologischer Ring, der ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen besitzt, die additiv abgeschlossen sind.

Für den Rest dieses Paragraphen fixieren wir einen nat-Ring A.

Unmittelbar aus der Definition (2.1.2) folgt

Lemma 2.1.3. Sei T eine Teilmenge von A und sei T' die von T erzeugte Untergruppe von A. Dann gilt

i) T' ist genau dann beschränkt, wenn T beschränkt ist.
ii) T' ist genau dann potenzbeschränkt, wenn T potenzbeschränkt ist.
iii) T' ist genau dann topologisch nilpotent, wenn T topologisch nilpotent ist.

Korollar 2.1.4. i) Eine Teilmenge T von A ist genau dann potenzbeschränkt, wenn der von T erzeugte Unterring von A beschränkt ist.
ii) Seien $T_1, \ldots, T_n$ Teilmengen von A, die multiplikativ abgeschlossen und beschränkt sind. Dann ist der von $T_1 \cup \ldots \cup T_n$ erzeugte Unterring von A beschränkt.

Beweis: i) Ohne Einschränkung ist $1 \in T$. Der von T erzeugte Unterring von A ist die von $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(n)$ erzeugte Untergruppe von A. Somit folgt die Behauptung aus (2.1.3.i).
ii) Nach (2.1.1.iv) ist $T_1 \cup \ldots \cup T_n$ potenzbeschränkt. Deshalb folgt die Behauptung aus (i).

Definition 2.1.5. Die Menge aller potenzbeschränkten Elemente von A wird mit A° bezeichnet. Die Menge aller topologisch nilpotenten Elemente von A wird mit $A^{\circ\circ}$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1.6. Sind A_1 und A_2 zwei beschränkte Unterringe von A, so ist nach (2.1.4.ii) auch der von A_1 und A_2 erzeugte Unterring beschränkt. Deshalb ist die Vereinigung aller beschränkten Unterringe von A ein Unterring von A. Nach (2.1.4.i) ist dieser Unterring gleich A°.

Proposition 2.1.7. i) Der Unterring A° von A ist ganz abgeschlossen in A.
ii) $A^{\circ\circ}$ ist ein Radikalideal von A°.

Beweis: i) Sei $a \in A$ ganz über A°. Nach (2.1.6) ist a ganz über einem beschränkten Unterring von A. Aus (2.1.1.ii und iii) folgt, daß a potenzbeschränkt ist.
ii) Nach (2.1.1.ii und v) ist $A^{\circ\circ} \subseteq A^\circ$. Nach (2.1.1.ii und vi) sowie (2.1.3.iii) ist $A^{\circ\circ}$ additiv abgeschlossen. Nach (2.1.1.vii) ist $A^{\circ\circ}$ ein Ideal von A°. Sei nun $a \in A$ mit $a^m \in A^{\circ\circ}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $a \in A^{\circ\circ}$. Sei eine Nullumgebung U von A gegeben. Wir wählen eine Nullumgebung V von A, so daß $a^i \cdot v \in U$ für jedes $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ und jedes $v \in V$. Sei weiterhin N eine natürliche Zahl, so daß $(a^m)^n \in V$ für jedes $n \geq N$. Dann ist $a^n \in U$ für jedes $n \geq m \cdot N$.

Seien S und T Teilmengen von A. Die von $\{s \cdot t \mid s \in S, t \in T\}$ erzeugte Untergruppe von A wird mit $S \cdot T$ bezeichnet. Wir definieren T^n, $n \in \mathbb{N}_0$, induktiv durch $T^0 = \mathbb{Z} \cdot 1$ und $T^n = T^{n-1} \cdot T$ für $n \geq 1$. Ist $S = \{s\}$ einelementig, so schreiben wir auch $s \cdot T$ statt $\{s\} \cdot T$. Ist $f: A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und ist R eine Teilmenge von B, so schreiben wir auch $S \cdot R$ statt $f(S) \cdot R$.

Wir beschreiben nun zwei wichtige Konstruktionen für nat-Ringe, nämlich die topologischen Polynomringe über nat-Ringen und die topologischen Lokalisationen von nat-Ringen. Zunächst die topologischen Polynomringe.

Sei I eine Indexmenge. Mit $\mathbb{N}_0(I)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $\nu: I \longrightarrow \mathbb{N}_0$, so daß $\nu(i) = 0$ für fast alle $i \in I$. Sei $T = (T_i \mid i \in I)$ eine Familie von Teilmengen von A, so daß $T_i^m \cdot U$ eine Nullumgebung von A ist für jedes $i \in I$, jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede Nullumgebung U von A. Für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)$ setzen wir

$$T^\nu = \prod_{\substack{i \in I \\ \nu(i) \neq 0}} T_i^{\nu(i)}.$$

(Ist ν die konstante Abbildung auf 0, so sei $T^\nu = \mathbb{Z} \cdot 1$). Es ist dann $T^\nu \cdot U$ eine Nullumgebung für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)$ und jede Nullumgebung U.

Wir betrachten den Polynomring $A[X] = A[X_i \mid i \in I]$. Für jede Nullumgebung U von A setzen wir $U_{[X]} = \{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0(I)} a_\nu X^\nu \in A[X_i \mid i \in I] \mid a_\nu \in T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)\}$.

Satz 2.1.8. Die Menge $\{U_{[X]} \mid U$ Nullumgebung von $A\}$ ist eine Nullumgebungsbasis einer Ringtopologie auf $A[X]$. Dieser topologische Ring wird mit $A[X_i \mid i \in I]_T = A[X]_T$ bezeichnet.

Beweis: Jedes $U_{[X]}$ ist eine Untergruppe von $A[X]$. Sind U und V Nullumgebungen von A mit $U \cdot U \subseteq V$, so gilt $U_{[X]} \cdot U_{[X]} \subseteq V_{[X]}$. Gegeben seien ein Element $a = \Sigma\, a_\nu X^\nu$ von $A[X]$ und eine Nullumgebung U von A. Es ist noch zu zeigen, daß es eine Nullumgebung V von A gibt mit $a \cdot V_{[X]} \subseteq U_{[X]}$.

Da $T^\nu \cdot U$ eine Nullumgebung von A ist für jedes ν und da $a_\nu = 0$ für fast alle ν, gibt es eine Nullumgebung V von A, so daß $a_\nu \cdot V \subseteq T^\nu \cdot U$ für jedes ν. Es ist dann $a \cdot V_{[X]} \subseteq U_{[X]}$.

Satz 2.1.9 (Universelle Eigenschaft von $A[X]_T$). $A[X]_T$ ist ein nat-Ring, der kanonische Ringhomomorphismus $h: A \longrightarrow A[X]_T$ ist stetig und die Menge $\{h(t) \cdot X_i \mid i \in I,\, t \in T_i\}$ ist potenzbeschränkt in $A[X]_T$. Sind B ein nat-Ring, $f: A \longrightarrow B$ ein stetiger Ringhomomorphismus und $(b_i \mid i \in I)$ eine Familie von Elementen von B, so daß die Menge $\{f(t) \cdot b_i \mid i \in I,\, t \in T_i\}$ potenzbeschränkt in B ist, so gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $g: A[X]_T \longrightarrow B$ mit $f = g \circ h$ und $g(X_i) = b_i$ für jedes $i \in I$.

Beweis: Wir setzen $H = \{h(t) \cdot X_i \mid i \in I,\, t \in T_i\}$. Für jede Nullumgebung U von A und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $H^n \cdot U_{[X]} \subseteq U_{[X]}$. Deshalb ist H potenzbeschränkt in $A[X]_T$.

Sei $g: A[X]_T \longrightarrow B$ der Ringhomomorphismus über A mit $g(X_i) = b_i$ für $i \in I$. Wir zeigen, daß g stetig ist. Sei U eine Nullumgebung von B, die eine Untergruppe von

B ist. Wir setzen $F = \{f(t) \cdot b_i \mid i \in I,\, t \in T_i\}$. Sei V eine Nullumgebung von B, so daß $F^m \cdot V \subseteq U$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Sei W eine Nullumgebung von A mit $f(W) \subseteq V$. Es ist dann $g(W_{[X]}) \subseteq U$.

Wir betrachten nun den Potenzreihenring
$A[\![X]\!] = A[\![X_i \mid i \in I]\!] = \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0(I)} a_\nu X^\nu \mid a_\nu \in A \text{ für jedes } \nu \in \mathbb{N}_0(I) \right\}$.
Sei

$$B := \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0(I)} a_\nu X^\nu \in A[\![X_i \mid i \in I]\!] \mid \text{für jede Nullumgebung } U \text{ von } A \text{ ist } a_\nu \in T^\nu \cdot U \text{ für fast alle } \nu \in \mathbb{N}_0(I) \right\}.$$

Für jede Nullumgebung U von A setzen wir $U_{\langle X \rangle} = \{\Sigma\, a_\nu X^\nu \in B \mid a_\nu \in T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)\}$.

Satz 2.1.10. *B ist ein Unterring von $A[\![X]\!]$. Die Menge $\{U_{\langle X \rangle} \mid U$ Nullumgebung von $A\}$ ist eine Nullumgebungsbasis einer Ringtopologie von B. Dieser topologische Ring wird mit $A\langle X_i \mid i \in I \rangle_T = A\langle X \rangle_T$ bezeichnet. Ist $T_i = \{1\}$ für jedes $i \in I$, so schreiben wir auch $A\langle X \rangle$ statt $A\langle X \rangle_T$.*

Beweis: Zunächst zeigen wir

(1) Seien U eine Nullumgebung von A und $\Sigma\, a_\nu X^\nu$ ein Element von B. Dann gibt es eine Nullumgebung V von A, so daß $a_\nu \cdot V \subseteq T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)$.

Sei V' eine Nullumgebung von A mit $V' \cdot V' \subseteq U$. Sei H eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0(I)$, so daß $a_\nu \in T^\nu \cdot V'$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus H$. Für diese ν gilt dann $a_\nu \cdot V' \subseteq T^\nu \cdot V' \cdot V' \subseteq T^\nu \cdot U$. Da $T^\nu \cdot U$ eine Nullumgebung von A ist für jedes ν, gibt es eine Nullumgebung V'' von A, so daß $a_\nu \cdot V'' \subseteq T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in H$. Für $V = V' \cap V''$ gilt dann (1).

Es ist klar, daß B eine Untergruppe von $A[\![X]\!]$ ist. Wir zeigen, daß B multiplikativ abgeschlossen ist in $A[\![X]\!]$. Seien $a = \Sigma\, a_\nu X^\nu$ und $b = \Sigma\, b_\nu X^\nu$ Elemente von B und sei $c = \Sigma\, c_\nu X^\nu$ das Produkt von a und b in $A[\![X]\!]$. Sei U eine Nullumgebung von A. Gemäß (1) wählen wir Nullumgebungen V und W von A, so daß $a_\nu \cdot V \subseteq T^\nu \cdot U$ und $b_\nu \cdot W \subseteq T^\nu \cdot U$ für jedes ν. Sei H eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0(I)$, so daß $a_\nu \in T^\nu \cdot W$ und $b_\nu \in T^\nu \cdot V$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus H$. Dann ist $a_\nu \cdot b_\mu \in T^{\nu+\mu} \cdot U$ für alle ν, μ mit $\nu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus H$ oder $\mu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus H$ (denn: Sei etwa $\nu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus H$. Dann ist $a_\nu \in T^\nu \cdot W$ und somit $a_\nu \cdot b_\mu \in T^\nu \cdot b_\mu \cdot W \subseteq T^\nu \cdot T^\mu \cdot U = T^{\nu+\mu} \cdot U$). Also ist $c_\nu \in T^\nu \cdot U$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus (H + H)$.

$U_{\langle X \rangle}$ ist eine Untergruppe von B für jede Nullumgebung U von A. Sind U und V Nullumgebungen von A mit $U \cdot U \subseteq V$, so ist $U_{\langle X \rangle} \cdot U_{\langle X \rangle} \subseteq V_{\langle X \rangle}$. Seien ein Element

$a = \Sigma\, a_\nu X^\nu$ von B und eine Nullumgebung U von A gegeben. Nach (1) gibt es eine Nullumgebung V von A, so daß $a_\nu \cdot V \subseteq T^\nu \cdot U$ für jedes ν. Es ist dann $a \cdot V_{\langle X \rangle} \subseteq U_{\langle X \rangle}$.

Offensichtlich gilt

Lemma 2.1.11. i) $A[X]_T$ ist ein dichter topologischer Unterring von $A\langle X \rangle_T$.
ii) Ist A hausdorffsch und T_i beschränkt für jedes $i \in I$, so sind $A[X]_T$ und $A\langle X \rangle_T$ hausdorffsch.

In dieser Arbeit beinhaltet die Bezeichnung vollständig auch die Eigenschaft hausdorffsch.

Proposition 2.1.12. Ist A vollständig und T_i beschränkt für jedes $i \in I$, so ist $A\langle X \rangle_T$ vollständig.

Beweis: Sei $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Cauchy-Netz in $A\langle X \rangle_T$, $a_\lambda = \Sigma\,(a_\lambda)_\nu X^\nu$. Für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)$ ist $\big((a_\lambda)_\nu\big)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Cauchy-Netz in A. Sei b_ν sein Grenzwert. Wir setzen $b = \Sigma\, b_\nu X^\nu \in A[\![X]\!]$. Wir wollen zeigen, daß $b \in B$ und $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ nach b konvergiert. Sei U eine Nullumgebung von A. Wir wählen ein $\lambda_0 \in \Lambda$, so daß $a_\lambda - a_\mu \in U_{\langle X \rangle}$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$ mit $\lambda \geq \lambda_0$ und $\mu \geq \lambda_0$. Es ist dann $b_\nu - (a_\mu)_\nu \in T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)$ und jedes $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_0$. Wir wählen eine endliche Teilmenge H von $\mathbb{N}_0(I)$, so daß $(a_{\lambda_0})_\nu \in T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus H$. Dann ist $b_\nu \in T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I) \setminus H$. Also $b \in B$. Es ist $b - a_\mu \in U_{\langle X \rangle}$ für jedes $\mu \in \Lambda$ mit $\mu \geq \lambda_0$. Deshalb ist b der Limes von $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in $A\langle X \rangle_T$.

Korollar 2.1.13. Ist A vollständig und T_i beschränkt für jedes $i \in I$, so ist $A\langle X \rangle_T$ die Vervollständigung von $A[X]_T$.

Korollar 2.1.14 (Universelle Eigenschaft von $A\langle X \rangle_T$). Sei A vollständig und T_i beschränkt für jedes $i \in I$.

$A\langle X \rangle_T$ ist ein vollständiger nat-Ring, der kanonische Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow A\langle X \rangle_T$ ist stetig und $\{h(t) \cdot X_i | i \in I, t \in T_i\}$ ist potenzbeschränkt in $A\langle X \rangle_T$. Sind B ein vollständiger nat-Ring, $f : A \longrightarrow B$ ein stetiger Ringhomomorphismus und $(b_i | i \in I)$ eine Familie von Elementen von B, so daß $\{f(t) \cdot b_i | i \in I, t \in T_i\}$ potenzbeschränkt in B ist, so gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $g : A\langle X \rangle_T \longrightarrow B$ mit $f = g \circ h$ und $g(X_i) = b_i$ für jedes $i \in I$.

Wir beschreiben nun die topologischen Lokalisationen von nat-Ringen. Man kann diese durch folgende universelle Eigenschaft charakterisieren.

Satz 2.1.15. Sei $S = (s_i | i \in I)$ eine Familie von Elementen von A und sei $T = (T_i | i \in I)$ eine Familie von Teilmengen von A, so daß $T_i^m \cdot U$ eine Nullumgebung von A ist für jedes $i \in I$, jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede Nullumgebung U von A.

Dann gibt es einen nat-Ring B und einen stetigen Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow B$, so daß gilt: $h(s_i)$ ist invertierbar in B für jedes $i \in I$ und die Menge $\{\frac{h(t)}{h(s_i)} \,|\, i \in I, \, t \in T_i\}$ ist potenzbeschränkt in B. Ist C ein nat-Ring und $f : A \longrightarrow C$ ein stetiger Ringhomomorphismus, so daß $f(s_i)$ invertierbar in C ist für jedes $i \in I$ und die Menge $\{\frac{f(t)}{f(s_i)} \,|\, i \in I, \, t \in T_i\}$ potenzbeschränkt in C ist, so gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $g : B \longrightarrow C$ mit $f = g \circ h$.

Der topologische Ring B wird mit $A\left(\frac{T_i}{s_i} \,|\, i \in I\right) = A\left(\frac{T}{S}\right)$ bezeichnet und seine Vervollständigung wird mit $A\left\langle\frac{T_i}{s_i} \,|\, i \in I\right\rangle = A\left\langle\frac{T}{S}\right\rangle$ bezeichnet.

Beweis: Sei G das von $(s_i | i \in I)$ erzeugte multiplikative System von A. In der Lokalisation $G^{-1}A$ betrachten wir die Mengen $E_i = \{\frac{t}{s_i} \,|\, t \in T_i\}$ $(i \in I)$ und $E = \{\frac{t}{s_i} \,|\, i \in I, \, t \in T_i\} = \bigcup_{i \in I} E_i$. Sei D der von E erzeugte Unterring von $G^{-1}A$. Wir versehen $G^{-1}A$ mit der Gruppentopologie, so daß $\{D \cdot U \,|\, U \text{ Nullumgebung von } A\}$ ein Fundamentalsystem in Nullumgebungen ist. Diese Topologie ist eine Ringtopologie auf $G^{-1}A$, denn: Sei eine Nullumgebung $D \cdot U$ von $G^{-1}A$ gegeben. Wir wählen eine Nullumgebung V von A mit $V \cdot V \subseteq U$. Dann ist $(D \cdot V) \cdot (D \cdot V) = (D \cdot D) \cdot (V \cdot V) = D \cdot (V \cdot V) \subseteq D \cdot U$. Seien nun ein Element b von $G^{-1}A$ und eine Nullumgebung $D \cdot U$ von $G^{-1}A$ gegeben. Wir suchen eine Nullumgebung W von $G^{-1}A$ mit $b \cdot W \subseteq D \cdot U$. Wir schreiben $b = a \cdot s_{i_1}^{-n_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}^{-n_k}$ mit $i_1, \ldots, i_k \in I$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$ und $a \in A$. Sei V eine Nullumgebung von A mit $a \cdot V \subseteq U$. Dann gilt für die Nullumgebung $W = D \cdot (T_{i_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot T_{i_k}^{n_k} \cdot V)$ von $G^{-1}A$: $\quad b \cdot W = (D \cdot E_{i_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k}^{n_k}) \cdot a \cdot V \subseteq D \cdot a \cdot V \subseteq D \cdot U$.
Die kanonische Abbildung $h : A \longrightarrow G^{-1}A$ ist stetig, da $1 \in D$. Die Menge D ist beschränkt in $G^{-1}A$ (und somit $\{\frac{h(t)}{h(s_i)} \,|\, i \in I, \, t \in T_i\}$ potenzbeschränkt in $G^{-1}A$), da $D \cdot D = D$. Seien C ein nat-Ring und $f : A \longrightarrow C$ ein stetiger Ringhomomorphismus, so daß jedes $f(s_i)$ invertierbar in C ist und die Menge $H = \{\frac{f(t)}{f(s_i)} \,|\, i \in I, t \in T_i\}$ potenzbeschränkt in C ist. Nach (2.1.4.i) ist der von H erzeugte Unterring F von C beschränkt in C. Sei $g : G^{-1}A \longrightarrow C$ der Ringhomomorphismus mit $f = g \circ h$. Es ist $g(D) \subseteq F$. Sei eine Nullumgebung U von C gegeben. Wir wählen eine Nullumgebung V von C mit $F \cdot V \subseteq U$ und eine Nullumgebung W von A mit $f(W) \subseteq V$. Für die Nullumgebung $D \cdot W$ von $G^{-1}A$ gilt $g(D \cdot W) = g(D) \cdot f(W) \subseteq F \cdot V \subseteq U$. Also ist g stetig.

Bemerkung 2.1.16. i) Sei J das von $\{1 - s_i X_i \,|\, i \in I\}$ erzeugte Ideal von

$A[X]_T = A[X_i \,|\, i \in I]_T$. Wir versehen $A[X]_T/J$ mit der Quotiententopologie von $A[X]_T$. Dann erfüllt $A \longrightarrow A[X]_T/J$ die universelle Eigenschaft aus (2.1.15), und somit $A\left(\frac{T}{S}\right) = A[X]_T/J$.

ii) Aus (2.1.15) erhält man speziell: Für eine beliebige Teilmenge T von A ist $h : A \longrightarrow A\left(\frac{T\cup\{1\}}{1}\right)$ (bzw. $h : A \longrightarrow A\left(\frac{\{1\}}{t} \,|\, t \in T\right)$) der universelle stetige Ringhomomorphismus von A in einen nat-Ring, so daß $h(T)$ potenzbeschränkt ist (bzw. jedes Element aus $h(T)$ invertierbar ist und $h(T)^{-1}$ potenzbeschränkt ist).

iii) Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß $s_i \in T_i$ für jedes $i \in I$, denn es ist $A\left(\frac{T_i}{s_i} \,|\, i \in I\right) = A\left(\frac{T_i\cup\{s_i\}}{s_i} \,|\, i \in I\right)$.

iv) Für endliche Familien $(s_i| \, i = 1,\ldots,n)$ und $(T_i| \, i = 1,\ldots,n)$ mit $s_i \in T_i$ für $i = 1,\ldots,n$ gilt $A\left(\frac{T_1}{s_1},\ldots,\frac{T_n}{s_n}\right) = A\left(\frac{T}{s}\right)$ mit $T = T_1 \cdot \ldots \cdot T_n$ und $s = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$.

v) Für $A\left(\frac{\{t_1,\ldots,t_n\}}{s}\right)$ und $A\left\langle\frac{\{t_1,\ldots,t_n\}}{s}\right\rangle$ schreiben wir auch $A\left(\frac{t_1,\ldots,t_n}{s}\right)$ und $A\left\langle\frac{t_1,\ldots,t_n}{s}\right\rangle$.

Trägt A die diskrete Topologie, so sind die Polynomringe $A[X_i| \, i \in I]$, versehen mit der diskreten Topologie, die topologischen Polynomringe $A[X]_T$ und $A\langle X\rangle_T$, und sind die Lokalisationen $G^{-1}A$, versehen mit der diskreten Topologie, die topologischen Lokalisationen $A\left(\frac{T}{S}\right)$ und $A\left\langle\frac{T}{S}\right\rangle$.

Abschließend beschreiben wir noch eine dritte Konstruktion für nat-Ringe. Sei $T = (T_i| \, i \in I)$ eine Familie von Teilmengen von A. Wir betrachten wieder den Potenzreihenring $A[\![X_i| \, i \in I]\!] = A[\![X]\!]$ und setzen

$$\begin{aligned} C = \big\{\Sigma\, a_\nu X^\nu \in A[\![X]\!] \,|\, &\text{ es gibt eine beschränkte Teilmenge } K \text{ von } A, \\ &\text{so daß } a_\nu \in T^\nu \cdot K \text{ für jedes } \nu \in \mathbb{N}_0(I)\big\}. \end{aligned}$$

Für jede Nullmenge U von A setzen wir $U_{\langle\langle X\rangle\rangle} = \big\{\Sigma\, a_\nu X^\nu \in C \,|\, a_\nu \in T^\nu \cdot U$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0(I)\big\}$. Es gilt die einfache Proposition

Proposition 2.1.17. C ist ein Untering von $A[\![X]\!]$. Die Menge $\{U_{\langle\langle X\rangle\rangle} | \, U$ Nullumgebung von $A\}$ ist eine Nullumgebungsbasis einer Ringtopologie von C. Dieser topologische Ring wird mit $A\langle\langle X_i| \, i \in I\rangle\rangle_T = A\langle\langle X\rangle\rangle_T$ bezeichnet. Ist $T_i = \{1\}$ für jedes $i \in I$, so schreiben wir auch $A\langle\langle X_i| \, i \in I\rangle\rangle = A\langle\langle X\rangle\rangle$ statt $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$.

Es ist $A\langle X_i| \, i \in I\rangle$ ein topologischer Unterring von $A\langle\langle X_i| \, i \in I\rangle\rangle$. Ist A vollständig, so ist auch $A\langle\langle X_i| \, i \in I\rangle\rangle$ vollständig.

2.2. Tate-Ringe

Definition 2.2.1. Ein Tate-Ring ist ein nat-Ring, der eine potenzbeschränkte Nullumgebung und eine topologisch nilpotente Einheit besitzt.

Eine Tate-Topologie eines Ringes A ist eine Topologie $\mathcal{T}$ auf A, so daß $(A, \mathcal{T})$ ein Tate-Ring ist.

2.2.2. Einige Beispiele tatescher Ringe.

1) Da wir Bewertungen additiv schreiben, wollen wir auch Normen und Seminormen auf Ringen additiv schreiben. Wir folgen der Notation aus [BGR]. Sei A ein Ring. Eine Filtration von A ist eine Abbildung $v : A \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$, so daß für alle $x, y \in A$ gilt

   a) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, $v(-x) = v(x)$
   b) $v(x \cdot y) \geq v(x) + v(y)$
   c) $v(0) = \infty$, $v(1) \geq 0$

   Ist $v(1) \neq 0$, so ist $v(x) = \infty$ für jedes $x \in A$. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ setzen wir $A(r) = \{a \in A \,|\, v(a) > r\}$. Indem wir $\{A(r) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$ als Nullumgebungsbasis wählen, erhalten wir eine Ringtopologie auf A. Jedes $A(r)$ ist additiv geschlossen, multiplikativ abgeschlossen und beschränkt.

   Sei nun A eine Algebra über einem Körper k. Die Einschränkung von v auf k sei eine nichttriviale Bewertung von k. Jedes $a \in k^*$ mit $v(a) > 0$ ist eine topologisch nilpotente Einheit von A. Also ist A ein Tate-Ring. Insbesondere ist jede nichtarchimedische Banach-Algebra tatesch.

   Die Filtration v von A läßt sich fortsetzen zu einer Filtration w auf $A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ durch $w(\Sigma\, a_\nu X^\nu) = \min\{v(a_\nu) \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$. Die durch w definierte Topologie stimmt überein mit der in (2.1) definierten Topologie von $A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$.

   Eine Teilmenge B von A ist genau dann beschränkt, wenn $v(B)$ nach unten beschränkt ist, d.h. wenn $B \subseteq A(r)$ für ein $r \in \mathbb{R}$ (denn: für jedes $x \in k$ und jedes $y \in A$ ist $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$). Also läßt sich v fortsetzen zu einer Abbildung $u : A\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ durch $u(\Sigma\, a_\nu X^\nu) = \inf\{v(a_\nu) \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$. u ist eine Filtration auf $A\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$. Die durch u definierte Topologie auf $A\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ ist die in (2.1) definierte Topologie auf $A\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$.

   Ist v eine Bewertung von A, so sind auch w und u Bewertungen.

2) Sei A ein Ring und sei s ein Nichtnullteiler von A. Sei A_s die Lokalisation von A nach s. Wir versehen A_s mit der Gruppentopologie, so daß die Menge von Untergruppen $\{s^n A \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen bildet. Diese Topologie ist eine Ringtopologie von A_s. Der Unterring A von A_s ist offen und beschränkt. s ist eine topologisch nilpotente Einheit von A_s. Deshalb ist A_s ein Tate-Ring.

3) Sei k ein Körper und sei v eine Bewertung von k. Wir versehen k mit der Bewertungstopologie von v. k ist genau dann ein Tate-Ring, wenn v mikrobial ist.

4) (ohne Beweis) Jede Tate-Topologie eines Körpers ist eine Körpertopologie. Wir bestimmen die Tate-Topologien von $\mathbb{Q}$. Sei P die Menge aller Primzahlen. Es gibt eine Bijektion von der Menge aller endlichen Teilmengen von P auf die Menge aller Tate-Topologien von $\mathbb{Q}$. Dabei wird eine endliche Teilmenge T von P auf folgende Tate-Topologie abgebildet. Sei A die Lokalisation von $\mathbb{Z}$ nach dem multiplikativen System aller $n \in \mathbb{Z}$, so daß $n \neq 0$ und kein Element von T ein Teiler von n ist. Sei s das Produkt der Elemente von T. Die Gruppentopologie auf $\mathbb{Q}$, die $\{s^n A \mid n \in \mathbb{N}\}$ als Fundamentalsystem von Nullumgebungen hat, ist nach Beispiel 2 eine Tate-Topologie.
Die leere Teilmenge von P entspricht der Topologie, die $\mathbb{Q}$ als einzige Nullumgebung hat. Die Bewertungstopologien zu den nichttrivialen Bewertungen von $\mathbb{Q}$ sind die Tate-Topologien $\mathcal{T}$ von $\mathbb{Q}$, so daß die Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, \mathcal{T})$ ein Körper ist.

5) Sei A ein Ring. Sei $\mathcal{T}$ die Ringtopologie von A, die A als einzige Nullumgebung besitzt (d.h. $\mathcal{T} = \{\emptyset, A\}$). $\mathcal{T}$ ist eine Tate-Topologie von A. Sie ist die einzige Tate-Topologie von A, in der A beschränkt ist. (Denn: Sei A versehen mit einer Tate-Topologie, so daß A beschränkt ist. Sei s eine topologisch nilpotente Einheit. Zu jeder Nullumgebung U gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $A = s^n A \subseteq U$.) Ist $A = \mathbb{Z}$, so ist $\mathcal{T}$ die einzige Tate-Topologie von A.

6) Die diskrete Topologie auf einem Ring ist genau dann eine Tate-Topologie, wenn der Ring der Nullring ist.

Jeder Tate-Ring hat die in Beispiel 2 angegebene Form. Bevor wir dies beweisen noch eine einfache Beobachtung.

Lemma 2.2.3. Sei A ein topologischer Ring. Sei B ein offener Unterring von A und sei s eine topologisch nilpotente Einheit von A mit $s \in B$. Dann ist $A = B_s$.

Satz 2.2.4. Sei A ein Tate-Ring. Es gibt einen Unterring A_0 von A und ein $s \in A_0$, so daß $\{s^n A_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von A ist.

Beweis: Seien U eine potenzbeschränkte Nullumgebung und s eine topologisch nilpotente Einheit von A. Nach (2.1.1) ist $U \cup \{s\}$ potenzbeschränkt. Somit ist nach (2.1.4.i) der von $U \cup \{s\}$ erzeugte Unterring A_0 von A beschränkt. Sei ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Da $x \longmapsto s^n x$ ein Homöomorphismus von A ist (denn s^n ist eine Einheit von A) und da A_0 eine Nullumgebung ist, ist $s^n A_0$ eine Nullumgebung von A. Sei eine Nullumgebung V von A gegeben. Da A_0 beschränkt und s topologisch nilpotent ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $s^n A_0 \subseteq V$.

Definition 2.2.5. Sei A ein Tate-Ring.

i) Ein Definitionstupel von A ist ein Paar (A_0, s) bestehend aus einem Unterring A_0 von A und einem Element s von A_0, so daß $\{s^n A_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von A ist.

ii) Ein Unterring A_0 von A heißt Definitionsring von A, wenn es ein $s \in A_0$ gibt, so daß (A_0, s) ein Definitionstupel von A ist.

Nach (2.2.4) besitzt jeder Tate-Ring einen Definitionsring. In Ergänzung zu Beispiel 4 aus (2.2.2) kann man zeigen, daß jede Tate-Topologie von $\mathbb{Q}$ genau einen Definitionsring hat.

Proposition 2.2.6. Ist (A_0, s) ein Definitionstupel eines Tate-Rings A, so ist s eine topologisch nilpotente Einheit von A und $A = (A_0)_s$.

Beweis: Sei t eine topologisch nilpotente Einheit von A. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $t^n \in sA_0$. Also ist s eine Einheit von A. Aus (2.2.3) folgt $A = (A_0)_s$.

Proposition 2.2.7. Sei A ein Tate-Ring.

i) Ein Unterring A_0 von A ist genau dann ein Definitionsring von A, wenn A_0 offen und beschränkt ist.

ii) Ist A_0 ein Definitionsring von A und s ein Element von A_0, so ist (A_0, s) genau dann ein Definitionstupel von A, wenn s eine topologisch nilpotente Einheit von A ist.

iii) Ist s eine topologisch nilpotente Einheit von A, so gibt es einen Unterring A_0 von A, so daß (A_0, s) ein Definitionstupel von A ist.

Beweis: i) Sei A_0 ein offener und beschränkter Unterring von A. Sei s eine topologisch nilpotente Einheit von A. Da A_0 offen ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n \in A_0$. Genauso wie im Beweis von (2.2.4) zeigt man, daß (A_0, s^n) ein Definitionstupel von A ist.

Der Beweis von (ii) und (iii) ergibt sich aus dem Beweis von (2.2.4).

Proposition 2.2.8. Seien A, B Tate-Ringe und $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Es sind äquivalent:

i) f ist stetig.

ii) Zu jedem Definitionstupel (A_0, s) von A, gibt es ein Definitionstupel (B_0, t) von B, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$ und $f(s) = t$.

iii) Zu jedem Definitionsring B_0 von B gibt es ein Definitionstupel (A_0, s) von A, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$ und $\big(B_0, f(s)\big)$ ein Definitionstupel von B ist.

Beweis: i) $\Longrightarrow$ ii): Sei (A_0, s) ein Definitionstupel von A. $f(s)$ ist eine topologisch nilpotente Einheit von B. Nach (2.2.7.iii) gibt es einen Unterring B_1 von B, so daß $\big(B_1, f(s)\big)$ ein Definitionstupel von B ist. Da B_1 offen ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $f(s)^n f(A_0) = f(s^n A_0) \subseteq B_1$. Deshalb ist $f(A_0)$ beschränkt in B. Sei B_0 der von B_1 und $f(A_0)$ erzeugte Unterring von B. B_0 ist nach (2.1.4.ii) beschränkt und somit nach (2.2.7.i) ein Definitionsring von B. Nach (2.2.7.ii) ist $\big(B_0, f(s)\big)$ ein Definitionstupel von B.

i) $\Longrightarrow$ iii): Sei B_0 ein Definitionsring von B. Es ist $f^{-1}(B_0)$ offen in A. Sei A_1 ein Definitionsring von A. Nach (2.2.7.i) ist $A_0 := A_1 \cap f^{-1}(B_0)$ ein Definitionsring von A. Wir wählen ein $s \in A_0$, so daß (A_0, s) ein Definitionstupel von A ist. Nach (2.2.7.ii) ist $\big(B_0, f(s)\big)$ ein Definitionstupel von B.

Ist (A_0, s) ein Definitionstupel eines Tate-Ringes A, so ist eine Teilmenge B von A genau dann beschränkt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $B \subseteq s^{-n} A_0$. Aus (2.2.8) erhält man

Korollar 2.2.9. Ein stetiger Ringhomomorphismus zwischen Tate-Ringen bildet beschränkte Teilmengen auf beschränkte Teilmengen ab.

Proposition 2.2.10. Sei K ein vollständiger Tate-Ring. K besitze einen noetherschen Definitionsring und sei ein Körper. Dann ist K° ein diskreter Rang 1 Bewertungsring von K, der endlich über jedem noetherschen Definitionsring von K ist. Die Topologie von K ist die durch K° gegebene Bewertungstopologie.

Zum Beweis von (2.2.10) formulieren wir zwei Lemmata, die wir auch später noch benötigen werden.

Lemma 2.2.11. Sei A ein noetherscher Ring, der ein Primideal der Höhe ≥ 2 besitzt. Dann hat A unendlich viele Primideale der Höhe 1.

Beweis: Angenommen, A habe endlich viele Primideale der Höhe 1. Seien dies die Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Seien $\mathfrak{p}_{n+1}, \ldots, \mathfrak{p}_m$ die minimalen Primideale von A. Nach [M], 12.I ist jede Nichteinheit von A in einem Primideal der Höhe ≤ 1 enthalten. Also ist $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_m$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A. Hieraus folgt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ und damit $\mathrm{ht}\,(\mathfrak{p}) \leq 1$.

Lemma 2.2.12. Sei A ein noetherscher Ring. Es existiere ein $s \in A$, so daß s in keinem minimalen Primideal von A liegt und die Lokalisation A_s nur endlich viele Primideale der Höhe 1 besitzt. Dann hat A nur endlich viele Primideale und jedes Primideal von A hat eine Höhe ≤ 1.

Beweis: Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A der Höhe 1. Ist $s \in \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}/sA$ ein minimales Primideal des Ringes A/sA. Ist $s \notin \mathfrak{p}$, so ist die Lokalisation $\mathfrak{p}_s$ ein Primideal der Höhe 1 von A_s. Also hat A nur endlich viele Primideale der Höhe 1. Nach (2.2.11) hat jedes Primideal von A eine Höhe ≤ 1.

Beweis von (2.2.10): Sei A ein noetherscher Definitionsring von K. Wir wählen ein $s \in A$, so daß (A, s) ein Definitionstupel von K ist. Da gilt $A_s = K$, folgt aus (2.2.12): A hat nur endlich viele Primideale und jedes Primideal von A hat eine Höhe ≤ 1. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ die von (0) verschiedenen Primideale von A (A besitzt ein von (0) verschiedenes Primideal, denn sonst wäre A ein Körper und damit K nicht hausdorffsch). A ist ein semilokaler Ring mit den maximalen Idealen $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$. Es ist $s \in \mathfrak{m}_i$ für $i = 1, \ldots, n$ (denn $A_s = K$). Also ist $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n$ das Radikal von sA in A und somit stimmen die sA-adische und $\mathfrak{m}$-adische Topologie auf A überein. Da A vollständig in der sA-adischen Topologie ist, gilt $A = \prod_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{m}_i}$. Hieraus folgt $n = 1$, da A integer ist. Wir haben also gezeigt: A ist ein lokaler Integritätsbereich der Dimension 1 und A ist vollständig in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A ist, und diese Topologie ist die Teilraumtopologie von K auf A. Sei B der ganze Abschluß von A in K. Nach [M], Cor. 2 in 31.C ist B endlich über A. Also ist B noethersch und beschränkt und offen und somit ein noetherscher Definitionsring von K. Wie eben gezeigt gilt dann: B ist ein lokaler Integritätsbereich der Dimension 1 und die Teilraumtopologie von K auf B ist die $\mathfrak{n}$-adische Topologie auf B, wobei $\mathfrak{n}$ das maixmale Ideal von B ist. Da B ganz abgeschlossen ist, ist B ein diskreter Bewertungsring von K.

Der Satz von Banach gilt ganz analog für topologische Moduln über Tate-Ringen. Man kann den klassischen Beweis übernehmen (siehe etwa [B_1], I.3.3).

Satz 2.2.13. Sei A ein topologischer Ring, der eine aus Einheiten bestehende Nullfolge besitzt (etwa A ein Tate-Ring). Seien M und N topologische A-Moduln, die vollständig sind und eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzen. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine stetige surjektive A-lineare Abbildung. Dann ist f eine offene Abbildung.

Man kann nun fast alle Ergebnisse aus [BGR], 3.7 über nichtarchimedische Banach-Algebren verallgemeinern auf vollständige Tate-Ringe. Wir erwähnen hier nur die folgenden beiden Punkte

Proposition 2.2.14. Sei A ein vollständiger Tate-Ring. Sei M ein vollständiger topologischer A-Modul, der eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt. Dann ist jeder Untermodul von M abgeschlossen in M genau dann, wenn M noethersch ist. Insbesondere ist jedes Ideal von A abgeschlossen in A genau dann, wenn A noethersch ist.

Proposition 2.2.15. Für einen vollständigen noetherschen Tate-Ring A gilt
i) Auf jedem endlich erzeugten A-Modul gibt es genau eine A-Modultopologie, die vollständig ist und eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt.
ii) Ist $f: M \to N$ eine A-lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten A-Moduln, so ist f strikt, wenn man M und N mit der Topologie aus (i) versieht.

Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt strikt, wenn sie stetig ist und die Restriktion $X \to f(X)$ offen ist.

Bemerkung 2.2.16. Sind M ein endlich erzeugter A-Modul, (A_0, s) ein Definitionstupel von A und $M_0 \subseteq M$ ein endlich erzeugter A_0-Modul mit $M = A \cdot M_0$, so ist $(s^n M_0 \mid n \in \mathbb{N})$ eine Nullumgebungsbasis für die in (2.2.15 i) definierte Topologie von M.

2.3. F-ADISCHE RINGE

Wir erinnern an den Begriff einer adischen Topologie. Sei A ein Ring. Eine Ringtopologie auf A heißt adisch, wenn es ein Ideal I von A gibt, so daß $\{I^n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. I nennt man ein Definitionsideal der Topologie.

Wir setzen hier nicht voraus, daß eine adische Topologie vollständig ist. Wir wollen im folgenden sowohl mit adischen Ringen mit endlich erzeugten Definitionsidealen als auch mit Tate-Ringen arbeiten. Deshalb fassen wir diese beiden Begriffe zusammen zu dem Begriff des f-adischen Ringes.

Definition 2.3.1. Ein f-adischer Ring ist ein topologischer Ring, der einen offenen Unterring besitzt, dessen Teilraumtopologie adisch mit endlich erzeugtem Definitionsideal ist.

Sei A ein Ring und A_0 ein Unterring von A. Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von A_0 mit Erzeugendensystem $i_1, \ldots, i_n$. Wir versehen A mit der Gruppentopologie, so daß $\{I^m | m \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Diese Topologie ist eine Ringtopologie (und damit A ein f-adischer Ring) genau dann, wenn es zu jedem $a \in A$ ein $\ell \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $a\, i_k^\ell \in A_0$ für $k = 1, \ldots, n$.

2.3.2. Einige Beispiele f-adischer Ringe.

1) Nach (2.2.4) ist jeder Tate-Ring f-adisch. Ein f-adischer Ring ist genau dann tatesch, wenn er eine topologisch nilpotente Einheit besitzt. Wir erhalten die oft benutzte Tatsache: Ist $A \longrightarrow B$ ein stetiger Ringhomomorphismus zwischen f-adischen Ringen und ist A tatesch, so ist auch B tatesch.
2) Ein adischer Ring mit endlich erzeugtem Definitionsideal ist f-adisch. Ein f-adischer Ring ist genau dann adisch, wenn er beschränkt ist.
3) Es ist leicht zu sehen, daß ein offener Unterring eines f-adischen Rings f-adisch ist (siehe 2.3.7).
4) Eine f-adische Topologie auf einem Körper ist diskret oder tatesch.
5) Sei k ein Körper und sei v eine Bewertung von k. Wir versehen k mit der Bewertungstopologie von v. k ist genau dann f-adisch, wenn v mikrobial oder trivial ist.

   Ein topologischer Körper, dessen Topologie sich durch eine mikrobiale oder triviale Bewertung definieren läßt, wird als f-adischer Körper bezeichnet.

6) Das Beispiel 2 aus (2.2.2) läßt sich verallgemeinern. Sei A ein Ring und sei S ein multiplikatives System von A bestehend aus Nichtnullteilern. Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von A. Wir versehen $S^{-1}A$ mit der Gruppentopologie, die $\{I^m | n \in \mathbb{N}\}$ als Fundamentalsystem von Nullumgebungen besitzt. Diese Topologie ist eine Ringtopologie auf $S^{-1}A$ (und damit $S^{-1}A$ f-adisch) genau dann, wenn es zu jedem $s \in S$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $I^n \subseteq sA$.

7) Seien A ein Ring und $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ eine endliche Teilmenge von A. In dem Polynomring $A[X_1, \ldots, X_m]$ betrachten wir den Unterring $B = A\big[i_s X_t \,|\, s \in \{1, \ldots, n\}, t \in \{1, \ldots, m\}\big]$. Die Menge $\{I^n \cdot B | n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Nullumgebungsbasis einer Ringtopologie auf $A[X_1, \ldots, X_m]$. Mit dieser Topologie ist $A[X_1, \ldots, X_m]$ ein f-adischer Ring.

Definition 2.3.3. Sei A ein f-adischer Ring. Ein Definitionsring von A ist ein offener Unterring von A, dessen Teilraumtopologie adisch ist. Ein Definitionstupel von A ist ein Paar (A_0, I), wobei A_0 ein Definitionsring von A und I ein Definitionsideal der adischen Topologie von A_0 ist.

Ist A ein Tate-Ring, so stimmen die in (2.2.5) und hier angegebene Definition eines Definitionsringes von A überein. Dies folgt aus (2.2.7.i) und (2.3.5.i).

Lemma 2.3.4. Sei A ein f-adischer Ring. Seien A_0, A_1 offene und beschränkte Unterringe von A mit $A_0 \subseteq A_1$. Sei I ein Ideal von A_0. (A_0, I) ist genau dann ein Definitionstupel von A, wenn $(A_1, I \cdot A_1)$ ein Definitionstupel von A ist.

Beweis: Sei (A_0, I) ein Definitionstupel von A. Zu zeigen ist, daß $\big\{(I \cdot A_1)^n | n \in \mathbb{N}\big\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von A ist. Wegen $I^n \subseteq (I \cdot A_1)^n$, ist $(I \cdot A_1)^n$ offen. Da A_1 beschränkt ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(I \cdot A_1)^n = I^n \cdot A_1 \subseteq I^k$.

Sei nun $(A_1, I \cdot A_1)$ ein Definitionstupel von$A$. Es ist zu zeigen, daß $\{I^n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von A ist. Wegen $I^n \subseteq (I \cdot A_1)^n$, genügt es zu zeigen, daß alle I^n offen sind. Da A_0 offen ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $(I \cdot A_1)^k \subseteq A_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $(I \cdot A_1)^{n+k} \subseteq I^n$.

Proposition 2.3.5. Sei A ein f-adischer Ring.

i) Ein Unterring A_0 von A ist genau dann ein Definitionsring von A, wenn A_0 offen und beschränkt ist.

ii) Sei A_0 ein Definitionsring von A. Die adische Topologie von A_0 besitzt ein endlich erzeugtes Definitionsideal.

Beweis: Sei A_0 ein offener und beschränkter Unterring von A. Wir zeigen, daß die Teilraumtopologie von A_0 adisch ist und ein endlich erzeugtes Definitionsideal besitzt. Sei (B, I) ein Definitionstupel von A, wobei I endlich erzeugt ist. Sei C der von A_0 und B erzeugte Unterring von A. Nach (2.1.4.ii) ist C beschränkt. Nach (2.3.4) ist $(C, I{\cdot}C)$ ein Definitionstupel. Da A_0 offen ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(I \cdot C)^n \subseteq A_0$. Daraus ersieht man, daß die Topologie von A_0 adisch ist mit Definitionsideal $J := (I \cdot C)^n$. J als Ideal von C betrachtet ist endlich erzeugt, sei $j_1, \ldots, j_m$ ein Erzeugendensystem. Sei K das von $j_1, \ldots, j_m$ erzeugte Ideal von A_0. Wir zeigen $J^2 \subseteq K \subseteq J$. Damit hat die Topologie von A_0 ein endlich erzeugtes Definitionsideal. Natürlich ist $K \subseteq J$. Seien $i, j \in J$ gegeben. Zu zeigen ist $ij \in K$. Wir schreiben $j = c_1 j_1 + \cdots + c_m j_m$ mit $c_1, \ldots, c_m \in C$. Dann ist $ij = (ic_1)\, j_1 + \cdots + (ic_m)\, j_m$ und $ic_1, \ldots, ic_m \in J \subseteq A_0$, also $ij \in K$.

Ab jetzt verstehen wir unter einem adischen Ring immer einen adischen Ring, der ein endlich erzeugtes Definitionsideal besitzt. Definitionsideale adischer Ringe werden im folgenden als endlich erzeugt vorausgesetzt. Insbesondere ist in einem Defintionstupel (A_0, I) eines f-adischen Ringes das Ideal I endlich erzeugt.

Korollar 2.3.6. Je zwei Definitionsringe eines f-adischen Ringes A enthalten einen gemeinsamen Definitionsring von A und sind in einem gemeinsamen Definitionsring von A enthalten. Die Vereinigung aller Definitionsringe von A ist A°.

Korollar 2.3.7. Sei A ein f-adischer Ring.

i) Jeder offene Unterring von A enthält einen Definitionsring von A (und ist somit f-adisch).
ii) Jeder beschränkte Unterring von A ist in einem Definitionsring von A enthalten.

Lemma 2.3.8. Seien A ein f-adischer Ring und (A_0, I) ein Definitionstupel von A. Seien $\hat{A}$ und $\hat{A}_0$ die Vervollständigungen von A und A_0. Da A_0 ein offener Unterring von A ist, ist $\hat{A}_0$ ein offener Unterring von $\hat{A}$. Es gelten

i) $\hat{A}$ ist f-adisch mit Definitionstupel $(\hat{A}_0, I \cdot \hat{A}_0)$.
ii) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \longleftarrow & \hat{A}_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longleftarrow & A_0 \end{array}$$

ist kokartesisch in der Kategorie der Ringe.

Beweis: i) Nach [B], III.2.12 Cor.2 ist $\hat{A}_0$ adisch mit Definitionsideal $I \cdot \hat{A}_0$.
ii) Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} & & \hat{A}_0 \arrow[ll, "\hat{i}"'] \arrow[dl, "g"] \\
& B \arrow[ul] & \\
A \arrow[uu, "j"] \arrow[ur, "f"] & & A_0 \arrow[ll, "i"] \arrow[uu, "j_0"']
\end{tikzcd}$$

mit $B = A \otimes_{A_0} \hat{A}_0$. Da $\hat{i}$ injektiv ist, ist auch g injektiv. Wir versehen B mit der Gruppentopologie, so daß g eine offene Einbettung ist. Wir wollen zeigen, daß die topologische Gruppe B zusammen mit der Abbildung f eine Vervollständigung von A ist. Dazu ist zu zeigen:

1) B ist vollständig.
2) Die Teilraumtopologie von B auf $f(A)$ ist die Quotiententopologie von A bezüglich f.
3) Der Kern von f ist der Durchschnitt aller Nullumgebungen von A.
4) $f(A)$ ist dicht in B.

Die Punkte (1) und (2) folgen direkt aus der Konstruktion der Topologie von B. Es ist $\ker(f) \subseteq \ker(j)$. Weiterhin gilt $\ker(j) = i\left(\ker(j_0)\right) \subseteq \ker(f)$. Also haben wir $\ker(f) = \ker(j)$ und damit ist (3) gezeigt. Der Punkt (4) gilt, wenn B ein topologischer Ring ist, denn: Seien ein $a \otimes b \in A \otimes_{A_0} \hat{A}_0 = B$ und eine Umgebung U von $a \otimes b$ in B gegeben. Gesucht ist ein $x \in A$ mit $x \otimes 1 \in U$. Ist B ein topologischer Ring, so folgt aus $(a \otimes 1) \cdot (1 \otimes b) = a \otimes b \in U$, daß es eine Umgebung V von $1 \otimes b$ in B gibt mit $(a \otimes 1) \cdot v \in U$ für alle $v \in V$. Nach der Konstruktion der Topologie auf B gilt $V \supseteq 1 \otimes V'$, wobei V' eine Umgebung b in $\hat{A}_0$ ist. Wir wählen ein $y \in A_0$ mit $j_0(y) \in V'$. Dann ist $y \otimes 1 = 1 \otimes j_0(y) \in V$ und deshalb $x \otimes 1 \in U$ mit $x = ay \in A$.

Wir zeigen nun also, daß B ein topologischer Ring ist. Gegeben seien ein $a \otimes b \in A \otimes_{A_0} \hat{A}_0 = B$ und eine Nullumgebung U von B. Zu zeigen ist, daß es eine Nullumgebung V von B gibt mit $(a \otimes b) \cdot V \subseteq U$. Sei U' eine Nullumgebung von $\hat{A}_0$ mit $1 \otimes U' \subseteq U$. Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}$ mit $I^m \cdot \hat{A}_0 \subseteq U'$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot I^n \subseteq I^m$. Sei V die Nullumgebung $1 \otimes I^n \cdot \hat{A}_0$ von B. Dann ist $(a \otimes b) \cdot V = (a \otimes b) \cdot (I^n \otimes \hat{A}_0) = (a \cdot I^n) \otimes (b \cdot \hat{A}_0) \subseteq I^m \otimes (b \cdot \hat{A}_0) = 1 \otimes (I^m \cdot b \cdot \hat{A}_0) \subseteq 1 \otimes (I^m \cdot \hat{A}_0) \subseteq U$.

Korollar 2.3.9. Sei A ein f-adischer Ring.

i) A habe einen noetherschen Definitionsring. Dann hat auch $\hat{A}$ einen noetherschen Definitionsring und ist der Ringhomomorphismus $A \longrightarrow \hat{A}$ flach.

ii) A habe einen noetherschen Definitionsring, über dem A endlich erzeugt ist. Dann hat auch $\hat{A}$ einen noetherschen Definitionsring, über dem $\hat{A}$ endlich erzeugt ist. Insbesondere ist $\hat{A}$ noethersch.

iii) A habe einen noetherschen Definitionsring, der ein G-Ring ist (in der Notation von [M]) und über dem A endlich erzeugt ist. Dann ist der Ringhomomorphismus $A \longrightarrow \hat{A}$ regulär.

Beweis: (iii) folgt aus [M], 33.I und 33.E Lemma 4.

In (2.1) haben wir die topologischen Polynomringe und die topologischen Lokalisationen von nat-Ringen beschrieben. Wir betrachten diese nun speziell für f-adische Ringe.

Lemma 2.3.10. Seien A ein f-adischer Ring und T eine Teilmenge von A, so daß $T \cdot A$ eine Nullumgebung von A ist. Dann ist $T^n \cdot U$ eine Nullumgebung von A für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Nullumgebung U von A.

Beweis: Seien ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Nullumgebung U gegeben. Mit $T \cdot A$ ist auch $T^n \cdot A = (T \cdot A)^n$ eine Nullumgebung. Sei (A_0, I) ein Definitionstupel von A mit $\cdot I \subseteq T^n \cdot A$. Sei J ein endliches Erzeugendensystem von I. Es gibt eine endliche Teilmenge K von A mit $J \subseteq T^n \cdot K$. Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $K \cdot I^m \subseteq U$. Dann ist $I^{m+1} = J \cdot I^m \subseteq (T^n \cdot K) \cdot I^m = T^n \cdot (K \cdot I^m) \subseteq T^n \cdot U$.

Seien A ein f-adischer Ring und $T = (T_i | i = 1, \ldots, n)$ eine Familie von Teilmengen von A, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$. Wegen (2.3.10) haben wir dann gemäß (2.1.8) und (2.1.10) die topologischen Ringe $A[X]_T$ und $A\langle X\rangle_T$.

Lemma 2.3.11. Sei (B, I) ein Definitionstupel von A. Dann gilt $I_{[X]} = I \cdot B_{[X]}$ und $I_{\langle X\rangle} = I \cdot B_{\langle X\rangle}$.

Beweis: Alles ist klar, bis auf die Aussage $I_{\langle X\rangle} \subseteq I \cdot B_{\langle X\rangle}$. Sei $i_1, \ldots, i_m$ ein Erzeugendensystem von I. Jedes $a \in T^\nu \cdot I^k$ $(\nu \in \mathbb{N}_0^n,\ k \in \mathbb{N})$ läßt sich schreiben als $a = i_1 a_1 + \cdots + i_m a_m$ mit $a_1, \cdots, a_m \in T^\nu \cdot I^{k-1}$ (wir setzen $I^0 = B$). Da $\{I^k | k \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von A ist, läßt sich jedes u aus $I_{\langle X\rangle}$ schreiben als $u = i_1 u_1 + \cdots + i_m u_m$ mit $u_1, \ldots, u_m \in B_{\langle X\rangle}$.

Korollar 2.3.12. $A[X]_T$ und $A\langle X\rangle_T$ sind f-adische Ringe. Ist (B, I) ein Definitionstupel von A, so sind $(B_{[X]}, I_{[X]} = I \cdot B_{[X]})$ und $(B_{\langle X\rangle}, I_{\langle X\rangle} = I \cdot B_{\langle X\rangle})$ Definitionstupel von $A[X]_T$ und $A\langle X\rangle_T$.

Beweis: Sei (B, I) ein Definitionstupel von A. Es ist $B_{\langle X\rangle}$ ein offener Unterring von $A\langle X\rangle_T$. Nach (2.3.11) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $(I^n)_{\langle X\rangle} = I^n \cdot B_{\langle X\rangle}$. Also ist die Topologie auf $B_{\langle X\rangle}$ adisch.

Korollar 2.3.13. Ist A tatesch, so sind auch $A[X]_T$ und $A\langle X\rangle_T$ tatesch.

Beweis: Wir haben die stetigen Ringhomomorphismen $A \longrightarrow A[X]_T$ und $A \longrightarrow A\langle X\rangle_T$. Somit folgt (2.3.13) aus (2.3.12).

$A\langle X\rangle_T$ ist im allgemeinen nicht adisch, auch wenn A adisch ist. Es gilt

Proposition 2.3.14. Ist A adisch, so ist $A\langle X\rangle_T$ genau dann adisch, wenn $A\langle X\rangle_T$ isomorph zu $A\langle X\rangle$ ist.

Beweis: Ist $T_i = \{1\}$ für $i = 1, \dots, n$, so ist $A_{\langle X\rangle} = A\langle X\rangle_T$ und somit folgt aus (2.3.12), daß $A\langle X\rangle_T = A\langle X\rangle$ adisch ist.

Es sei nun $A\langle X\rangle_T$ adisch. Dann ist $A\langle X\rangle_T$ beschränkt und somit gibt es eine Nullumgebung V von A, so daß $v \cdot X^\nu \in A_{\langle X\rangle}$ für jedes $v \in V$ und jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$. Dies bedeutet

(1) Es ist $V \subseteq T^\nu \cdot A$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$.

Aus (1) folgt

(2) Für jede Nullumgebung U von A, die ein Ideal von A ist, und jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ ist die Nullumgebung $V \cdot U$ von A in $T^\nu \cdot U$ enthalten.

$A\langle X\rangle_T$ und $A\langle X\rangle$ sind Unterringe von $A[\![X]\!]$. Da A ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen bestehend aus Idealen hat, ist $A\langle X\rangle_T \subseteq A\langle X\rangle$ und die Inklusion $A\langle X\rangle_T \longrightarrow A\langle X\rangle$ stetig. Aus (2) folgt, daß $A\langle X\rangle \subseteq A\langle X\rangle_T$ und die Inklusion $A\langle X\rangle \longrightarrow A\langle X\rangle_T$ stetig ist.

Bemerkung. i) Natürlich gilt (2.3.14) entsprechend auch für $A[X]_T$.
ii) In (2.3.11) - (2.3.14) haben wir vorausgesetzt, daß $T = (T_1, \dots, T_n)$ eine endliche Familie von Teilmengen von A ist. Diese Aussagen bleiben richtig für beliebige Familien $T = (T_i \mid i \in I)$ von Teilmengen von A, (so daß $T_i \cdot A$ offen ist für jedes $i \in I$), wobei wir jedoch, was die Aussagen über den Ring $A\langle X\rangle_T$ anbetrifft, voraussetzen müssen, daß A hausdorffsch und jedes T_i beschränkt ist.

Sei A ein f-adischer Ring. Seien $S = (s_i \mid i \in I)$ eine Familie von Elementen von A und $T = (T_i \mid i \in I)$ eine Familie von Teilmengen von A, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für jedes $i \in I$. Nach (2.3.10) und (2.1.15) haben wir die topologischen Ringe $A(\frac{T}{S})$ und $A\langle\frac{T}{S}\rangle$:

Proposition 2.3.15. $A(\frac{T}{S})$ und $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ sind f-adische Ringe.

Seien (B, J) ein Definitionstupel von A und G das von $(s_i | i \in I)$ erzeugte multiplikative System von A. Als Ring stimmt $A(\frac{T}{S})$ mit $G^{-1}A$ überein. $(C, J \cdot C)$ mit $C = B\left[\frac{t}{s_i} \,|\, i \in I, t \in T_i\right]$ ist ein Definitionstupel von $A(\frac{T}{S})$.

Beweis: Die Behauptung über $A(\frac{T}{S})$ folgt direkt aus der Konstruktion von $A(\frac{T}{S})$ im Beweis von (2.1.15). $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ ist f-adisch nach (2.3.8.i).

Korollar 2.3.16. Ist A ein Tate-Ring, so sind auch $A(\frac{T}{S})$ und $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ Tate-Ringe.

Proposition 2.3.17. Es sei A adisch. $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ ist genau dann adisch, wenn $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ isomorph zu $A\langle\frac{\{1\}}{g} \,|\, g \in G\rangle$ ist, wobei G eine Teilmenge von A ist. $A\langle\frac{\{1\}}{g} \,|\, g \in G\rangle$ ist der topologische Ring $A\{E^{-1}\}$, wobei E das von G erzeugte multiplikative System von A ist. (Zur Definition von $A\{E^{-1}\}$ siehe [EGA*], 0.7.6).

Beweis: Es sei $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ adisch. Dann ist $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ ein beschränkter topologischer Ring und somit ist auch $A(\frac{T}{S})$ ein beschränkter topologischer Ring. Seien G das von $(s_i | i \in I)$ erzeugte multiplikative System von A und J ein Definitionsideal von A. Nach (2.3.4) und (2.3.15) ist $A(\frac{T}{S})$ der Ring $G^{-1}A$ zusammen mit der J-adischen Topologie. Nach (2.3.15) ist dieser Ring auch $A(\frac{\{1\}}{g} \,|\, g \in G)$.

Ist $f\colon A \to B$ ein stetiger Ringhomomorphismus zwischen f-adischen Ringen, so gibt es zu jedem Definitionstupel (B_0, J) von B ein Definitionstupel (A_0, I) von A mit $f(A_0) \subseteq B_0$ und $f(I) \subseteq J$. (Denn nach (2.3.7) enthält $f^{-1}(B_0)$ einen Definitionsring von A.)

Bei Ringhomomorphismen zwischen adischen Ringen kennt man die Begriffe adisch und topologisch von endlichem Typ. Wir wollen diese beiden Begriffe auf Ringhomomorphismen zwischen f-adischen Ringen verallgemeinern.

Ein Ringhomomorphismus $A \longrightarrow B$ zwischen adischen Ringen heißt adisch, wenn es ein Definitionsideal I von A gibt, so daß $I \cdot B$ ein Definitionsideal von B ist.

Definition 2.3.18. Ein Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen f-adischen Ringen heißt adisch, wenn es Definitionsringe A_0 und B_0 von A und B gibt, so daß

$f(A_0) \subseteq B_0$ und die Restriktion $f : A_0 \longrightarrow B_0$ ein adischer Ringhomomorphismus zwischen den adischen Ringen A_0 und B_0 ist.

Aus der nachfolgenden Proposition (2.3.20) folgt, daß Definition (2.3.18) mit der ursprünglichen Definition übereinstimmt, falls A und B adisch sind.

Einige Beispiele adischer Ringhomomorphismen:
(1) Stetige Ringhomomorphismen zwischen Tate-Ringen sind adisch (nach (2.2.8)).
(2) $A \longrightarrow \hat{A}$ ist adisch (nach (2.3.8.i)).
(3) $A \longrightarrow A[X]_T$ und $A \longrightarrow A\langle X\rangle_T$ sind adisch (nach (2.3.12)).
(4) $A \longrightarrow A(\frac{T}{S})$ und $A \longrightarrow A\langle\frac{T}{S}\rangle$ sind adisch (nach (2.3.15)).

Unmittelbar aus der Definition folgt

Lemma 2.3.19. Ein adischer Ringhomomorphismus zwischen f-adischen Ringen ist beschränkt, d.h. er bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.

Proposition 2.3.20. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein adischer Ringhomomorphismus zwischen f-adischen Ringen. Dann gelten

i) Sind A_0 und B_0 Definitionsringe von A und B mit $f(A_0) \subseteq B_0$, so ist $I \cdot B_0$ ein Definitionsideal von B_0 für jedes Definitionsideal I von A_0.
ii) Zu jedem Definitionsring A_0 von A und jedem offenen Unterring B' von B mit $f(A_0) \subseteq B'$ gibt es einen Definitionsring B_0 von B mit $f(A_0) \subseteq B_0 \subseteq B'$.
iii) Zu jedem Definitionsring B_0 von B und jedem offenen Unterring A' von A gibt es einen Definitionsring A_0 von A mit $A_0 \subseteq A'$ und $f(A_0) \subseteq B_0$.

Beweis: i) Seien (A_1, J) und (B_1, K) Definitionstupel von A und B mit $f(A_1) \subseteq B_1$ und $J \cdot B_1 = K$. Wir setzen $A_2 = A_0 \cdot A_1$ und $B_2 = B_0 \cdot B_1$. Es sind dann A_2 und B_2 Definitionsringe von A und B mit $f(A_2) \subseteq B_2$. Nach (2.3.4) sind $I \cdot A_2$ und $J \cdot A_2$ Definitionsideale von A_2 und ist $K \cdot B_2$ ein Definitionsideal von B_2. Es ist $(J \cdot A_2) \cdot B_2 = K \cdot B_2$, also ist $(I \cdot A_2) \cdot B_2$ ein Definitionsideal von B_2. Da gilt $(I \cdot A_2) \cdot B_2 = (I \cdot B_0) \cdot B_2$, folgt aus (2.3.4), daß $I \cdot B_0$ ein Definitionsideal von B_0 ist.
ii) Nach (2.3.19) ist $f(A_0)$ beschränkt. Somit gibt es nach (2.3.7.ii) einen Definitionsring B_0 von B' mit $f(A_0) \subseteq B_0$.
iii) Es ist $f^{-1}(B_0)$ ein offener Unterring von A. Deshalb gibt es nach (2.3.7.i) einen Definitionsring A_0 von A mit $A_0 \subseteq A' \cap f^{-1}(B_0)$.

Korollar 2.3.21. i) Ist $f : A \longrightarrow B$ ein adischer Ringhomomorphismus zwischen f-adischen Ringen und sind A' und B' offene Unterringe von A und B mit $f(A') \subseteq B'$,

so ist auch die Restriktion $A' \longrightarrow B'$ adisch.
ii) Die Komposition zweier adischer Ringhomomorphismen ist adisch.

Einen Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen vollständigen adischen Ringen bezeichnet man üblicherweise als topologisch von endlichem Typ, wenn f über eine Quotientenabbildung $A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B$ faktorisiert. Wir definieren nun Ringhomomorphismen, die topologisch von endlichem Typ sind, zwischen f-adischen Ringen, indem wir uns durch Übergang zu Definitionsringen auf den adischen Fall zurückziehen.

Definition 2.3.22. Seien A und B vollständige f-adische Ringe und $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus.

i) f heißt topologisch von endlichem Typ, wenn es Definitionsringe A_0 und B_0 von A und B gibt, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$, die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f über eine Quotientenabbildung $A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B_0$ faktorisiert und B endlich erzeugt über $A \cdot B_0$ ist.
ii) f heißt topologisch von strikt endlichem Typ, wenn es Definitionsringe A_0 und B_0 von A und B gibt, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$, die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f über eine Quotientenabbildung $A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B_0$ faktorisiert und $B = A \cdot B_0$.

Wir werden in (2.3.27) zeigen, daß die Definition (2.3.22) im adischen Fall mit der üblichen Definition übereinstimmt.

2.3.23. Beispiele von Ringhomomorphismen, die topologisch von endlichem Typ sind:

1) Ein Ringhomomorphismus zwischen diskret topologisierten Ringen ist genau dann topologisch von endlichem Typ, wenn er von endlichem Typ ist.
2) Seien A ein vollständiger f-adischer Ring und $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von A, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $A \longrightarrow A\langle X\rangle_T$ topologisch von endlichem Typ.
3) Seien A ein vollständiger f-adischer Ring, $s_1, \ldots, s_n$ Elemente von A und $T_1, \ldots, T_n$ endliche Teilmengen von A, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $A \longrightarrow A\langle \frac{T_1}{s_1}, \ldots, \frac{T_n}{s_n}\rangle$ topologisch von endlichem Typ.

Beweis: 2) Sei (B, I) ein Definitionstupel von A. Nach (2.1.13) ist $A\langle X\rangle_T$ die Vervollständigung von $A[X]_T$ und nach (2.3.12) hat $A[X]_T$ das Definitionstupel $(B_{[X]}, I \cdot B_{[X]})$. Es gilt $B_{[X]} = B\big[t_iX_i \big| i \in \{1, \ldots, n\}, t_i \in T_i\big]$. Damit folgt die Behauptung aus (2.3.8).
3) folgt aus (2.3.15) und (2.3.8).

Lemma 2.3.24. Seien A und B vollständige f-adische Ringe, so daß gilt: A ist tatesch oder $B = B^\circ$. Dann ist jeder Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$, der topologisch von endlichem Typ ist, topologisch von strikt endlichem Typ.

Beweis: Seien A_0 und B_0 Definitionsringe von A und B, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$, die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f über eine Quotientenabbildung $g : A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B_0$ faktorisiert und B endlich erzeugt über $A \cdot B_0$ ist. Ist s eine topologisch nilpotente Einheit von A, die in A_0 liegt, so ist $B = (B_0)_s$ nach (2.2.3). Also ist f topologisch von strikt endlichem Typ, falls A tatesch ist. Es gelte nun $B = B^\circ$. Sei $b_1, \ldots, b_m$ ein Erzeugendensystem von B über $A \cdot B_0$. Es ist $B_1 := B_0[b_1, \ldots, b_m]$ offen und beschränkt in B und somit ein Definitionsring von B. Aufgrund der universellen Eigenschaft (2.1.14) haben wir einen stetigen A_0-Ringhomomorphismus $h : A_0\langle X_1, \ldots, X_{n+m}\rangle \longrightarrow B_1$ mit $h(X_i) = g(X_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $h(X_{n+i}) = b_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Mit g ist auch h offen und surjektiv. Es ist $B = A \cdot B_1$.

Lemma 2.3.25. Seien A und B vollständige f-adische Ringe und $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorhismus, der topologisch von endlichem Typ (bzw. topologisch von strikt endlichem Typ) ist. Dann gibt es zu jedem offenen Unterring A_0 von A einen offenen Unterring B_0 von B, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$, die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f über eine Quotientenabbildung $A_0\langle X_1 \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B_0$ faktorisiert und B endlich erzeugt über $A \cdot B_0$ (bzw. $B = A \cdot B_0$) ist. Ist A_0 ein Definitionsring von A, so ist B_0 ein Definitionsring von B.

Beweis: Die letzte Behauptung ist trivial, denn ist A_0 adisch, so folgt aus der Existenz der Quotientenabbildung $A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B_0$, daß auch B_0 adisch ist.

Seien A_1 und B_1 Definitionsringe von A und B, so daß $f(A_1) \subseteq B_1$, die Restriktion $A_1 \longrightarrow B_1$ von f über eine Quotientenabbildung $g : A_1\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B_1$ faktorisiert und B endlich erzeugt über $A \cdot B_1$ (bzw. $B = A \cdot B_1$) ist. Sei h der stetige Ringhomomorphismus $A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B$ mit $h|A_0 = f|A_0$ und $h(X_i) = g(X_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei $B_0 := h\big(A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\big)$. Wir behaupten

a) h ist eine offene Abbildung

b) $A \cdot B_0 = A \cdot B_1$.

Damit ist dann das Lemma gezeigt. Es ist $D := (A_0 \cap A_1)\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ ein offener Unterring von $A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ und $A_1\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ mit $g|D = h|D$. Deshalb ist mit g auch h offen. Es gilt $A \cdot B_0 = A \cdot h\big(A_0\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\big) = A \cdot \big(h(D) + f(A_0)\,[h(X_1), \ldots, h(X_n)]\big) = A \cdot h(D) + f(A)[h(X_1), \ldots, h(X_n)] = A \cdot h(D)$. Ebenso zeigt man $A \cdot B_1 = A \cdot g(D)$. Also gilt (b).

Korollar 2.3.26. Die Komposition zweier Ringhomomorphismen, die topologisch von endlichem Typ sind, ist topologisch von endlichem Typ. Die Komposition zweier Ringhomomorphismen, die topologisch von strikt endlichem Typ sind, ist topologisch von strikt endlichem Typ.

Aus (2.3.24) und (2.3.25) folgt

Korollar 2.3.27. i) Es seien A und B vollständige f-adische Ringe und $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, der topologisch von endlichem Typ ist. Es sei A adisch. Dann ist B genau dann adisch, wenn f topologisch von strikt endlichem Typ ist.
ii) Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen vollständigen adischen Ringen. f ist genau dann topologisch von endlichem Typ, wenn f über eine Quotientenabbildung $A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B$ faktorisiert.

Lemma 2.3.28. Seien A und B vollständige f-adische Ringe und $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, der topologisch von endlichem Typ ist. Dann ist B endlich erzeugt über jedem offenen Unterring von B, der $f(A)$ enthält.

Beweis: Sei C ein offener Unterring von B mit $f(A) \subseteq C$. Nach (2.3.25) gibt es einen offenen Unterring B_0 von B, so daß $f(A) \subseteq B_0$, die Restriktion $A \longrightarrow B_0$ von f über eine Quotientenabbildung $g : A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B_0$ faktorisiert und B endlich erzeugt über B_0 ist. Sei $b_1, \ldots, b_m$ ein Erzeugendensystem von B über B_0. $g(A[X_1, \ldots, X_n])$ ist dicht in B_0. Deshalb $B_0 = \overline{f(A)\,[g(X_1), \ldots, g(X_n)]} \subseteq \overline{C\,[g(X_1), \ldots, g(X_n)]} = C\,[g(X_1), \ldots, g(X_n)]$ und somit
$B = C\,[g(X_1), \ldots, g(X_n), b_1, \ldots, b_m]$.

Proposition 2.3.29. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen vollständigen f-adischen Ringen.

i) f ist genau dann topologisch von endlichem Typ, wenn f über eine Quotientenabbildung

$$A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_T \longrightarrow B$$

faktorisiert, wobei $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von A ist, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$.

ii) f ist genau dann topologisch von strikt endlichem Typ, wenn f über eine Quotientenabbildung

$$A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B$$

faktorisiert.

Beweis: i) Wenn f die angegebene Faktorisierung besitzt, so ist f topologisch von endlichem Typ nach (2.3.23). Sei nun f topologisch von endlichem Typ. Nach (2.3.25) faktorisiert f über eine stetige und offene Abbildung $g : A\langle X_1, \dots, X_m\rangle \longrightarrow B$, die von endlichem Typ ist. Sei $b_1, \dots, b_s$ ein Erzeugendensystem von B über $A\langle X_1, \dots, X_m\rangle$. Seien A_0 ein Definitionsring von A und I eine endliche Teilmenge von A_0, so daß $I \cdot A_0$ ein Definitionsideal von A_0 ist. Wir wählen ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $I^k \cdot b_i$ potenzbeschränkt in B ist für $i = 1, \dots, s$. Wir setzen $T = (T_1, \dots, T_{m+s})$ mit $T_i = \{1\}$ für $i = 1, \dots, m$ und $T_{m+i} = I^k$ für $i = 1, \dots, s$. Aufgrund der universellen Eigenschaft (2.1.14) haben wir einen stetigen Ringhomomorphismus $h : A\langle X_1, \dots, X_{m+s}\rangle_T \longrightarrow B$ mit $h|A = f$ und $h(X_i) = g(X_i)$ für $i = 1, \dots, m$ und $h(X_{m+i}) = b_i$ für $i = 1, \dots, s$. h ist surjektiv und offen.
ii) Ist f topologisch von strikt endlichem Typ, so besitzt f die geforderte Faktorisierung nach (2.3.25). Wir nehmen nun umgekehrt an, daß f über eine Quotientenabbildung $g : A\langle X_1, \dots, X_n\rangle \longrightarrow B$ faktorisiere. Sei A_0 ein Definitionsring von A. Dann ist $A_0\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ ein Definitionsring von $A\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ und es ist $A\langle X_1, \dots, X_n\rangle = A \cdot \big(A_0\langle X_1, \dots, X_n\rangle\big)$. Mit den Definitionsringen A_0 und $B_0 := g\big(A_0\langle X_1, \dots, X_n\rangle\big)$ von A und B ist die Definition (2.3.22.ii) für f erfüllt.

Bemerkung 2.3.30. Seien A, B und C vollständige f-adische Ringe und $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Ringhomomorphismen. Die folgenden beiden Aussagen lassen sich einfach beweisen:

i) f ist genau dann adisch, wenn f über eine Quotientenabbildung $A\langle X_i | \, i \in I\rangle_T \longrightarrow B$ faktorisiert, wobei $T = (T_i | \, i \in I)$ eine Familie von endlichen Teilmengen von A ist, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für jedes $i \in I$.

ii) f und g seien stetig. $g \circ f$ sei adisch (bzw. topologisch von endlichem Typ bzw. topologisch von strikt endlichem Typ). Dann ist g adisch (bzw. topologisch von endlichem Typ bzw. topologisch von strikt endlichem Typ).

Proposition 2.3.31. Sei A ein vollständiger f-adischer Ring. Seien $s_1, \dots, s_n$ Elemente von A und $T_1, \dots, T_n$ endliche Teilmengen von A, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für $i = 1, \dots, n$. Wir setzen $T = (T_1, \dots, T_n)$. Dann gelten

i) Hat A einen noetherschen Definitionsring, so ist $A \longrightarrow A\langle X_1, \dots, X_n\rangle_T$ treuflach. Hat A einen noetherschen Definitionsring, der ein G-Ring ist und über dem A endlich erzeugt ist, so ist $A \longrightarrow A\langle X_1, \dots, X_n\rangle_T$ regulär.

ii) Hat A einen noetherschen Definitionsring, so ist $A \longrightarrow A\langle \frac{T_1}{s_1}, \dots, \frac{T_n}{s_n}\rangle$ flach. Hat A einen noetherschen Definitionsring, der ein G-Ring ist und über dem A endlich erzeugt ist, so ist $A \longrightarrow A\langle \frac{T_1}{s_1}, \dots, \frac{T_n}{s_n}\rangle$ regulär.

iii) Sei B ein vollständiger f-adischer Ring, der topologisch von endlichem Typ über A ist. Hat A einen noetherschen Definitionsring, so hat auch B einen noetherschen Definitionsring. Hat A einen noetherschen Definitionsring, über dem A endlich erzeugt ist, so hat auch B einen noetherschen Definitionsring, über dem B endlich erzeugt ist.

Beweis: i) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, so ist $\mathfrak{q} := \{\Sigma a_\nu X^\nu \in A\langle X\rangle_T \,|\, a_\mu \in \mathfrak{p}$ für $\mu = (0,\ldots,0)\}$ ein Primideal von $A\langle X\rangle_T$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

$A\langle X\rangle_T$ ist die Vervollständigung von $B := A[X]_T$ und der Ringhomomorphismus $A \longrightarrow A\langle X\rangle_T$ ist die Komposition von $A \longrightarrow B$ und $B \longrightarrow \hat{B}$. Der Ringhomomorphismus $A \longrightarrow B$ ist regulär und die Komposition regulärer Ringhomomorphismen ist regulär ([M], 33.B Lemma1). Sei A_0 ein Definitionsring von A. Dann ist $B_0 := (A_0)_{[X]}$ ein Definitionsring von B. B_0 ist endlich erzeugt über A_0, denn es gilt $B_0 = A_0\big[t_i X_i \,|\, i \in \{1,\ldots,,n\},\, t_i \in T_i\big]$. Ist also A_0 ein G-Ring, so ist auch B_0 ein G-Ring ([M], 33.G). Die Behauptung folgt nun aus (2.3.9).
ii) Der Beweis erfolgt entsprechend wie in i). Wir faktorisieren $A \longrightarrow A\langle\frac{T_1}{s_1},\ldots,\frac{T_n}{s_n}\rangle$ in $A \longrightarrow A(\frac{T_1}{s_1},\ldots,\frac{T_n}{s_n}) =: B$ und $B \longrightarrow \hat{B}$.

Bemerkung 2.3.32. Sei A ein f-adischer Ring und sei $T = (T_1,\ldots,T_n)$ ein n-Tupel von Teilmengen von A. Nach (2.1.17) haben wir den topologischen Ring $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$. Unmittelbar aus der Definition von $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$ folgt: $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$ ist ein f-adischer Ring, und ist (B,I) ein Definitionstupel von A, so ist $\big(B_{\langle\langle X\rangle\rangle}, I_{\langle\langle X\rangle\rangle} = I\cdot B_{\langle\langle X\rangle\rangle}\big)$ ein Definitionstupel von $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$.

Insbesondere ist der Ringhomomorphismus $A \longrightarrow A\langle\langle X\rangle\rangle_T$ adisch. Man kann leicht die folgenden Eigenschaften von $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$ beweisen.

i) Hat A einen noetherschen Definitionsring und ist T_i endlich für $i = 1,\ldots,n$, so hat auch $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$ einen noetherschen Definitionsring.
ii) Es sei A vollständig und T_i beschränkt für $i = 1,\ldots,n$. Dann gilt: Hat A einen noetherschen Definitionsring oder ist $T_i\cdot A$ offen für $i = 1,\ldots,n$, so ist $A\langle\langle X\rangle\rangle_T$ vollständig.

Abschließend betrachten wir noch endlich erzeugte Moduln über f-adischen Ringen.

Seien A ein topologischer Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Sei $m_1,\ldots,m_\ell$ ein Erzeugendensystem von M. Wir versehen M mit der Gruppentopologie $\mathcal{T}$, in der die Mengen $\{x_1m_1+\ldots+x_\ell m_\ell \,|\, x_i \in U$ für $i = 1,\ldots,\ell\}$ (U ist eine Nullumgebung von A) ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen bilden. $\mathcal{T}$ ist eine A-Modultopologie

von M. Sie besitzt die folgende universelle Eigenschaft: Sind N ein topologischer A-Modul und $f: M \to N$ eine A-lineare Abbildung, so ist f stetig.
Insbesondere ist $\mathcal{T}$ unabhängig von der Auswahl des Erzeugendensystems $m_1, \ldots, m_\ell$.
Wir nehmen nun an, daß A ein f-adischer Ring ist. Seien (A_0, I) ein Definitionstupel von A und M_0 ein endlich erzeugter A_0-Untermodul von M, der offen in M ist. Dann ist $\mathcal{T} \mid M_0$ die I-adische Topologie von M_0. Deshalb nennen wir $\mathcal{T}$ die f-adische Topologie von M (bezüglich A). Ist M_0 ein A_0-Untermodul von M, der den A-Modul M erzeugt, so ist M_0 offen in M.
Die Topologie in (2.2.15 i) ist die f-adische Topologie.

Proposition 2.3.33. Seien A ein f-adischer Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, und M, N endlich erzeugte A-Moduln. Dann gilt

i) Ist N ein Untermodul von M, so ist die f-adische Topologie von N die Teilraumtopologie der f-adischen Topologie von M.
ii) Jede A-lineare Abbildung $f: M \to N$ ist strikt, wenn man M und N mit der f-adischen Topologie versieht.
iii) Ist A vollständig, so ist auch die f-adische Topologie von M vollständig und jeder Untermodul von M abgeschlossen in der f-adischen Topologie von M.
iv) Versieht man M mit der f-adischen Topologie bezüglich A und $M \otimes_A \hat{A}$ mit der f-adischen Topologie bezüglich $\hat{A}$, so ist die kanonische Abbildung $M \otimes_A \hat{A} \to \hat{M}$ ein Isomorphismus topologischer $\hat{A}$-Moduln.
v) Sei A_0 ein Definitionsring von A. Jeder offene A_0-Untermodul von M enthält einen offenen A_0-Untermodul, der endlich erzeugt über A_0 ist.

Beweis: i) Seien A_0 ein noetherscher Definitionsring von A und I ein Definitionsideal von A_0. Sei N_1 ein endlich erzeugter A_0-Untermodul von N mit $N = A \cdot N_1$. Wir ergänzen N_1 zu einem endlich erzeugten A_0-Untermodul M_0 von M mit $M = A \cdot M_0$. Als Untermodul von M_0 ist $N_0 := N \cap M_0$ endlich erzeugt über A_0. Es ist $N = A \cdot N_0$. Nach [B], III.3.2 Th. 2 wird die I-adische Topologie von N_0 induziert von der I-adischen Topologie von M_0.
ii) $f(M)$ ist ein endlich erzeugter A-Modul. Versieht man M und $f(M)$ mit der f-adischen Topologie, so ist $M \to f(M)$ strikt nach der Konstruktion der f-adischen Topologie. Nach (i) ist deshalb $f: M \to N$ strikt.
iii) Seien A_0 ein noetherscher Definitionsring von A und I ein Definitionsideal von A_0. Sei M_0 ein endlich erzeugter A_0-Untermodul von M mit $M = A \cdot M_0$. Sei H ein A-Untermodul von M. Wir versehen H mit der Teilraumtopologie von M. Dann

ist H eine topologische Gruppe. Die Teilraumtopologie auf $H_0 := H \cap M_0$ ist die I-adische Topologie von H_0. Nach [B], III.2.13 Lemma 3 und 3.3 Prop. 6 sind H_0 und M_0 hausdorffsch. Mit [B], III.2.12 Cor. 1 erhalten wir, daß H_0 und M_0 vollständig sind und somit auch H und M. Hieraus folgt, daß H abgeschlossen ist in M.

iv) Aufgrund der universellen Eigenschaft der f-adischen Topologie sind die kanonische $\hat{A}$-lineare Abbildung $f: M \otimes_A \hat{A} \to \hat{M}$ und die kanonische A-lineare Abbildung $h: M \to M \otimes_A \hat{A}$ stetig. Nach (iii) ist $M \otimes_A \hat{A}$ vollständig. Deshalb induziert h eine stetige Abbildung $g: \hat{M} \to M \otimes_A \hat{A}$. Es ist $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$.

v) Sei H ein offener A_0-Untermodul von M. Sei $m_1, \ldots, m_\ell$ ein Erzeugendensystem von M. Wir wählen ein Definitionsideal $I = (i_1, \ldots, i_r)$ von A_0, so daß $m_s i_t \in H$ für $s \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $t \in \{1, \ldots, r\}$. Der von $\{m_s i_t \mid s = 1, \ldots, \ell, t = 1, \ldots, r\}$ erzeugte A_0-Untermodul von M ist offen und in H enthalten.

2.4. Affinoide Ringe

Definition 2.4.1. Sei A ein f-adischer Ring. Ein Ganzheitsring von A ist ein Unterring von A, der ganz abgeschlossen in A ist, offen ist, und in A° enthalten ist.

Die Ganzheitsringe eines f-adischen Rings sind als offene Unteringe selbst f-adische Ringe. Jeder f-adische Ring A besitzt einen größten Ganzheitsring, nämlich A° (nach (2.1.7.i)), und einen kleinsten Ganzheitsring, nämlich den ganzen Abschluß des Unterrings $\mathbb{Z} \cdot 1 + A^{\circ\circ}$ in A. Der ganze Abschluß in A eines Unterrings B von A wird mit B^c bezeichnet.

Definition 2.4.2. Ein affinoider Ring ist ein Paar $A = (\tilde{A}, A^+)$, wobei $\tilde{A}$ ein f-adischer Ring und A^+ ein Ganzheitsring von $\tilde{A}$ ist.

Ein affinoider Ring A heißt hausdorffsch, vollständig, adisch, tatesch, ..., wenn $\tilde{A}$ hausdorffsch, vollständig, adisch, tatesch, ... ist. Ein Ringhomomorphismus zwischen affinoiden Ringen A und B ist ein Ringhomomorphismus $f : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ mit $f(A^+) \subseteq B^+$. Sind A ein affinoider Ring und I ein Ideal von $\tilde{A}$, so bezeichnet A/I den affinoiden Ring $(\tilde{A}/I, (A^+/I \cap A^+)^c)$, wobei $\tilde{A}/I$ die Quotiententopologie von $\tilde{A}$ trägt.

Lemma 2.4.3. Sei A ein f-adischer Ring. Sei $i : A \longrightarrow \hat{A}$ die Vervollständigung von A. Unter der Bijektion $G \mapsto \hat{G}$ zwischen der Menge der offenen Untergruppen von A und der Menge der offenen Untergruppen von $\hat{A}$ (mit der Umkehrabbildung $H \longmapsto i^{-1}(H)$) entsprechen einander

i) A° und $(\hat{A})^\circ$
ii) $A^{\circ\circ}$ und $(\hat{A})^{\circ\circ}$
iii) die Definitionsringe von A und die Definitionsringe von $\hat{A}$
iv) die Ganzheitsringe von A und die Ganzheitsringe von $\hat{A}$.

Beweis: Eine Teilmenge T von A ist genau dann beschränkt (bzw. topologisch nilpotent) in A, wenn $i(T)$ beschränkt (bzw. topologisch nilpotent) in $\hat{A}$ ist. Deshalb ist $i^{-1}\left((\hat{A})^\circ\right) = A^\circ$ und $i^{-1}\left((\hat{A})^{\circ\circ}\right) = A^{\circ\circ}$ und somit gelten (i) und (ii).

Ist G ein Definitionsring von A, so ist mit G auch $\hat{G}$ adisch, also $\hat{G}$ ein Definitionsring von $\hat{A}$. Ist H ein Definitionsring von $\hat{A}$, so ist H beschränkt in $\hat{A}$ und somit $i^{-1}(H)$ beschränkt in A. Nach (2.3.5.i) ist $i^{-1}(H)$ ein Definitionsring von A. Also gilt (iii).

Ist H ein in $\hat{A}$ ganz abgeschlossener Unterring von $\hat{A}$, so ist natürlich $i^{-1}(H)$ ganz abgeschlossen in A. Zu zeigen bleibt noch: Ist G ein in A ganz abgeschlossener und offener Unterring von A, so ist $\hat{G}$ ganz abgeschlossen in $\hat{A}$.

Sei a ein Element von $\hat{A}$, das ganz über $\hat{G}$ ist. Wir zeigen $a \in \hat{G} = \overline{i(G)}$. Dazu ist zu zeigen, daß $U \cap i(G) \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von a in $\hat{A}$. Sei also eine Umgebung U von a gegeben. Sei H der ganze Abschluß von $\hat{G}$ in $\hat{A}$. Da H eine Untergruppe von $\hat{A}$ ist und $\hat{G}$ offen ist, ist H offen. Also können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $U \subseteq H$. Wir wählen ein $b \in A$ mit $i(b) \in U$. Sei

$$i(b)^n + c_{n-1}\, i(b)^{n-1} + \ldots + c_0 = 0$$

eine ganze Gleichung von $i(b)$ über $\hat{G}$. Da $\hat{G}$ offen ist, kann man die Elemente c_k aus $\hat{G}$ so durch Elemente d_k aus G approximieren, daß gilt

$$i(b)^n + i(d_{n-1})\, i(b)^{n-1} + \ldots + i(d_0) \in \hat{G}\,.$$

Wegen $G = i^{-1}(\hat{G})$ haben wir $d := b^n + d_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + d_0 \in G$. Aus der ganzen Gleichung

$$b^n + d_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + d_1 b + (d_0 - d) = 0$$

von b über G folgt $b \in G$. Damit ist gezeigt $U \cap i(G) \neq \emptyset$.

Korollar 2.4.4. Für jeden offenen Unterring G eines topologischen Rings A gilt in $\hat{A}$: $(G^\wedge)^c = (G^c)^\wedge$.

Beweis: Im Beweis von (2.4.3) haben wir gesehen $(G^\wedge)^c \subseteq (G^c)^\wedge$. Sei $i : A \longrightarrow \hat{A}$ die Vervollständigung von A. Mit $i(G) \subseteq G^\wedge$ gilt auch $i(G^c) \subseteq (G^\wedge)^c$. Da $(G^\wedge)^c$ offen und damit auch abgeschlossen in $\hat{A}$ ist, haben wir $(G^c)^\wedge = \overline{i(G^c)} \subseteq (G^\wedge)^c$.

Ist $A = (\tilde{A}, A^+)$ ein affinoider Ring, so ist nach (2.4.3) auch $\big((\tilde{A})^\wedge, (A^+)^\wedge\big)$ ein affinoider Ring. Er wird mit $\hat{A}$ bezeichnet und heißt die Vervollständigung von A.

Lemma 2.4.5. Seien A ein f-adischer Ring und $(T_i | i \in I)$ eine Familie von Teilmengen von A, so daß $T_i \cdot A$ offen ist für jedes $i \in I$.

i) Es ist $(A^\circ)_{[X]} \subseteq \big(A[X]_T\big)^\circ$ und $(A^\circ)_{\langle X \rangle} \subseteq \big(A\langle X\rangle_T\big)^\circ$.

ii) Ist I endlich und $T_i = \{1\}$ für jedes $i \in I$, so ist $(A^\circ)_{[X]} = (A[X]_T)^\circ$ und $(A^\circ)_{\langle X\rangle} = \big(A\langle X\rangle_T\big)^\circ$.

Beweis: i) Die Behauptung für $(A^\circ)_{[X]}$ ist klar.

Sei ein $a \in (A^\circ)_{\langle X \rangle}$ gegeben. Wir schreiben $a = b + c$ mit $b \in (A^\circ)_{[X]}$ und $c \in J_{\langle X \rangle}$, wobei J ein Definitionsideal eines Definitionsrings von A ist. b und c sind potenzbeschränkt in $A\langle X \rangle_T$, also auch a.
ii) Wir zeigen $(A^\circ)_{\langle X \rangle} \supseteq \left(A\langle X \rangle_T\right)^\circ$. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach $|I|$, und können daher annehmen $|I| = 1$. Sei $a = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} a_n X^n \in \left(A\langle X \rangle_T\right)^\circ$ gegeben. Angenommen, es sei $a \notin (A^\circ)_{\langle X \rangle}$. Sei k das kleinste Element aus $\mathbb{N}_0$ mit $a_k \notin A^\circ$. Wir setzen $a' = \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n X^n$, wenn $k \geq 1$, und $a' = 0$, wenn $k = 0$. Mit a und a' ist auch $b := a - a'$ potenzbeschränkt in $A\langle X \rangle_T$. Sei eine Nullumgebung U von A gegeben. Wir wählen eine Nullumgebung V von A, so daß $b^m \cdot V \subseteq U_{\langle X \rangle}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_k^m \cdot V \subseteq U$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit a_k potenzbeschränkt in A. Widerspruch.

Seien A ein affinoider Ring und $T = (T_i \mid i \in I)$ eine endliche Familie von Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für jedes $i \in I$. Nach (2.4.5) sind $(\tilde{A}[X]_T, (A^+_{[X]})^c)$ und $(\tilde{A}\langle X \rangle_T, (A^+_{\langle X \rangle})^c)$ affinoide Ringe. Sie werden mit $A[X]_T$ und $A\langle X \rangle_T$ bezeichnet. Aus (2.1.13) und (2.4.4) folgt

Bemerkung. Ist A vollständig und T_i beschränkt für jedes $i \in I$, so ist $A\langle X \rangle_T$ die Vervollständigung von $A[X]_T$.

Seien A ein affinoider Ring, $S = (s_i | i \in I)$ eine Familie von Elementen von $\tilde{A}$ und $T = (T_i | i \in I)$ eine Familie von Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für jedes $i \in I$. Der Unterring $A^+\left[\frac{t}{s_i} \mid i \in I, t \in T_i\right]$ von $\tilde{A}\left(\frac{T}{S}\right)$ ist offen und in $\tilde{A}\left(\frac{T}{S}\right)^\circ$ enthalten. Der affinoide Ring $\left(\tilde{A}\left(\frac{T}{S}\right), A^+\left[\frac{t}{s_i} \mid i \in I, t \in T_i\right]^c\right)$ wird mit $A\left(\frac{T}{S}\right) = A\left(\frac{T_i}{s_i} \mid i \in I\right)$ bezeichnet. Seine Vervollständigung wird mit $A\langle\frac{T}{S}\rangle = A\langle\frac{T_i}{s_i} \mid i \in I\rangle$ bezeichnet.

Aus der Konstruktion von $A[X]_T$ und $A\left(\frac{T}{S}\right)$ und (2.1.9) und (2.1.14) erhalten wir universelle Eigenschaften für $h : A \longrightarrow \left(A[X]_T, (X_i \mid i \in I)\right)$ und $g : A \longrightarrow A\left(\frac{T}{S}\right)$: h ist der universelle stetige Ringhomomorphismus von A in einen affinoiden Ring B, in dem eine Familie von Elementen $(b_i \mid i \in I)$ ausgezeichnet ist, so daß $\left\{h(t) \cdot b_i \mid i \in I, t \in T_i\right\}$ potenzbeschränkt und in B^+ enthalten ist. g ist der universelle stetige Ringhomomorphismus von A in einen affinoiden Ring B, so daß $g(s_i)$ invertierbar ist für jedes $i \in I$ und $\left\{\frac{g(t)}{g(s_i)} \mid i \in I, t \in T_i\right\}$ potenzbeschränkt und in B^+ enthalten ist.

Ist I eine endliche Menge und ist jedes T_i eine endliche Menge, so kann man bei diesen universellen Eigenschaften auf die Forderung der Potenzbeschränktheit verzichten, da die Elemente eines Ganzheitsrings potenzbeschränkt sind. Wir formulieren die universellen Eigenschaften für diese Situation nochmals ausführlich in der folgenden Proposition.

Proposition 2.4.6. Sei $(\mathcal{P})$ die folgende Kategorie: Die Objekte sind die Paare $A = (\tilde{A}, A^+)$, wobei $\tilde{A}$ ein nat-Ring und A^+ ein Unterring von $\tilde{A}$ ist, der ganz abgeschlossen in $\tilde{A}$ und in A° enthalten ist. Die Morphismen zwischen A und B sind die stetigen Ringhomomorphismen $f : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ mit $f(A^+) \subseteq B^+$.

Sei $(\mathcal{Q})$ die volle Unterkategorie von $(\mathcal{P})$ bestehend aus den Objekten A, so daß $\tilde{A}$ vollständig und A^+ abgeschlossen in $\tilde{A}$ ist.

Seien A ein affinoider Ring, $S = (s_i | i \in I)$ eine Familie von Elementen in $\tilde{A}$ mit endlicher Indexmenge I und $T = (T_i | i \in I)$ eine Familie von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für jedes $i \in I$.

i) Der kanonische Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow A\left(\frac{T}{S}\right)$ ist ein Morphismus in $(\mathcal{P})$, so daß $h(s_i)$ invertierbar in $A\left(\frac{T}{S}\right)^\sim$ ist für jedes $i \in I$ und die Menge $\left\{\frac{h(t)}{h(s_i)} \,|\, i \in I, t \in T_i\right\}$ in $A\left(\frac{T}{S}\right)^+$ enthalten ist. Ist $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $(\mathcal{P})$, so daß $f(s_i)$ in $\tilde{B}$ invertierbar ist für jedes $i \in I$ und $\left\{\frac{f(t)}{f(s_i)} \,|\, i \in I, t \in T_i\right\}$ in B^+ enthalten ist, so gibt es genau einen Morphismus in $(\mathcal{P})$ $g : A\left(\frac{T}{S}\right) \longrightarrow B$ mit $f = g \circ h$.

ii) $A\langle\frac{T}{S}\rangle$ ist ein Objekt von $(\mathcal{Q})$ und der kanonische Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow A\langle\frac{T}{S}\rangle$ ist ein Morphismus in $(\mathcal{P})$, so daß $h(s_i)$ invertierbar in $A\langle\frac{T}{S}\rangle^\sim$ ist für jedes $i \in I$ und $\left\{\frac{h(t)}{h(s_i)} | i \in I\right\}$ in $A\langle\frac{T}{S}\rangle^+$ enthalten ist. Sind B ein Objekt in $(\mathcal{Q})$ und $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $(\mathcal{P})$, so daß $f(s_i)$ invertierbar in $\tilde{B}$ ist für jedes $i \in I$ und $\left\{\frac{f(t)}{f(s_i)} \,|\, i \in I, t \in T_i\right\}$ in B^+ enthalten ist, so gibt es genau einen Morphismus in $(\mathcal{P})$ $g : A\langle\frac{T}{S}\rangle \longrightarrow B$ mit $f = g \circ h$.

iii) Der kanonische Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow A[X]_T$ ist ein Morphismus in $(\mathcal{P})$, so daß $\left\{h(t) \cdot X_i \,|\, i \in I, t \in T_i\right\}$ in $\left(A[X]_T\right)^+$ enthalten ist. Sind $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $(\mathcal{P})$ und $(b_i \,|\, i \in I)$ eine Familie von Elementen von $\tilde{B}$, so daß $\left\{f(t) \cdot b_i \,|\, i \in I, t \in T_i\right\}$ in B^+ enthalten ist, so gibt es genau einen Morphismus in $(\mathcal{P})$ $g : A[X]_T \longrightarrow B$ mit $f = g \circ h$ und $g(X_i) = b_i$ für jedes $i \in I$.

iv) Sei A vollständig. Der kanonische Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow A\langle X\rangle_T$ ist ein Morphismus in $(\mathcal{Q})$, so daß $\left\{h(t) \cdot X_i \,|\, i \in I, t \in T_i\right\}$ in $\left(A\langle X\rangle_T\right)^+$ enthalten ist. Sind $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $(\mathcal{Q})$ und $(b_i \,|\, i \in I)$ eine Familie von Elementen von $\tilde{B}$, so daß $\left\{f(t) \cdot b_i \,|\, i \in I, t \in T_i\right\}$ in B^+ enthalten ist, so gibt es genau einen Morphismus in $(\mathcal{Q})$ $g : A\langle X\rangle_T \longrightarrow B$ mit $f = g \circ h$ und $g(X_i) = b_i$ für jedes $i \in I$.

Ein Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen affinoiden Ringen heißt adisch, wenn $f : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ (und damit auch die Restriktion $A^+ \longrightarrow B^+$) adisch ist.

Dementsprechend könnte man einen Ringhomomorphismus $A \longrightarrow B$ zwischen vollständigen affinoiden Ringen topologisch von endlichem Typ nennen, wenn $\tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ und $A^+ \longrightarrow B^+$ topologisch von endlichem Typ sind. Da wir jedoch fordern, daß B^+ ganz abgeschlossen in $\tilde{B}$ ist, wäre diese Definition zu restriktiv.

Definition 2.4.7. Ein Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen vollständigen affinoiden Ringen heißt topologisch von endlichem Typ, wenn $f : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ topologisch von endlichem Typ ist und es einen offenen Unterring D von B^+ gibt, so daß $B^+ = D^c$, $f(A^+) \subseteq D$ und die Restriktion $A^+ \longrightarrow D$ von f topologisch von endlichem Typ ist.

Sei $f : A \longrightarrow B$ ein adischer Ringhomomorphismus zwischen affinoiden Ringen. Es seien A_0 und B_0 Definitionsringe von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ und D ein Unterring von $\tilde{B}$, so daß gilt: $A_0 \subseteq A^+$, $B_0 \subseteq D \subseteq B^+$, $B^+ = D^c$, B_0 ist eine endlich erzeugte A_0-Algebra, D ist eine endlich erzeugte A^+-Algebra und $\tilde{B}$ ist eine endlich erzeugte $\tilde{A}$-Algebra.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{B} & B^+ = D^c \arrow[l, hook'] & D \arrow[l, hook'] & B_0 \arrow[l, hook'] \\
\tilde{A} \arrow[u, "f"] & & A^+ \arrow[ll] \arrow[u] & A_0 \arrow[l, hook'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dann folgt aus (2.3.8) und (2.4.4), daß $\hat{f} : \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$ topologisch von endlichem Typ ist.

Insbesondere erhalten wir

Beispiele 2.4.8.

i) Seien A ein vollständiger affinoider Ring, $S = (s_1, \ldots, s_n)$ ein n-Tupel von Elementen von $\tilde{A}$ und $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $A \longrightarrow A\langle \frac{T}{S} \rangle$ topologisch von endlichem Typ.

ii) Seien A ein vollständiger affinoider Ring und $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $A \longrightarrow A\langle X \rangle_T$ topologisch von endlichem Typ. (Man beachte $A^+_{[X]} = A^+\big[tX_i \,|\, i \in \{1, \ldots, n\},\ t \in T_i\big]$.)

Proposition 2.4.9. Für einen Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen vollständigen affinoiden Ringen sind äquivalent.

i) f ist topologisch von endlichem Typ.

ii) Zu jedem offenen Unterring A_0 von A^+ gibt es einen offenen Unterring B_0 von B^+, so daß gilt: $f(A_0) \subseteq B_0$, die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f ist topologisch von strikt endlichem Typ, $B^+ = (A^+ \cdot B_0)^c$ und $\tilde{B}$ ist endlich erzeugt über $\tilde{A} \cdot B_0$.

Beweis: Die Richtung (ii) $\Longrightarrow$ (i) ist klar. Wir zeigen (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei D ein offener Unterring von B^+, so daß $B^+ = D^c$, $f(A^+) \subseteq D$ und die Restriktion $A^+ \longrightarrow D$ von f topologisch von endlichem Typ ist. Nach (2.3.24) ist $A^+ \longrightarrow D$ topologisch von strikt endlichem Typ. Sei A_0 ein offener Unterring von A^+. Nach (2.3.25) gibt es einen offenen Unterring B_0 von D, so daß $D = A^+ \cdot B_0$, $f(A_0) \subseteq B_0$ und die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f topologisch von strikt endlichem Typ ist. Nach (2.3.28) ist $\tilde{B}$ endlich erzeugt über $\tilde{A} \cdot B_0$.

Korollar 2.4.10. Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Ringhomomorphismen zwischen vollständigen affinoiden Ringen, die topologisch von endlichem Typ sind, so ist auch $g \circ f : A \longrightarrow C$ topologisch von endlichem Typ.

Aufgrund der Proposition (2.4.9) definieren wir

Definition 2.4.11. Ein Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen vollständigen affinoiden Ringen heißt topologisch von strikt endlichem Typ, wenn es Definitionsringe A_0 und B_0 von A^+ und B^+ gibt, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$, die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f topologisch von endlichem Typ ist, $B^+ = (A^+ \cdot B_0)^c$ und $\tilde{B} = \tilde{A} \cdot B_0$.

Aus dem Beweis von (2.3.25) folgt: Ist $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen vollständigen affinoiden Ringen, der topologisch von strikt endlichem Typ ist, so gibt es zu jedem offenen Unterring A_0 von A^+ einen offenen Unterring B_0 von B^+, so daß $f(A_0) \subseteq B_0$, die Restriktion $A_0 \longrightarrow B_0$ von f topologisch von strikt endlichem Typ ist, $B^+ = (A^+ \cdot B_0)^c$ und $\tilde{B} = \tilde{A} \cdot B_0$.

Insbesondere ist die Komposition von Ringhomomorphismen zwischen vollständigen affinoiden Ringen, die topologisch von strikt endlichem Typ sind, topologisch von strikt endlichem Typ.

Ist $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen vollständigen affinoiden Ringen, so daß $f : A \longrightarrow B$ topologisch von endlichem Typ und $f : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ topologisch von strikt endlichem Typ ist, so folgt im allgemeinen noch nicht, daß $f : A \longrightarrow B$ topologisch von strikt endlichem Typ ist. Aus (2.2.3) und (2.4.9) erhalten wir jedoch

Proposition 2.4.12. Ist $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen vollständigen affinoiden Ringen, der topologisch von endlichem Typ ist, und ist A tatesch, so ist f topologisch von strikt endlichem Typ.

Ein Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen affinoiden Ringen heißt Quotientenabbildung, wenn $f : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ eine Quotientenabbildung ist und $B^+ = f(A^+)^c$. Quotientenabbildungen sind topologisch von strikt endlichem Typ.

Proposition 2.4.13. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus zwischen vollständigen affinoiden Ringen.

i) f ist genau dann topologisch von endlichem Typ, wenn f über eine Quotientenabbildung

$$A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_T \longrightarrow B$$

faktorisiert, wobei $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$ ist, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$.

ii) f ist genau dann topologisch von strikt endlichem Typ, wenn f über eine Quotientenabbildung

$$A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B$$

faktorisiert.

Beweis: i) Nach (2.4.8.ii) ist f topologisch von endlichem Typ, wenn f die angegebene Faktorisierung besitzt. Es sei nun f topologisch von endlichem Typ. Nach (2.4.9) gibt es einen offenen Unterring D von B^+, so daß $B^+ = D^c$, $\tilde{B}$ endlich erzeugt über D, $f(A^+) \subseteq D$ und die Restriktion $A^+ \longrightarrow D$ von f topologisch von strikt endlichem Typ ist. Sei $g : A^+\langle X_1, \ldots, X_m\rangle \longrightarrow D$ eine Quotientenabbildung, die $A^+ \longrightarrow D$ faktorisiert. Sei $b_1, \ldots, b_s$ ein Erzeugendensystem von $\tilde{B}$ über D. Seien A_0 ein Definitionsring von A und I eine endliche Teilmenge von A_0, so daß $I \cdot A_0$ ein Definitionsideal von A_0 ist. Wir wählen ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $I^k \cdot b_i \in B^+$ für $i = 1, \ldots, s$. Wir setzen $T = (T_1, \ldots, T_{m+s})$ mit $T_i = \{1\}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $T_{m+i} = I^k$ für $i = 1, \ldots, s$. Nach (2.4.6.iv) gibt es einen stetigen Ringhomomorphismus $h : A\langle X_1, \ldots, X_{m+s}\rangle_T \longrightarrow B$ zwischen affinoiden Ringen mit $h|A = f$ und $h(X_i) = g(X_i)$ für $i = 1, \ldots, s$ und $h(X_{m+i}) = b_i$ für $i = 1, \ldots, s$. h ist eine Quotientenabbildung.

ii) Sei f topologisch von strikt endlichem Typ. Aus der Bemerkung im Anschluß an die Definition (2.4.11) erhalten wir: Es gibt einen offenen Unterring D von B^+, so daß $f(A^+) \subseteq D$, die Restriktion $A^+ \longrightarrow D$ von f topologisch von strikt endlichem

Typ ist; $B^+ = D^c$ und $\tilde{B} = \tilde{A} \cdot D$. Sei $g : A^+\langle X_1, \ldots, X_n \rangle \longrightarrow D$ eine Quotientenabbildung, die $A^+ \longrightarrow D$ faktorisiert. Wir betrachten den Ringhomomorphismus zwischen affinoiden Ringen $h : A\langle X_1, \ldots, X_n \rangle \longrightarrow B$ mit $h|A = f$ und $h(X_i) = g(X_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. h ist eine Quotientenabbildung.
Der kanonische Ringhomomorphismus $A \longrightarrow A\langle X \rangle$ ist topologisch von strikt endlichem Typ, da $(A^+)_{\langle X \rangle} = A^+\langle X \rangle$ und $\tilde{A}\langle X \rangle = \tilde{A} \cdot (A^+)_{\langle X \rangle}$. Deshalb ist jeder Ringhomomorphismus $A \longrightarrow B$, der über eine Quotientenabbildung $A\langle X \rangle \longrightarrow B$ faktorisiert, topologisch von strikt endlichem Typ.

Bemerkung 2.4.14. Entsprechend zu (2.3.30) erhält man: Seien A, B und C vollständige affinoide Ringe und $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Ringhomomorphismen. Dann gelten

i) Es sei A^+ der ganze Abschluß eines Definitionsringes von $\tilde{A}$. Dann faktorisiert f über eine Quotientenabbildung $A\langle X_i | i \in I \rangle_T \longrightarrow B$, wobei $T = (T_i | i \in I)$ eine Familie von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$ ist, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für jedes $i \in I$, genau dann, wenn f adisch ist und B^+ der ganze Abschluß eines Definitionsrings von $\tilde{B}$ ist.

ii) f und g seien stetig. $g \circ f$ sei adisch (bzw. topologisch von endlichem Typ bzw. topologisch von strikt endlichem Typ). Dann ist g adisch (bzw. topologisch von endlichem Typ bzw. topologisch von strikt endlichem Typ).

Es seien $f : A \longrightarrow B$ ein adischer Ringhomomorphismus zwischen f-adischen Ringen und A^+ ein Ganzheitsring von A. Nach (2.3.19) ist $f(A^+) \subseteq B^\circ$. Deshalb ist $f(A^+) + B^{\circ\circ}$ ein Unterring von B°. Der ganze Abschluß E von $f(A^+) + B^{\circ\circ}$ in B ist der kleinste Ganzheitsring B^+ von B, so daß $f : (A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus zwischen affinoiden Ringen ist.

Seien nun A und B vollständig und f topologisch von endlichem Typ. Nach (2.3.29) und (2.4.13) gibt es einen Ganzheitsring B^+ von B, so daß $f : (A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus zwischen affinoiden Ringen ist, der topologisch von endlichem Typ ist. Der Ring B^+ ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Beispiele hierzu:

a) Seien A und B diskret. Nach (2.3.23.i) ist $f : (A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ genau dann topologisch von endlichem Typ, wenn B^+ der ganze Abschluß eines Unterrings von B ist, der endlich erzeugt über $f(A^+)$ ist.

b) Sei k ein vollständiger topologischer Körper, dessen Topologie durch einen Rang 2 Bewertungsring V gegeben ist. Sei W der Rang 1 Bewertungsring von k mit $V \subseteq W$. Wir setzen $A = B = k$, $A^+ = V$ und $f = \mathrm{id}$. Dann ist

$f : (A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ genau dann topologisch von endlichem Typ, wenn $B^+ = V$ oder $B^+ = W$.

(Nach (2.3.28) ist B^+ der ganze Abschluß eines Unterrings D von B°, der E enthält und endlich erzeugt über E ist. Kann man unter all den Unterringen D von B°, die E enthalten und endlich erzeugt über E sind, diejenigen charakterisieren, so daß $f : (A, A^+) \longrightarrow (B, D^c)$ topologisch von endlichem Typ ist?) Wir geben nun ein wichtiges Beispiel an, in dem B^+ eindeutig bestimmt ist.

Sei k ein vollständiger topologischer Körper, dessen Topologie durch eine Rang 1 Bewertung gegeben ist. Aus (2.3.24) und (2.3.29.ii) folgt, daß die vollständigen f-adischen Ringe, die topologisch von endlichem Typ über k sind, gerade die topologischen Ringe sind, die man in der rigid analytischen Geometrie als Tate-Algebren über k bezeichnet.

Seien A und B vollständige f-adische Ringe, die topologisch von endlichem Typ über k sind, und sei $f : A \longrightarrow B$ ein stetiger Ringhomomorphismus. Dann ist f topologisch von endlichem Typ und es gilt

Proposition 2.4.15. Es gibt genau einen Ganzheitsring B^+ von B, so daß $f : (A, A^\circ) \longrightarrow (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus affinoider Ringe ist, der topologisch von endlichem Typ ist, nämlich $B^+ = B^\circ$. Insbesondere ist $A^+ = A^\circ$ der eindeutig bestimmte Ganzheitsring von A, so daß der affinoide Ring (A, A^+) topologisch von endlichem Typ über (k, k°) ist.

Beweis: Sei B^+ ein Ganzheitsring von B, so daß $f : (A, A^\circ) \longrightarrow (B, B^+)$ topologisch von endlichem Typ ist. Nach (2.4.12) und (2.4.13.ii) faktorisiert f über eine Quotientenabbildung $g : (A, A^\circ)\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow (B, B^+)$. Also ist $B^+ = g\left((A, A^\circ)\langle X_1, \ldots, X_n\rangle^+\right)^c = g\left((A^\circ)_{\langle X\rangle}\right)^c = g\left(A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle^\circ\right)^c$, wobei die letzte Gleichheit aus (2.4.5.ii) folgt. Da $g : A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \longrightarrow B$ surjektiv ist, folgt aus [BGR], (6.3.4) Prop. 1, daß B° ganz über $g\left(A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle^\circ\right)$ ist. Damit erhalten wir $B^+ = B^\circ$.

Wir verbleiben in der Situation von (2.4.15). Im allgemeinen ist B° nicht der einzige Ganzheitsring B^+ von B, so daß $f : (A, A^\circ) \longrightarrow (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus affinoider Ringe ist. Beispiel: Seien $A = k$, $B = k\langle X\rangle$ ein topologischer Polynomring über k in einer Unbestimmten und $f : A \longrightarrow B$ der kanonische Ringhomomorphismus. Wir setzen $E = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in k\langle X\rangle \mid a_0 \in k^\circ \text{ und } a_n \in k^{\circ\circ} \text{ für } n > 0\right\}$. Dann ist E der kleinste Ganzheitsring B^+ von B, so daß $f : (A, A^\circ) \longrightarrow (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus affinoider Ringe ist. Es ist $E \neq B^\circ = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in k\langle X \rangle \mid a_n \in k^\circ$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0 \}$.

Proposition (2.4.15) bleibt richtig, wenn A ein Tate-Ring ist, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.4.16. Sei A ein Tate-Ring und sei B ein noetherscher Definitionsring von A. Dann ist $A^\circ = B^c$.

Beweis: Sei s eine topologisch nilpotente Einheit von A mit $s \in B$. Sei ein $a \in A^\circ$ gegeben. Da $B[a]$ beschränkt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $B[a]$ in dem endlich erzeugten B-Modul $s^{-n} \cdot B$ enthalten ist. Da B noethersch ist, ist $B[a]$ ein endlich erzeugter B-Modul und somit a ganz über B.

Proposition 2.4.17. Seien A und B vollständige f-adische Ringe und $f : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, der topologisch von endlichem Typ ist. A sei tatesch und besitze einen noetherschen Definitionsring. Dann gibt es genau einen Ganzheitsring B^+ von B, so daß $f : (A, A^\circ) \longrightarrow (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus affinoider Ringe ist, der topologisch von endlichem Typ ist, nämlich $B^+ = B^\circ$.

Beweis: Sei B^+ ein Ganzheitsring von B, so daß $f : (A, A^\circ) \longrightarrow (B, B^+)$ topologisch von endlichem Typ ist. Sei C ein noetherscher Definitionsring von A. Es ist $C \subseteq A^\circ$. Nach (2.4.9) gibt es einen offenen Unterring D von B^+, so daß $B^+ = (A^\circ \cdot D)^c$, $f(C) \subseteq D$ und die Restriktion $C \longrightarrow D$ von f topologisch von strikt endlichem Typ ist. Da C adisch und noethersch ist, ist dann auch D adisch und noethersch. Also ist D ein noetherscher Definitionsring von B. Aus (2.4.16) erhalten wir $B^+ = (A^\circ \cdot D)^c = B^\circ$.

Proposition 2.4.18. i) Zu adischen Ringhomomorphismen zwischen f-adischen Ringen $f : A \to B$ und $g : A \to C$ existiert in der Kategorie der nat-Ringe die gefaserte direkte Summe

$$\begin{array}{ccc} D & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow f \\ C & \underset{g}{\longleftarrow} & A \end{array}$$

Der Ring D ist f-adisch und wird mit $B \overset{t}{\otimes}_A C$ bezeichnet. Die Vervollständigung von D wird mit $B \hat{\otimes}_A C$ bezeichnet.

ii) Sei $(\mathcal{Q})$ die Kategorie wie in (2.4.6). Seien A, B und C vollständige affinoide Ringe und $f : A \longrightarrow B$ und $g : A \longrightarrow C$ adische Ringhomomorphismen. Zu f und g existiert die gefaserte direkte Summe in der Kategorie $(\mathcal{Q})$.

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{g'} & B \\ {\scriptstyle f'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ C & \xleftarrow[g]{} & A \end{array}$$

D ist ein affinoider Ring. Er wird mit $B\hat{\otimes}_A C$ bezeichnet. f' und g' sind adisch. Ist f topologisch von endlichem Typ (bzw. topologisch von strikt endlichem Typ), so ist auch f' topologisch von endlichem Typ (bzw. topologisch von strikt endlichem Typ).

Beweis: Wir zeigen (ii). Sei $\tilde{E} := \tilde{B} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{C}$. Für Untergruppen G und H von $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ sei $G \otimes H$ die Untergruppe $\{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \,|\, n \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_n \in G,\, y_1, \ldots, y_n \in H\}$ von $\tilde{E}$. Seien A_0, B_0 und C_0 Definitionsringe von $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ mit $f(A_0) \subseteq B_0$ und $g(A_0) \subseteq C_0$. Sei I ein Definitionsideal von A_0. Nach (2.3.20) sind $J := I \cdot B_0$ und $K := I \cdot C_0$ Definitionsideale von B_0 und C_0. Wir setzen $E_0 = B_0 \otimes C_0$ und $R = J \cdot E_0 = K \cdot E_0$. R ist ein Ideal von E_0. Wir versehen $\tilde{E}$ mit der Gruppentopologie, so daß $\{R^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Sei ein Element $b \otimes c$ von $\tilde{E}$ gegeben. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $b \cdot J^n \subseteq B_0$ und $c \cdot K^n \subseteq C_0$. Dann ist $(b \otimes c) \cdot R^{2n} = (b \otimes c) \cdot (J^n \otimes K^n) \subseteq E_0$. Also ist $\tilde{E}$ ein topologischer Ring. Sei E^+ der ganze Abschluß von $A^+ \otimes B^+$ in $\tilde{E}$. Dann ist $E^+ \subseteq \tilde{E}^\circ$ und somit $E := (\tilde{E}, E^+)$ ein affinoider Ring. Sei D die Vervollständigung von E. Es ist klar, daß die kanonischen Ringhomomorphismen $g' : B \longrightarrow D$ und $f' : C \longrightarrow D$ die gefaserte direkte Summe von g und f in der Kategorie $(\mathcal{Q})$ bilden.

Sei nun f topologisch von endlichem Typ. Wir zeigen, daß auch f' topologisch von endlichem Typ ist. Sei zunächst f die kanonische Abbildung $A \longrightarrow A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_T$, wobei $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$ ist, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für $i = 1, \ldots, n$. Da g adisch ist, ist $g(T_i) \cdot \tilde{C}$ offen in $\tilde{C}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir haben deshalb den topologischen Ring $C\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_{g(T)}$ mit $g(T) = (g(T_1), \ldots, g(T_n))$. Sei f' die kanonische Abbildung $C \longrightarrow C\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_{g(T)}$. Nach (2.4.6.iv) gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $g' : A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_T \longrightarrow C\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_{g(T)}$ mit $g'(X_i) = X_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $f' \circ g = g' \circ f$. Aus (2.4.6.iv) folgt, daß wir mit dieser Wahl von g' und f' die gefaserte direkte Summe von g und f in der Kategorie $(\mathcal{Q})$ konstruiert haben. Die Behauptung folgt nun aus (2.4.13).

3. Adische Räume

3.1. Der topologische Raum der stetigen Bewertungen eines f-adischen Rings

Zu einer Bewertung v führen wir auf $(\Gamma_v)_\infty$ eine Topologie ein: Eine Teilmenge U von $(\Gamma_v)_\infty$ ist offen, wenn $\infty \notin U$ oder wenn es ein $y \in \Gamma_v$ gibt, so daß $\{x \in (\Gamma_v)_\infty | x > y\} \subseteq U$.

Die in (1.1) gegebene Definition eines kofinalen Elements von $(\Gamma_v)_\infty$ läßt sich nun auch folgendermaßen formulieren: Ein $x \in (\Gamma_v)_\infty$ ist kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ genau dann, wenn ∞ im Abschluß der Menge $\{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\}$ liegt.

Sei A ein f-adischer Ring.

Definition 3.1.1. Eine Bewertung v von A heißt stetig, wenn die Abbildung $v : A \longrightarrow (\Gamma_v)_\infty$ stetig ist. Wir setzen

$$\mathrm{Cont}\,(A) = \{v \in \mathrm{Spv}\,A | \, v \text{ ist stetig}\}$$

und versehen $\mathrm{Cont}\,(A)$ mit der Teilraumtopologie von $\mathrm{Spv}\,A$.

Zu einem stetigen Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$ zwischen f-adischen Ringen induziert die stetige Abbildung $\mathrm{Spv}\,(f) : \mathrm{Spv}\,B \longrightarrow \mathrm{Spv}\,A$ per Restriktion eine Abbildung $\mathrm{Cont}\,(f) : \mathrm{Cont}\,(B) \longrightarrow \mathrm{Cont}\,(A)$.

Eine Bewertung $v : A \longrightarrow (\Gamma_v)_\infty$ ist genau dann stetig, wenn v stetig in 0 ist. Repräsentieren wir Bewertungen von A durch Ringhomomorphismen von A in bewertete Körper, so sind die stetigen Bewertungen genau die Bewertungen, die repräsentiert werden können durch Ringhomomorphismen $A \longrightarrow (K, v)$, die stetig sind, wenn man K mit der Bewertungstopologie von v versieht.

$\mathrm{Cont}\,(A)$ ist im allgemeinen keine prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,A$. Dies zeigt das folgende

Beispiel: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $\alpha : k \twoheadrightarrow \Gamma_\infty$ eine Rang 1 Bewertung. Wir versehen k mit der Bewertungstopologie von α. Sei A der topologische Polynomring $k[X]_{\{1\}}$. Auf $\Gamma \oplus \mathbb{Z}$ betrachten wir die Anordnung, die die Anordnung von Γ fortsetzt und so daß $\gamma = \gamma \oplus 0 < 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$. Sei v die Bewertung $A \longrightarrow (\Gamma \oplus \mathbb{Z})_\infty$, $a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n \longmapsto \min\{\alpha(a_i) + i \cdot (0 \oplus 1)|$

$i = 0, \dots n\}$. Sei L die Teilmenge $\{w \in \operatorname{Spv}(\alpha, A) | w(T) \geq 0\}$. Es ist $v \notin \operatorname{Cont}(A)$, aber für jede konstruierbare Teilmenge Q von $\operatorname{Spv} A$ mit $v \in Q$ ist $Q \cap \operatorname{Cont}(A) \neq \emptyset$. Denn es ist $L \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A) \subseteq \operatorname{Cont}(A)$ und nach (1.2.2) ist $Q \cap L \cap \operatorname{Max}\operatorname{Spv}(\alpha, A) \neq \emptyset$, da $v \in Q \cap L$.

Aus (1.1.17) folgt, daß $\operatorname{Cont}(A)$ abgeschlossen ist gegenüber Spezialisierungen in $\operatorname{Spv} A$. Jedoch ist $\operatorname{Cont}(A)$ im allgemeinen nicht abgeschlossen in $\operatorname{Spv} A$, wie das obige Beispiel zeigt.

Lemma 3.1.2. Es gilt $\operatorname{Cont}(A) = \{v \in \operatorname{Spv} A | v(a) \text{ ist kofinal in } (\Gamma_v)_\infty \text{ für jedes } a \in A^{\circ\circ}\}$.

Beweis: Sei v eine stetige Bewertung von A. Ist $a \in A^{\circ\circ}$, so ist 0 im Abschluß der Menge $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ und somit $\infty = v(0)$ im Abschluß der Menge $\{n \cdot v(a) | n \in \mathbb{N}\}$, d.h. $v(a)$ ist kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$.

Sei nun v eine Bewertung von A, so daß $v(a)$ kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ ist für jedes $a \in A^{\circ\circ}$. Sei ein $y \in \Gamma_v$ gegeben. Wir zeigen, daß es eine Nullumgebung U von A gibt mit $v(u) > y$ für jedes $u \in U$. Sei A_0 ein Definitionsring von A und sei J eine endliche Teilmenge von A_0, so daß $I := J \cdot A_0$ ein Definitionsideal von A_0 ist. Es ist $I \subseteq A^{\circ\circ}$ und somit $v(i)$ kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ für jedes $i \in I$. Insbesondere ist $v(i) > 0$ für jedes $i \in I$. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $n \cdot \min\{v(j) | j \in J\} > y$. Dann ist $v(u) > y$ für jedes Element u der Nullumgebung $I^{n+1} = J^n \cdot I$.

Für eine Teilmenge L von A bezeichnen wir mit $V(L)$ die Menge $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | L \subseteq \mathfrak{p}\}$.

A besitzt ein endlich erzeugtes Ideal I mit $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | \mathfrak{p} \text{ ist offen}\}$. Zum Beispiel hat jedes von einem Definitionsideal eines Definitionsrings von A erzeugte Ideal von A diese Eigenschaft.

Wir erinnern daran, daß für endlich erzeugte Ideale I und J von A mit $V(I) = V(J)$ gilt $\operatorname{Spv}(A, I) = \operatorname{Spv}(A, J)$.

Satz 3.1.3. Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von A mit $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | \mathfrak{p} \text{ ist offen}\}$. Dann gilt $\operatorname{Cont}(A) = \{v \in \operatorname{Spv}(A, I) | v(a) > 0 \text{ für jedes } a \in A^{\circ\circ}\}$.

Man sieht, welchen Vorteil der Übergang von $\operatorname{Spv} A$ nach $\operatorname{Spv}(A, I)$ bringt: Man kann die Bedingung „$v(a)$ kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ für jedes $a \in A^{\circ\circ}$“ ersetzen durch die viel einfachere Bedingung „$v(a) > 0$ für jedes $a \in A^{\circ\circ}$“. Letztere Bedingung ist eine „abgeschlossene“ Bedingung. Wir erhalten

Korollar 3.1.4. Cont(A) ist eine abgeschlossene (und damit prokonstruierbare) Teilmenge von Spv(A, I). Insbesondere ist Cont(A) ein spektraler Raum.

Beweis: Es ist Cont$(A) = \bigcap_{a \in A^{\circ\circ}} (\operatorname{Spv}(A,I) \backslash R_A(\frac{1}{a}))$ und somit ist Cont(A) abgeschlossen in Spv(A, I).

Der Beweis von (3.1.3) ergibt sich aus den folgenden beiden einfachen Beobachtungen.

Lemma 3.1.5. Sei I ein endlich erzeugtes Ideal eines Rings A. Sei T eine Teilmenge von I, so daß es zu jedem $a \in A$ und jedem $t \in T$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $t^n \cdot a \in T$. Dann ist $\{v \in \operatorname{Spv}(A, I) | \, v(t) > 0 \text{ für jedes } t \in T\} \subseteq \{v \in \operatorname{Spv} A | \, v(t) \text{ ist kofinal in } (\Gamma_v)_\infty \text{ für jedes } t \in T\}$.

Beweis: Gegeben sei ein $v \in \operatorname{Spv}(A, I)$ mit $v(t) > 0$ für jedes $t \in T$. Ist $\Gamma_v \neq c\Gamma_v$, so folgt aus (1.3.5), daß $v(t)$ kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ sogar für jedes $t \in I$ ist. Wir nehmen deshalb an $\Gamma_v = c\Gamma_v$. Sei ein $t \in T$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $v(t)$ kofinal in $(\Gamma_v)_\infty$ ist. Wegen $\Gamma_v = c\Gamma_v$ ist dazu zu zeigen: Zu jedem $a \in A$ mit $v(a) \neq \infty$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot v(t) > -v(a)$.

Sei ein $a \in A$ mit $v(a) \neq \infty$ gegeben. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $t^n \cdot a \in T$. Dann ist $n \cdot v(t) + v(a) = v(t^n \cdot a) > 0$, also $n \cdot v(t) > -v(a)$.

Lemma 3.1.6. Sei I ein endlich erzeugtes Ideal eines Rings A. Sei T eine Teilmenge von A, die I erzeugt. Dann ist $\{v \in \operatorname{Spv} A | \, v(t) \text{ ist kofinal in } (\Gamma_v)_\infty \text{ für jedes } t \in T\} \subseteq \{v \in \operatorname{Spv}(A, I) | \, v(t) > 0 \text{ für jedes } t \in T\}$.

Beweis: (1.3.5)

Zum Beweis von (3.1.3). Sei (A_0, T) ein Definitionstupel von A. Wir können annehmen $I = T \cdot A$. Es ist T eine Nullumgebung von A bestehend aus topologisch nilpotenten Elementen. Deshalb erhalten wir aus (3.1.5) und (3.1.6) $\{v \in \operatorname{Spv} A | \, v(a) \text{ ist kofinal in } (\Gamma_v)_\infty \text{ für jedes } a \in A^{\circ\circ}\} = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(t) \text{ ist kofinal in } (\Gamma_v)_\infty \text{ für jedes } t \in T\} = \{v \in \operatorname{Spv}(A, I) | \, v(t) > 0 \text{ für jedes } t \in T\} = \{v \in \operatorname{Spv}(A, I) | \, v(a) > 0 \text{ für jedes } a \in A^{\circ\circ}\}$. Die Behauptung folgt nun aus (3.1.2).

Definition 3.1.7. Sei A ein f-adischer Ring. Jede Bewertung von A mit offenem Träger ist stetig. Diese Bewertungen von A heißen nichtanalytisch. Eine analytische Bewertung von A ist eine stetige Bewertung von A, deren Träger nicht offen ist. Die Menge der nichtanalytischen Bewertungen von A wird mit Cont$(A)_{na}$ und die Menge der analytischen Bewertungen von A wird mit Cont$(A)_a$ bezeichnet.

Da $V(A^{\circ\circ}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \,|\, \mathfrak{p} \text{ ist offen}\}$, ist eine stetige Bewertung v von A genau dann analytisch, wenn es ein $a \in A^{\circ\circ}$ gibt mit $v(a) \neq \infty$. Aus (1.3.14.i) und (3.1.4) folgt

Proposition 3.1.8. $\operatorname{Cont}(A)_a$ ist eine offene konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Cont}(A)$.

Proposition 3.1.9. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein adischer Ringhomomorphismus zwischen f-adischen Ringen. Mit g bezeichnen wir die Abbildung
$\operatorname{Cont}(f) : \operatorname{Cont}(B) \longrightarrow \operatorname{Cont}(A)$. Es gilt

i) g ist spektral

ii) $g\left(\operatorname{Cont}(B)_a\right) \subseteq \operatorname{Cont}(A)_a$ und $g\left(\operatorname{Cont}(B)_{na}\right) \subseteq \operatorname{Cont}(A)_{na}$.

Beweis: Seien (A_0, I) und (B_0, J) Definitionstupel von A und B mit $f(A_0) \subseteq B_0$ und $J = I \cdot B_0$. Wir setzen $K = I \cdot A$. $\operatorname{Cont}(A)$ ist eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(A, K)$ und $\operatorname{Cont}(B)$ ist eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(B, J \cdot B) = \operatorname{Spv}(B, K \cdot B)$. Die Behauptung (i) folgt aus (1.3.13.ii). Die Behauptung (ii) ist trivial.

Proposition 3.1.10. Sei A ein offener Unterring eines f-adischen Rings B. Sei g die durch die Inklusion $A \subseteq B$ induzierte Abbildung $\operatorname{Spv} B \longrightarrow \operatorname{Spv} A$. Dann gelten

i) $\operatorname{Cont}(B) = g^{-1}\left(\operatorname{Cont}(A)\right)$

ii) g gibt per Einschränkung einen Homöomorphismus von $\operatorname{Cont}(B)_a$ auf $\operatorname{Cont}(A)_a$.

Beweis: Sei v eine Bewertung von B. Es sei $w := v|A$ eine stetige Bewertung von A. Ist $\operatorname{supp}(v)$ offen in B, so ist natürlich v stetig. Sei nun $\operatorname{supp}(v)$ nicht offen in B. Nach dem nachfolgenden Lemma (3.1.11) ist $\Gamma_v = \Gamma_w$. Deshalb ist v stetig. Damit ist (i) gezeigt. (ii) ergibt sich nun aus (3.1.11).

Lemma 3.1.11. Sei A ein offener Unterring eines f-adischen Rings B. Sei f der durch die Inklusion $A \subseteq B$ induzierte Morphismus von Schemata
$\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$. Sei X die abgeschlossene Teilmenge $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \,|\, \mathfrak{p} \text{ ist offen}\}$ von $\operatorname{Spec} A$. Dann ist $f^{-1}(X) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B | \mathfrak{p} \text{ ist offen}\}$ und f induziert einen Isomorphismus $\operatorname{Spec} B \setminus f^{-1}(X) \longrightarrow \operatorname{Spec} A \setminus X$.

Beweis: Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \setminus X$ gegeben. Wegen $X = V(A^{\circ\circ})$ gibt es ein $s \in A^{\circ\circ}$ mit $s \notin \mathfrak{p}$. Die kanonische Abbildung $g : A_s \longrightarrow B_s$ ist ein Isomorphismus. Denn: Natürlich ist g injektiv. Da $s \in A^{\circ\circ}$ und A offen in B ist, gibt es zu jedem $b \in B$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n \cdot b \in A$. Deshalb ist g surjektiv.

Proposition 3.1.12. Sei A ein f-adischer Ring und sei $\hat{A}$ seine Vervollständigung. Die Abbildung $g : \mathrm{Cont}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Cont}(A)$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis: g ist stetig und bijektiv. Wir zeigen, daß g eine abgeschlossene Abbildung ist. Nach (3.1.9) ist g spektral. Deshalb genügt es zu zeigen: Seien u ein Element von $\mathrm{Cont}(\hat{A})$ und w' eine Spezialisierung von $u' := g(u)$ in $\mathrm{Cont}(A)$. Dann gibt es eine Spezialisierung w von u in $\mathrm{Cont}(\hat{A})$ mit $w' = g(w)$.

Nach (1.1.17) gibt es ein $v' \in \mathrm{Spv}\, A$, das eine Sekundärspezialisierung von u' und eine Primärgeneralisierung von w' ist. Sei v eine Sekundärspezialisierung von u in $\mathrm{Spv}\, \hat{A}$ mit $v' = g(v)$. Als Spezialisierungen stetiger Bewertungen sind v und v' stetig. Deshalb gilt $\Gamma_v = \Gamma_{v'}$ und $c\Gamma_v = c\Gamma_{v'}$. Daher gibt es eine Primärspezialisierung w von v in $\mathrm{Spv}\, \hat{A}$ mit $w' = g(w)$. Es ist $w \in \mathrm{Cont}(\hat{A})$.

Sei A ein f-adischer Ring A. Der f-adische Ring $A/\overline{\{0\}}$ heißt der zu A assoziierte Hausdorff-Ring. Es ist $\mathrm{Cont}\left(A/\overline{\{0\}}\right) \longrightarrow \mathrm{Cont}(A)$ ein Homöomorphismus.

Proposition 3.1.13. Sei A ein f-adischer Ring.

i) Es ist $\mathrm{Cont}(A) = \emptyset$ genau dann, wenn der zu A assoziierte Hausdorff-Ring der Null-Ring ist (d.h. A ist die einzige Nullumgebung von A).

ii) Es ist $\mathrm{Cont}(A)_a = \emptyset$ genau dann, wenn der zu A assoziierte Hausdorff-Ring diskret ist (d.h. A hat eine kleinste Nullumgebung).

Beweis: ii) Sei $\mathrm{Cont}(A)_a = \emptyset$. Nach (3.1.9.ii) ist $\mathrm{Cont}(\hat{A})_a = \emptyset$. Sei (B, I) ein Definitionstupel von $\hat{A}$. Nach (3.1.10) ist $\mathrm{Cont}(B)_a = \emptyset$. Hieraus folgt, wie wir gleich zeigen werden, daß I in jedem Primideal von B enthalten ist. Also ist $I^n = (0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Deshalb ist B diskret und damit ist auch der zu A assoziierte Hausdorff-Ring diskret.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von B. Angenommen, es sei $I \not\subseteq \mathfrak{p}$. Wir wählen ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von B mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Sei v eine Bewertung von B, so daß $\mathrm{supp}(v) = \mathfrak{p}$ und $B(v)$ den lokalen Ring $(B/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}$ dominiert. Da B vollständig ist, ist $I \subseteq \mathfrak{m}$ ([B], III.2.13 Lemma 3) und somit $v(i) > 0$ für jedes $i \in I$. Wir setzen $w = v|c\Gamma_v(I)$. Es ist $w \in \mathrm{Spv}(B, I)$ und $w(i) > 0$ für jedes $i \in I$. Nach (3.1.3) ist $w \in \mathrm{Cont}(B)$. Da $I \not\subseteq \mathfrak{p} = \mathrm{supp}(v)$ und w eine I-zulässige Spezialisierung von v ist, ist $I \not\subseteq \mathrm{supp}(w)$. Also $w \in \mathrm{Cont}(B)_a$, Widerspruch zu $\mathrm{Cont}(B)_a = \emptyset$.

i) Sei $\mathrm{Cont}(A) = \emptyset$. Nach (ii) ist $\overline{\{0\}}$ offen. Jede Bewertung v von A mit $\overline{\{0\}} \subseteq \mathrm{supp}(v)$ ist stetig. Deshalb ist das Ideal $\overline{\{0\}}$ in keinem Primideal von A enthalten, also $\overline{\{0\}} = A$.

Es ist $\text{Cont}\,(A)_{na} = \emptyset$ genau dann, wenn A das einzige offene Ideal von A ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn A ein Tate-Ring ist. Tate-Ringe sind jedoch nicht die einzigen f-adischen Ringe mit dieser Eigenschaft.

Für Anwendungen in späteren Paragraphen notieren wir die folgende einfache Beobachtung.

Lemma 3.1.14. Seien A ein f-adischer Ring und v eine analytische Bewertung von A. Dann gilt

i) v ist mikrobial.

ii) Hat v den Rang 1, so ist $v(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^\circ$.

Beweis: ii) Sei $a \in A^\circ$ gegeben. Angenommen, es sei $v(a) < 0$. Wir wählen ein $b \in A^{\circ\circ}$ mit $v(b) \neq \infty$. Da Γ_v Rang 1 hat, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot v(a) < -v(b)$. Es ist $a^n \cdot b \in A^{\circ\circ}$. Da v stetig ist, ist $v(a^n \cdot b) > 0$. Widerspruch.

Sie $A = (\tilde{A}, A^+)$ ein affinoider Ring.

Definition 3.1.15. Der topologische Teilraum $\{v \in \text{Cont}\,(\tilde{A}) | \, v(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^+\}$ von $\text{Cont}\,(\tilde{A})$ wird mit $\text{Spa}\, A$ bezeichnet. Er heißt das adische Spektrum von A. Die Elemente der Menge $(\text{Spa}\, A)_a := \text{Spa}\, A \cap \text{Cont}\,(\tilde{A})_a$ heißen die analytischen Punkte von $\text{Spa}\, A$ und die Elemente der Menge $(\text{Spa}\, A)_{na} := \text{Spa}\, A \cap \text{Cont}\,(\tilde{A})_{na}$ heißen die nichtanalytischen Punkte von $\text{Spa}\, A$. Besteht $\text{Spa}\, A$ nur aus analytischen Punkten, so nennen wir $\text{Spa}\, A$ auch das analytische Spektrum von A.

Für ein Element s von $\tilde{A}$ und eine Teilmenge $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ von $\tilde{A}$, so daß $T \cdot \tilde{A}$ offen ist, setzen wir

$$R\Big(\frac{T}{s}\Big) = R\Big(\frac{t_1, \dots, t_n}{s}\Big) := R_{\tilde{A}}\Big(\frac{t_1}{s}, \dots, \frac{t_n}{s}\Big) \cap \text{Spa}\, A\,.$$

Sind $S = (s_1, \dots, s_n)$ ein n-Tupel von Elementen von $\tilde{A}$ und $T = (T_1, \dots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, so setzen wir

$$R\Big(\frac{T}{S}\Big) = R\Big(\frac{T_1}{s_1}, \dots, \frac{T_n}{s_n}\Big) := \bigcap_{i=1}^{n} R\Big(\frac{T_i}{s_i}\Big)\,.$$

Diese Teilmengen von $\text{Spa}\, A$ heißen rational.

Bemerkung. i) Ist $A^+ = (\mathbb{Z} \cdot 1 + \tilde{A}^{\circ\circ})^c$ der kleinste Ganzheitsring von $\tilde{A}$, so ist $\text{Spa}\, A = \text{Cont}\,(\tilde{A})$.

ii) Ist $\tilde{A}$ diskret und A^+ der kleinste Ganzheitsring von $\tilde{A}$, so ist $\operatorname{Spa} A = \operatorname{Spv} \tilde{A}$. Die Definitionen der rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ und $\operatorname{Spv} \tilde{A}$ stimmen in diesem Fall überein.
iii) Wir können bei Bedarf immer ohne Einschränkung annehmen, daß s ein Element von T ist, denn $R(\frac{T}{s}) = R(\frac{T \cup \{s\}}{s})$.
iv) Es sei $s_i \in T_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir setzen $T = \{\ell_1 \cdot \ldots \cdot \ell_n | \ell_i \in T_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ und $s = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$. Dann ist $T \cdot \tilde{A}$ offen und $R(\frac{T_1}{s_1}, \ldots, \frac{T_n}{s_n}) = R(\frac{T}{s})$.

Satz 3.1.16. $\operatorname{Spa} A$ ist ein spektraler Raum. $(\operatorname{Spa} A)_a$ ist eine offene konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$. Die rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ sind konstruierbar und bilden eine Basis für die Topologie von $\operatorname{Spa} A$.

Beweis: Sei J ein Definitionsideal eines Definitionsrings von $\tilde{A}$. Nach (3.1.4) ist $\operatorname{Cont}(\tilde{A})$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\tilde{A}, J \cdot \tilde{A})$. Nach (1.3.10.ii) ist für jedes $a \in \tilde{A}$ die Menge $\{v \in \operatorname{Spv}(\tilde{A}, J \cdot \tilde{A}) | v(a) \geq 0\}$ konstruierbar in $\operatorname{Spv}(\tilde{A}, J \cdot \tilde{A})$. Deshalb ist $\operatorname{Spa} A$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\tilde{A}, J \cdot \tilde{A})$. Nach (3.1.8) ist $(\operatorname{Spa} A)_a$ eine offene konstruierbare Teilmenge von $(\operatorname{Spa} A)_a$. Ein Ideal H von $\tilde{A}$ ist genau dann offen, wenn $J \cdot \tilde{A} \subseteq \sqrt{H}$. Deshalb folgt die Behauptung über die rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ aus (1.3.10.ii).

Bemerkung 3.1.17. i) Man kann leicht $(\operatorname{Spa} A)_a$ als endliche Vereinigung rationaler Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ schreiben: Sei T eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}$ mit $V(T) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \tilde{A} | \mathfrak{p} \text{ ist offen}\}$. Dann ist $(\operatorname{Spa} A)_a = \bigcup_{t \in T} R(\frac{T}{t})$.
ii) $(\operatorname{Spa} A)_{na}$ ist eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$ und eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv} \tilde{A}$.

Sei $f : A \longrightarrow B$ ein stetiger Ringhomomorphismus zwischen affinoiden Ringen. $\operatorname{Cont}(f)$ gibt per Restriktion eine stetige Abbildung $\operatorname{Spa}(f) : \operatorname{Spa} B \longrightarrow \operatorname{Spa} A$. Nach (3.1.9) ist $\operatorname{Spa}(f)$ spektral, wenn f adisch ist. Genauer gilt

Proposition 3.1.18. Ist f adisch, so ist $\operatorname{Spa}(f)^{-1}(U)$ eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} B$ für jede rationale Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$.

Beweis: Ist f adisch, so ist $f(T) \cdot \tilde{B}$ offen in $\tilde{B}$ für jede Teilmenge T von $\tilde{A}$, so daß $T \cdot \tilde{A}$ offen in $\tilde{A}$ ist.

Sei A ein affinoider Ring. Nach (3.1.12) ist die kanonische Abbildung $g : \operatorname{Spa} \hat{A} \longrightarrow \operatorname{Spa} A$ offen. Wir wollen nun etwas mehr zeigen, nämlich, daß g rationale Teilmengen auf rationale Teilmengen abbildet. Zunächst das folgende Lemma, das unabhängig davon von Interesse ist.

Lemma 3.1.19. Sei A ein vollständiger affinoider Ring und seien s, $t_1, \dots, t_n$ Elemente von $\tilde{A}$, so daß das Ideal $(t_1, \dots, t_n)$ von $\tilde{A}$ offen ist. Dann gibt es eine Nullumgebung U von $\tilde{A}$, so daß für $s' \in s + U$, $t'_1 \in t_1 + U, \dots, t'_n \in t_n + U$ gilt: Das Ideal $(t'_1, \dots, t'_n)$ ist offen und $R(\frac{t_1,\dots,t_n}{s}) = R(\frac{t'_1,\dots,t'_n}{s'})$.

Beweis: Wir setzen $t_0 = s$. Für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ sei X_i die rationale Teilmenge $R(\frac{t_0,\dots,t_n}{t_i})$. Nach dem nachfolgenden Lemma (3.1.20) gibt es eine Nullumgebung U' von $\tilde{A}$, so daß für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ gilt: $v(u) > v(t_i)$ für jedes $u \in U'$ und jedes $v \in X_i$. Eine nähere Betrachtung würde zeigen, daß für $t'_i \in t_i + U'$ $(i = 1, \dots, n)$ das Ideal $(t'_1, \dots, t'_n)$ offen ist. Wir wollen darauf nicht eingehen, sondern einfach aus dem nachfolgenden Lemma (3.1.21) schließen, daß es eine Nullumgebung U'' von $\tilde{A}$ gibt, so daß für $t'_i \in t_i + U''$ $(i = 1, \dots, n)$ das Ideal $(t'_1, \dots, t'_n)$ offen ist. Wir zeigen, daß für $U = U' \cap U'' \cap \tilde{A}^{\circ\circ}$ die Behauptung aus (3.1.19) gilt.

Zunächst zeigen wir $X_0 \subseteq R(\frac{t'_1,\dots,t'_n}{t'_0})$. Sei $v \in X_0$ gegeben. Da $t'_i - t_i \in U'$ für $i = 0, \dots, n$, gilt $v(t'_i - t_i) > v(t_0)$ für $i = 0, \dots, n$. Daraus folgt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$
\begin{aligned}
v(t'_i) = v\big(t_i + (t'_i - t_i)\big) &\geq \min\big\{v(t_i),\, v(t'_i - t_i)\big\} \\
&\geq v(t_0) = v\big(t_0 + (t'_0 - t_0)\big) = v(t'_0)
\end{aligned}
$$

Deshalb ist $v \in R(\frac{t'_1,\dots,t'_n}{t'_0})$.

Sei nun $v \in \operatorname{Spa} A$ mit $v \notin X_0$. Wir zeigen $v \notin R(\frac{t'_1,\dots,t'_n}{t'_0})$. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $v(t_i) = \infty$ für $i = 0, \dots, n$. Da $(t_1, \dots, t_n)$ offen ist, ist dann $\operatorname{supp}(v)$ offen. Also $\tilde{A}^{\circ\circ} \subseteq \operatorname{supp}(v)$ und damit $t'_0 - t_0 \in \operatorname{supp}(v)$. Da $t_0 \in \operatorname{supp}(v)$, erhalten wir $t'_0 \in \operatorname{supp}(v)$. Deshalb $v \notin R(\frac{t'_1,\dots,t'_n}{t'_0})$.

Sei nun $v(t_i) \neq \infty$ für ein $i \in \{0, \dots, n\}$. Wir wählen ein $j \in \{0, \dots, n\}$ mit $v(t_j) = \min\big\{v(t_0), \dots, v(t_n)\big\} \neq \infty$. Es ist $v(t_0) > v(t_j)$, denn sonst wäre $v \in X_0$. Da $t'_i - t_i \in U'$ für $i = 0, \dots, n$ und $v \in X_j$, ist $v(t'_i - t_i) > v(t_j)$ für $i = 0, \dots, n$. Deshalb gilt

$$
\begin{aligned}
v(t'_0) = v\big(t_0 + (t'_0 - t_0)\big) &\geq \min\big\{v(t_0), v(t'_0 - t_0)\big\} \\
&> v(t_j) = v\big(t_j + (t'_j - t_j)\big) = v(t'_j)
\end{aligned}
$$

Aus $v(t'_0) > v(t'_j)$ folgt $v \notin R(\frac{t'_1,\dots,t'_n}{t'_0})$.

Lemma 3.1.20. Seien A ein f-adischer Ring, Q eine quasikompakte Teilmenge von $\operatorname{Cont}(A)$ und $(a_i \mid i \in I)$ eine Familie von Elementen von A, so daß es zu jedem $v \in Q$

ein $i \in I$ gibt mit $v(a_i) \neq \infty$. Dann gibt es eine Nullumgebung U von A, so daß es zu jedem $v \in Q$ ein $i \in I$ gibt mit $v(u) > v(a_i)$ für jedes $u \in U$.

Beweis: Sei (A_0, J) ein Definitionstupel von A und sei K eine endliche Teilmenge von A_0 mit $J = K \cdot A_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei
$X_n = \bigcup\limits_{i \in I} \{v \in \mathrm{Cont}\,(A) |\, v(a_i) \neq \infty \text{ und } v(k^n) \geq v(a_i) \text{ für jedes } k \in K\}$.
Jedes X_n ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{Cont}\,(A)$ mit $X_n \subseteq X_m$ für $m \geq n$. Es ist $Q \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Da Q quasikompakt ist, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $Q \subseteq X_p$. Dann gilt die Behauptung für die Nullumgebung $U = \{k^p |\, k \in K\} \cdot J$.

Lemma 3.1.21. Seien A ein vollständiger adischer Ring und I ein Definitionsideal von A. Sei $i_1, \ldots, i_n$ ein Erzeugendensystem von I. Dann ist auch $i'_1, \ldots, i'_n$ ein Erzeugendensystem von I, wenn $i'_k \in i_k + I^2$ für $k = 1, \ldots, n$.

Beweis: Es genügt zu zeigen $I = (i_1, \ldots, i_{n-1}, i'_n)$. Hierzu ist zu zeigen $i_n \in (i_1, \ldots, i_{n-1}, i'_n)$. Es ist $I^2 \subseteq (i_1, \ldots, i_{n-1}) + i_n^2 \cdot A$. Wir schreiben $i'_n = i_n + a + i_n^2 b$ mit $a \in (i_1, \ldots, i_{n-1})$ und $b \in A$. Da A vollständig ist, ist $c := 1 + i_n b$ eine Einheit in A. Somit erhalten wir $i_n = c^{-1} \cdot (i'_n - a) \in (i_1, \ldots, i_{n-1}, i'_n)$.

Korollar 3.1.22. Sei A ein affinoider Ring. Unter dem Homöomorphismus $g : \mathrm{Spa}\,\hat{A} \longrightarrow \mathrm{Spa}\,A$ werden rationale Teilmengen auf rationale Teilmengen abgebildet.

Beweis: Sei $X = R(\frac{T}{s})$ eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,\hat{A}$. Nach (3.1.19) können wir annehmen $T = f(H)$ und $s = f(e)$, wobei $f : \tilde{A} \longrightarrow (\tilde{A})\hat{}$ die kanonische Abbildung und H endlich ist. Nach (3.1.20) gibt es eine Nullumgebung U von $\tilde{A}$, so daß $v\big(f(u)\big) \geq v(s)$ für jedes $u \in U$ und jedes $v \in X$. Sei I eine endliche Teilmenge von U, so daß $I \cdot \tilde{A}$ offen in $\tilde{A}$ ist. In $\mathrm{Spa}\,A$ haben wir die rationale Teilmenge $Y = R(\frac{H \cup I}{e})$. Es ist $Y = g(X)$.

3.2. Die Prägarbe der adischen Funktionen

Im letzten Paragraphen haben wir zu einem affinoiden Ring A den topologischen Raum Spa A definiert. Wir wollen nun auf diesem topologischen Raum eine Prägarbe konstruieren.

Wir erinnern an die Definition von Prägarbe und Garbe auf einem topologischen Raum mit Werten in einer Kategorie ([EGA*], 0.3.1). Sei (Nat) die Kategorie der vollständigen nat-Ringe: Die Objekte sind die vollständigen nat-Ringe, die Morphismen sind die stetigen Ringhomomorphismen. Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe auf X mit Werten in der Kategorie (Nat) (wir sagen auch: Prägarbe vollständiger nat-Ringe auf X) ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der offenen Mengen von X in die Kategorie (Nat). Ein Morphismus zwischen Prägarben auf X mit Werten in (Nat) ist ein Morphismus von Funktoren.

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in (Nat) heißt Garbe auf X mit Werten in (Nat), wenn gilt

(S) Für jedes Objekt T aus (Nat) ist $U \longmapsto \operatorname{Hom}(T, \mathcal{F}(U))$ eine Garbe von Mengen auf X.

Die Bedingung (S) ist äquivalent zu

(S)′ $\mathcal{F}$, betrachtet als Prägarbe von Mengen, ist eine Garbe von Mengen und für jede offene Überdeckung (U_i) einer offenen Teilmenge U von X ist die kanonische Abbildung $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ eine topologische Einbettung, wobei $\prod_i \mathcal{F}(U_i)$ mit der Produkttopologie versehen ist.

Seien $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X mit Werten in (Nat) und x ein Punkt von X. Wenn wir von dem Halm $\mathcal{F}_x$ von $\mathcal{F}$ in x sprechen, so meinen wir immer den Halm in x der $\mathcal{F}$ zugrunde liegenden Prägarbe von Ringen.

Sind $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe (bzw. Garbe) auf X mit Werten in (Nat), so haben wir wie üblich eine Prägarbe (bzw. Garbe) $f_*(\mathcal{F})$ auf Y mit Werten in (Nat).

In (1.5) haben wir eine Kategorie (VL) definiert. Wir wollen nun eine Kategorie $(VL)_{top}$ definieren. Wir betrachten Tripel $\big(X, \mathcal{O}_X, (v_x \mid x \in X)\big)$, für die gilt

(1) X ist ein topologischer Raum, $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe vollständiger nat-Ringe auf X mit lokalen Halmen $\mathcal{O}_{X,x}$ und jedes v_x ist eine Bewertung von $\mathcal{O}_{X,x}$ mit Träger im maximalen Ideal.

Wie in (1.5) haben wir zu solch einem Tripel eine Garbe $\mathcal{O}_X^+$ mit $\mathcal{O}_X^+(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) | \, v_x(f_x) \geq 0 \text{ für jedes } x \in U\}$. Sind U eine offene Teilmenge in X, f ein Element von $\mathcal{O}_X(U)$ und x ein Punkt von U, so bezeichnen wir das Bild von f_x in dem Residuenkörper $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ mit $f(x)$. Statt $v_x(f_x)$ schreiben wir manchmal auch $v_x(f(x))$, oder auch einfach $v_x(f)$.

Definition 3.2.1. Die Objekte der Kategorie $(VL)_{top}$ sind die Tripel $(X, \mathcal{O}_X, (v_x | \, x \in X))$, die (1) erfüllen und für die gilt

(2) Für jedes $x \in X$ ist $(\mathcal{O}_X^+)_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} | \, v_x(f) \geq 0\}$ (d.h. betrachten wir $\mathcal{O}_X$ nur als Garbe von Ringen, so ist $(X, \mathcal{O}_X, (v_x | \, x \in X))$ ein Objekt von (VL)).

(3) Für jede offene Teilmenge U von X ist $\mathcal{O}_X^+(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U)^\circ$.

(4) Für jede offene Teilmenge U von X und jedes $x \in U$ ist die Komposition der Abbildungen

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{v_x} (\Gamma_{v_x})_\infty$$

stetig.

Die Morphismen zwischen zwei Objekten $(X, \mathcal{O}_X, (v_x | \, x \in X))$ und $(Y, \mathcal{O}_Y, (v_y | \, y \in Y))$ in $(VL)_{top}$ sind die Paare (f, φ), für die gilt: f ist eine stetige Abbildung $X \longrightarrow Y$ und φ ist ein Morphismus zwischen Garben vollständiger nat-Ringe $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$, so daß für jedes $x \in X$ die induzierte Abbildung $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ringhomomorphismus zwischen den bewerteten lokalen Ringen $(\mathcal{O}_{Y,f(x)}, v_{f(x)})$ und $(\mathcal{O}_{X,x}, v_x)$ ist.

Bemerkung 3.2.2. Seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{O}$ eine Garbe vollständiger nat-Ringe auf X.

i) Sind (U_i) eine offene Überdeckung einer offenen Teilmenge U von X und s ein Element von $\mathcal{O}(U)$, so daß $s|U_i \in \mathcal{O}(U_i)^\circ$ für jedes i, so ist $s \in \mathcal{O}(U)^\circ$. Dies folgt unmittelbar aus (S)'.

ii) Eine Restriktionsabbildung $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ bildet $\mathcal{O}(V)^\circ$ nicht unbedingt nach $\mathcal{O}(U)^\circ$ ab. Deshalb ist $U \longmapsto \mathcal{O}(U)^\circ$ im allgemeinen keine Prägarbe. Ist jedoch $U \longmapsto \mathcal{O}(U)^\circ$ eine Prägarbe auf X, so ist nach (i) diese Prägarbe eine Garbe.

iii) Ist $U \longmapsto \mathcal{O}(U)^\circ$ eine Garbe auf X, so wird diese Garbe mit $\mathcal{O}^\circ$ bezeichnet.

Die Bedingungen (2), (3) und (4) sind lokaler Natur, d.h. ist $(X, \mathcal{O}_X, (v_x | \, x \in X))$ ein Tripel, das (1) erfüllt, und ist (U_i) eine Überdeckung von X durch offene Teilmengen, so ist $(X, \mathcal{O}_X, (v_x | x \in X))$ genau dann ein Objekt von $(VL)_{top}$, wenn alle offenen Teilräume $(U_i, \mathcal{O}_X|U_i, (v_x | \, x \in U_i))$ Objekte von $(VL)_{top}$ sind.

Nach (1.5.4) sind die Morphismen zwischen $(X, \mathcal{O}_X, (v_x|x \in X))$ und $(Y, \mathcal{O}_Y, (v_y|\, y \in Y))$ in der Kategorie $(VL)_{top}$ die Morphismen lokal geringter und topologisch geringter Räume $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, die einen Morphismus lokal geringter (und topologisch geringter) Räume $(X, \mathcal{O}_X^+) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y^+)$ induzieren.

Entsprechend zu $(*)$ in (1.5) formulieren wir nun das folgende Problem.

$(*)_{top}$ Sei (A, B) ein Paar von Ringen, wobei A ein nat-Ring ist. Gesucht sind ein Objekt X der Kategorie $(VL)_{top}$ und ein stetiger Ringhomomorphismus $h : (A, B) \longrightarrow (\Gamma(X, \mathcal{O}_X), \Gamma(X, \mathcal{O}_X^+))$, so daß gilt: Sind Y ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$ und $f : (A, B) \longrightarrow (\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^+))$ ein stetiger Ringhomomorphismus, so gibt es genau einen Morphismus der Kategorie $(VL)_{top}$ $s : Y \longrightarrow X$ mit $f = g \circ h$, wobei g der durch s induzierte stetige Ringhomomorphismus $(\Gamma(X, \mathcal{O}_X), \Gamma(X, \mathcal{O}_X^+)) \longrightarrow (\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^+))$ ist.

Wir behandeln das Problem $(*)_{top}$ nicht in dieser Allgemeinheit, sondern beschränken uns von vornherein auf den Fall, daß A ein f-adischer Ring ist. Aber selbst in diesem Fall weiß ich nicht, ob $(*)_{top}$ immer eine Lösung hat.

Definition 3.2.3. Sei A ein affinoider Ring. Zu jeder rationalen Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$ definieren wir einen affinoiden Ring $F(U) = F_A(U)$ folgendermaßen: Wir wählen ein n-Tupel $S = (s_1, \ldots, s_n)$ von Elementen von $\tilde{A}$ und ein n-Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n)$ von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen für $i = 1, \ldots, n$ und $U = R(\frac{T}{S})$. Nach (2.4) haben wir den affinoiden Ring $A\langle\frac{T}{S}\rangle$. Wir setzen $F(U) = A\langle\frac{T}{S}\rangle$.

Daß diese Definition unabhängig von der Auswahl von S und T ist, ergibt sich aus dem folgenden Satz.

Satz 3.2.4. Seien A ein affinoider Ring und U eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$. Dann gibt es einen stetigen Ringhomomorphismus affinoider Ringe $h : A \longrightarrow B$, der durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig festgelegt ist (bis auf Isomorphie): B ist vollständig und $\operatorname{Spa}(h)(\operatorname{Spa} B) \subseteq U$. Ist $f : A \longrightarrow C$ ein stetiger Ringhomomorphismus affinoider Ringe, so daß C vollständig ist und $\operatorname{Spa}(f)(\operatorname{Spa} C) \subseteq U$, so gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $g : B \longrightarrow C$ mit $f = g \circ h$.
Ist $U = R(\frac{T}{S})$, so ist h der kanonische Ringhomomorphismus $A \longrightarrow A\langle\frac{T}{S}\rangle$.

Zum Beweis von (3.2.4) benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

Zuvor merken wir eine oft benützte Tatsache an:

Sind A ein vollständiger f-adischer Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A, so ist $\mathfrak{m}$ abgeschlossen in A.

Denn jedes Element aus $1 + A^{\circ\circ}$ ist eine Einheit in A und $1 + A^{\circ\circ}$ ist offen in A.

Lemma 3.2.5. Seien A ein vollständiger affinoider Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von $\tilde{A}$. Dann gibt es ein $v \in \operatorname{Spa} A$ mit $\operatorname{supp}(v) = \mathfrak{m}$.

Beweis: Wir betrachten die Quotientenabbildung affinoider Ringe $f : A \longrightarrow A/\mathfrak{m}$. Es ist $\operatorname{Spa}(f)(\operatorname{Spa} A/\mathfrak{m}) = \{v \in \operatorname{Spa} A \mid \operatorname{supp}(v) = \mathfrak{m}\}$. Es ist also zu zeigen, daß $\operatorname{Spa} A/\mathfrak{m} \neq \emptyset$. Ist $\tilde{A}/\mathfrak{m}$ diskret, so ist die triviale Bewertung von $\tilde{A}/\mathfrak{m}$ ein Element von $\operatorname{Spa} A/\mathfrak{m}$. Wir nehmen deshalb an, daß $\tilde{A}/\mathfrak{m}$ nicht diskret ist. Nach obiger Bemerkung ist $\tilde{A}/\mathfrak{m}$ hausdorffsch. Nach (3.1.13) ist $\operatorname{Cont}(\tilde{A}/\mathfrak{m})_a \neq \emptyset$. Wir wählen ein $w \in \operatorname{Cont}(\tilde{A}/\mathfrak{m})_a$. Nach (3.1.14.i) hat w eine Sekundärgeneralisierung v in $\operatorname{Spv} \tilde{A}/\mathfrak{m}$, so daß v Rang 1 hat und $v \in \operatorname{Cont}(\tilde{A}/\mathfrak{m})_a$. Nach (3.1.14.ii) ist $v \in \operatorname{Spa} A/\mathfrak{m}$.

Lemma 3.2.6. Sei A ein affinoider Ring. Dann gilt $A^+ = \{a \in \tilde{A} \mid v(a) \geq 0$ für jedes $v \in \operatorname{Spa} A\}$.

Beweis: Gegeben sei ein $a \in \tilde{A}$ mit $v(a) \geq 0$ für jedes $v \in \operatorname{Spa} A$. Wir nehmen an, daß $a \notin A^+$, und führen dies zu einem Widerspruch.

In der Lokalisation $\tilde{A}_a$ betrachten wir den Unterring $A^+[a^{-1}]$. a^{-1} ist keine Einheit in $A^+[a^{-1}]$. (Denn sonst wäre $a \in A^+[a^{-1}]$, woraus sich ergibt, daß a ganz über A^+ ist und damit $a \in A^+$.) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A^+[a^{-1}]$ mit $a^{-1} \in \mathfrak{p}$. Wir wählen Primideale $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ von $A^+[a^{-1}]$ und $\tilde{A}_a$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} \cap A^+[a^{-1}]$. Sei w eine Bewertung von $\tilde{A}_a$, so daß $\operatorname{supp}(w) = \mathfrak{r}$ und $\tilde{A}_a(w)$ den lokalen Ring $\left(A^+[a^{-1}]/\mathfrak{q}\right)_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ dominiert. Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von $\tilde{A}$ mit
$V(I) = \{x \in \operatorname{Spec} \tilde{A} \mid x \text{ ist offen in } \tilde{A}\}$ und sei r die Retraktion $\operatorname{Spv} \tilde{A} \longrightarrow \operatorname{Spv}(\tilde{A}, I)$. Wir setzen $v = r(w|\tilde{A})$, also $v = w' | c\Gamma_{w'}(I)$, wobei $w' = w|\tilde{A}$.

Angenommen, wir wissen, daß $v \in \operatorname{Spa} A$. Dann haben wir einen Widerspruch, denn es ist $0 < w(a^{-1})$ und somit $0 > w(a) = (w|\tilde{A})(a) = v(a)$.

Wir zeigen also $v \in \operatorname{Spa} A$. Es ist $w(b) \geq 0$ für jedes $b \in A^+$ und deshalb auch $v(b) \geq 0$ für jedes $b \in A^+$. Es bleibt zu zeigen, daß $v \in \operatorname{Cont}(\tilde{A})$. Nach (3.1.3) reicht es zu zeigen, daß $v(u) > 0$ für jedes $u \in \tilde{A}^{\circ\circ} \subseteq A^+$. Sei ein $u \in \tilde{A}^{\circ\circ}$ gegeben. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u^n a \in A^+$. Also können wir in $A^+[a^{-1}]$ schreiben $u^n = ba^{-1}$ mit $b \in A^+$. Da $a^{-1} \in \mathfrak{p}$, ist auch $u \in \mathfrak{p}$. Hieraus folgt $w(u) > 0$ und damit $v(u) > 0$.

Beweis von (3.2.4): Seien $S = (s_1, \ldots, s_n)$ ein n-Tupel von Elementen von $\tilde{A}$ und $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$ mit $T_i \cdot \tilde{A}$ offen für $i = 1, \ldots, n$, so daß $U = R(\frac{T}{S})$. Sei $h : A \longrightarrow A\langle\frac{T}{S}\rangle$ der kanonische Ringhomomorphismus. Nach (2.4.6.ii) ist $h(s_i)$ invertierbar in $A\langle\frac{T}{S}\rangle^{\sim}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\{\frac{h(t)}{h(s_i)} | i \in \{1, \ldots, n\}, t \in T_i\} \subseteq A\langle\frac{T}{S}\rangle^{+}$. Deshalb ist $v(\frac{h(t)}{h(s_i)}) \geq 0$ für jedes $v \in \operatorname{Spa} A\langle\frac{T}{S}\rangle$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in T_i$. Hieraus folgt $\operatorname{Spa}(h)\left(\operatorname{Spa} A\langle\frac{T}{S}\rangle\right) \subseteq U$.

Seien nun C ein vollständiger affinoider Ring und $f : A \longrightarrow C$ ein stetiger Ringhomomorphismus mit $\operatorname{Spa}(f)(\operatorname{Spa} C) \subseteq U$. Dann ist $v(f(t)) \geq v(f(s_i)) \neq \infty$ für jedes $v \in \operatorname{Spa} C$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in T_i$. Nach (3.2.5) ist $f(s_i)$ eine Einheit in $\tilde{C}$ für $i = 1, \ldots, n$. Aus $v(\frac{f(t)}{f(s_i)}) \geq 0$ für jedes $v \in \operatorname{Spa} C$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in T_i$ und (3.2.6) folgt, daß $\{\frac{f(t)}{f(s_i)} | i \in \{1, \ldots, n\}, t \in T_i\}$ in C^{+} enthalten ist. Nach (2.4.6.ii) gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $g : A\langle\frac{T}{S}\rangle \longrightarrow C$ mit $f = g \circ h$.

Lemma 3.2.7. Seien A ein affinoider Ring und U eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$. Sei $h : A \longrightarrow F(U)$ der kanonische Ringhomomorphismus. Die Abbildung $\operatorname{Spa}(h) : \operatorname{Spa} F(U) \longrightarrow \operatorname{Spa} A$ bildet $\operatorname{Spa} F(U)$ homöomorph auf U ab und bildet rationale Teilmengen von $\operatorname{Spa} F(U)$ auf rationale Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ ab.

Beweis: Seien s ein Element von $\tilde{A}$ und T eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}$ mit $T \cdot \tilde{A}$ offen, so daß $U = R(\frac{T}{s})$. Nach (3.1.22) genügt es die zu (3.2.7) entsprechende Behauptung für $g : A \longrightarrow A(\frac{T}{s})$ zu zeigen.

Direkt aus der Konstruktion von $A(\frac{T}{s})$ erkennt man, daß $\operatorname{Spa}(g)$ die Menge $\operatorname{Spa} A(\frac{T}{s})$ bijektiv auf U abbildet.

Sei X eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A(\frac{T}{s})$. Wir zeigen, daß $\operatorname{Spa}(g)(X)$ eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$ ist. Seien f ein Element von $A(\frac{T}{s})^{\sim}$ und E eine endliche Teilmenge von $A(\frac{T}{s})^{\sim}$ mit $X = R(\frac{E}{f})$. Es ist s eine Einheit in $A(\frac{T}{s})^{\sim}$. Indem wir f und die Elemente von E mit einer geeigneten Potenz von s multiplizieren, können wir annehmen, daß $f \in \tilde{A}$ und $E \subseteq \tilde{A}$. Nach (3.1.20) gibt es eine Nullumgebung H von $\tilde{A}$, so daß $v(h) > v(f)$ für jedes $h \in H$ und jedes $v \in X$. Sei D eine endliche Teilmenge von H, so daß $D \cdot \tilde{A}$ offen in $\tilde{A}$ ist. Wir haben dann in $\operatorname{Spa} A$ die rationale Teilmenge $V = R(\frac{D \cup E}{f})$. Es ist $\operatorname{Spa}(g)(X) = U \cap V$.

Lemma 3.2.8. Seien A ein affinoider Ring und U eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$. Sei $h : A \longrightarrow F_A(U)$ der kanonische Ringhomomorphismus. Wir setzen $B = F_A(U)$ und $r = \operatorname{Spa}(h) : \operatorname{Spa} F_A(U) \longrightarrow \operatorname{Spa} A$. Sei V eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$ mit $V \subseteq U$. Nach (3.1.18) ist $r^{-1}(V)$ eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} B$. Nach (3.2.4) gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $f : F_A(V) \longrightarrow F_B\big(r^{-1}(V)\big)$, so daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F_B\left(r^{-1}(V)\right) & \xleftarrow{f} & F_A(V) \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle t} \\ B & \xleftarrow[h]{} & A \end{array} ,$$

wobei s und t die kanonischen Ringhomomorphismen sind. Es ist f ein Isomorphismus (in der Kategorie der affinoiden Ringe mit den stetigen Ringhomomorphismen als Morphismen).

Beweis: Da $\mathrm{Spa}\,(t)\big(\mathrm{Spa}\,F_A(V)\big) \subseteq V \subseteq U$, gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft des Ringhomomorphismus $h : A \longrightarrow F_A(U) = B$ genau einen stetigen Ringhomomorphismus $p : B \longrightarrow F_A(V)$ mit $t = p \circ h$. Es ist $\mathrm{Spa}\,(p)\big(\mathrm{Spa}\,F_A(V)\big) \subseteq r^{-1}(V)$. Die universelle Eigenschaft von s gibt einen stetigen Ringhomomorphismus $q : F_B\big(r^{-1}(V)\big) \longrightarrow F_A(V)$ mit $p = q \circ s$. Es ist q die inverse Abbildung zu f.

Wir fixieren einen affinoiden Ring A. Nach (3.2.4) haben wir zu rationalen Teilmengen U und V von $\mathrm{Spa}\,A$ mit $U \subseteq V$ einen kanonischen stetigen Ringhomomorphismus $F(V) \longrightarrow F(U)$. Indem wir jeder rationalen Teilmenge U von $\mathrm{Spa}\,A$ den vollständigen f-adischen Ring $F(U)^{\sim}$ zuordnen, erhalten wir also auf der Kategorie der rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spa}\,A$ eine Prägarbe vollständiger nat-Ringe. In der Kategorie der vollständigen nat-Ringe existieren projektive Limiten. Daher läßt sich diese Prägarbe fortsetzen zu einer Prägarbe vollständiger nat-Ringe auf der Kategorie der offenen Teilmengen von $\mathrm{Spa}\,A$, indem wir jeder offenen Teilmenge U von $\mathrm{Spa}\,A$ den projektiven Limes $\varprojlim\limits_{V} F(V)^{\sim}$ zuordnen, wobei V die Menge aller rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spa}\,A$ durchläuft, die in U enthalten sind (vgl. [EGA*], 0.3.2). Diese Prägarbe wird mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_A$ bezeichnet. Sie heißt die Prägarbe der adischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}\,A$. Besteht $\mathrm{Spa}\,A$ nur aus analytischen Punkten, so sprechen wir auch von der Prägarbe der analytischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}\,A$. Ist U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,A$, so ist $\mathcal{O}(U) = F(U)^{\sim}$.

Sei $x : \tilde{A} \longrightarrow (\Gamma_x)_\infty$ eine stetige Bewertung von $\tilde{A}$, die in $\mathrm{Spa}\,A$ liegt. Ist U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,A$, die x enthält, so setzt sich x eindeutig fort zu einer stetigen Bewertung $F(U)^{\sim} \longrightarrow (\Gamma_x)_\infty$. Deshalb induziert x eine Bewertung $v_x : \mathcal{O}_x = \varinjlim\limits_{U} F(U)^{\sim} \longrightarrow (\Gamma_x)_\infty$.

Satz 3.2.9. Wir nehmen an, daß die Prägarbe $\mathcal{O}$ der adischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}\,A$ eine Garbe mit Werten in der Kategorie der vollständigen nat-Ringe ist. Dann gilt

i) $(\mathrm{Spa}\, A, \mathcal{O}, (v_x | x \in \mathrm{Spa}\, A))$ ist ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$. Für jede rationale Teilmenge U von $\mathrm{Spa}\, A$ gilt $\mathcal{O}(U) = F(U)^\sim$ und $\mathcal{O}^+(U) = F(U)^+$.

ii) $(\mathrm{Spa}\, A, \mathcal{O}, (v_x | x \in \mathrm{Spa}\, A))$ und der kanonische Ringhomomorphismus $h\colon (\tilde{A}, A^+) = A \longrightarrow F(\mathrm{Spa}\, A) = (\mathcal{O}(\mathrm{Spa}\, A), \mathcal{O}^+(\mathrm{Spa}\, A))$ lösen $(*)_{top}$ für das Paar von Ringen $(\tilde{A}, A^+)$.

Beweis: i) Sei ein $x \in \mathrm{Spa}\, A$ gegeben. Wir zeigen, daß $\mathcal{O}_x$ ein lokaler Ring ist und v_x das maximale Ideal von $\mathcal{O}_x$ als Träger besitzt. Seien U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$ und s ein Element von $\mathcal{O}(U) = F(U)^\sim$, so daß $x \in U$ und $v_x(s_x) \neq \infty$. Zu zeigen ist, daß es eine offene Teilmenge V von $\mathrm{Spa}\, A$ gibt, so daß $x \in V \subseteq U$ und die Einschränkung $s|V$ eine Einheit in $\mathcal{O}(V)$ ist. Sei $y \in \mathrm{Spa}\, F(U)$ die Fortsetzung von x auf $F(U)^\sim$. Es ist $y(s) \neq \infty$. Deshalb gibt es eine endliche Teilmenge T von $F(U)^\sim$, so daß $T \cdot F(U)^\sim$ offen ist in $F(U)^\sim$ und $y(t) \geq y(s)$ für jedes $t \in T$. In $\mathrm{Spa}\, F(U)$ haben wir die rationale Teilmenge $W = R(\frac{T}{s})$, die y enthält. Wir setzen $B = F(U)$. Sei $g : B \longrightarrow F_B(W)$ der kanonische Ringhomomorphismus. Es ist $g(s)$ eine Einheit in $F_B(W)^\sim$. Sei r die durch den kanonischen Ringhomomorphismus $A \longrightarrow F(U)$ induzierte Abbildung $\mathrm{Spa}\, F(U) \longrightarrow \mathrm{Spa}\, A$. Nach (3.2.7) ist $V := r(W)$ eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$ mit $r^{-1}(V) = W$. Es ist $x \in V \subseteq U$. Aus (3.2.8) folgt, daß die Einschränkung $s|\,V$ eine Einheit in $\mathcal{O}(V)$ ist.

Wir zeigen nun, daß $(\mathrm{Spa}\, A, \mathcal{O}, (v_x | x \in X))$ die Eigenschaft (2) erfüllt. Seien U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$ und s ein Element von $\mathcal{O}(U)$. Zu zeigen ist, daß $Y = \{x \in U | v_x(s_x) \geq 0\}$ offen in $\mathrm{Spa}\, A$ ist ((1.5.5)). Sei $h : A \longrightarrow F(U)$ der kanonische Ringhomomorphismus. Die Menge $X = \{v \in \mathrm{Spa}\, F(U) | v(s) \geq 0\}$ ist offen in $\mathrm{Spa}\, F(U)$. Nach (3.2.7) ist $Y = \mathrm{Spa}\,(h)(X)$ offen in $\mathrm{Spa}\, A$.

Sei U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$. Sei s ein Element von $\mathcal{O}(U) = F(U)^\sim$. Daß s in $\mathcal{O}^+(U)$ liegt, bedeutet, daß $v(s) \geq 0$ für jedes $v \in \mathrm{Spa}\, F(U)$. Nach (3.2.6) heißt dies, daß $s \in F(U)^+$. Damit ist gezeigt $\mathcal{O}^+(U) = F(U)^+$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $(\mathrm{Spa}\, A, \mathcal{O}, (v_x | x \in X))$ die Eigenschaft (3) erfüllt. Gegeben seien eine offene Teilmenge U von $\mathrm{Spa}\, A$ und ein Element s von $\mathcal{O}^+(U)$. Sei V eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$ mit $V \subseteq U$. Wir haben $s|V \in \mathcal{O}^+(V) = F(V)^+$ und damit $s|V \in (F(V)^\sim)^\circ$. Da $\mathcal{O}(U) = \varprojlim_V F(V)^\sim$, erhalten wir $s \in \mathcal{O}(U)^\circ$.

ii) Seien $(X, \mathcal{P}, (v_x | x \in X))$ ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$ und $f : (\tilde{A}, A^+) \longrightarrow (\mathcal{P}(X), \mathcal{P}^+(X))$ ein stetiger Ringhomomorphismus. Wir wollen einen Morphismus der Kategorie $(VL)_{top}$ $(\varphi, \psi) : (X, \mathcal{P}, (v_x | x \in X)) \longrightarrow (\mathrm{Spa}\, A, \mathcal{O}, (v_x | x \in \mathrm{Spa}\, A))$ konstruieren mit $f = g \circ h$, wobei g der durch (φ, ψ) induzierte stetige Ringhomomorphismus $(\mathcal{O}(\mathrm{Spa}\, A), \mathcal{O}^+(\mathrm{Spa}\, A)) \longrightarrow (\mathcal{P}(X), \mathcal{P}^+(X))$ ist, und zeigen, daß (φ, ψ)

eindeutig bestimmt ist.

Sei ein $x \in X$ gegeben. Da für $\psi_x : \mathcal{O}_{\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{P}_x$ gelten soll $\operatorname{Spv}(\psi_x)(v_x) = v_{\varphi(x)}$ und da für $\lambda : \tilde{A} \longrightarrow \mathcal{O}(\operatorname{Spa}\tilde{A}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\varphi(x)}$ gilt $\operatorname{Spv}(\lambda)(v_{\varphi(x)}) = \varphi(x)$, müssen wir definieren $\varphi(x) = \operatorname{Spv}(\mu)(v_x)$, wobei μ die Komposition der Abbildungen $\tilde{A} \xrightarrow{f} \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}_x$ ist. Damit erhalten wir eine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow \operatorname{Spa} A$.

Sei U eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$. Wir schreiben $U = R(\frac{T}{s})$, wobei s ein Element von $\tilde{A}$ und T eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}$ mit $T \cdot \tilde{A}$ offen. Es ist $\varphi^{-1}(U) = \{x \in X \,|\, v_x(f(t)) \geq v_x(f(s))$ für jedes $t \in T$ und $v_x(f(s)) \neq \infty\}$. Nach (1.5.5) ist $\varphi^{-1}(U)$ offen und deshalb ist φ stetig. Sei ρ die Komposition $\tilde{A} \xrightarrow{f} \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\varphi^{-1}(U))$. Es ist $\rho(s)$ eine Einheit in $\mathcal{P}(\varphi^{-1}(U))$ und $\frac{\rho(t)}{\rho(s)} \in \mathcal{P}^+(\varphi^{-1}(U))$ für jedes $t \in T$ und somit $\frac{\rho(t)}{\rho(s)} \in \mathcal{P}(\varphi^{-1}(U))^\circ$ für jedes $t \in T$. Nach (2.1.15) gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $\psi_U : \tilde{A}\langle\frac{T}{s}\rangle \longrightarrow \mathcal{P}(\varphi^{-1}(U))$, so daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\varphi^{-1}(U)) & \xleftarrow{\psi_U} & \mathcal{O}(U) = \tilde{A}\langle\frac{T}{s}\rangle \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{P}(X) & \xleftarrow[f]{} & \tilde{A} \end{array}$$

Diese ψ_U definieren einen Morphismus topologischer Garben $\psi : \mathcal{O} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{P}$.

Sei ein $y \in \varphi^{-1}(U)$ gegeben. Seien $\gamma : \mathcal{P}(\varphi^{-1}(U)) \longrightarrow \mathcal{P}_y$ und $\delta : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\varphi(y)}$ die kanonischen Abbildungen. Für die Bewertungen $\operatorname{Spv}(\delta)(v_{\varphi(y)})$ und $\operatorname{Spv}(\gamma \circ \psi_U)(v_y)$ von $\tilde{A}\langle\frac{T}{s}\rangle$ gilt $\operatorname{Spv}(\delta)(v_{\varphi(y)})|\tilde{A} = \varphi(y) = \operatorname{Spv}(\gamma \circ \psi_U)(v_y)|\tilde{A}$. Da die Komposition $\mathcal{P}(\varphi^{-1}(U)) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}_y \xrightarrow{v_y} (\Gamma_{v_y})_\infty$ stetig ist, ist $\operatorname{Spv}(\gamma \circ \psi_U)(v_y)$ eine stetige Bewertung von $\mathcal{O}(U)$. Ebenso ist $\operatorname{Spv}(\delta)(v_{\varphi(y)})$ eine stetige Bewertung von $\mathcal{O}(U)$. Deshalb gilt $\operatorname{Spv}(\gamma \circ \psi_U)(v_y) = \operatorname{Spv}(\delta)(v_{\varphi(y)})$. Hieraus ergibt sich, daß für jedes $x \in X$ gilt $\operatorname{Spv}(\psi_x)(v_x) = v_{\varphi(x)}$, wobei ψ_x der durch ψ induzierte Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{P}_x$ ist.

Bemerkung 3.2.10. Ist $(X, \mathcal{O}_X, (v_x \mid x \in X))$ ein Objekt aus $(VL)_{top}$, so ist für jede offene Teilmenge U von X der Ring $\mathcal{O}_X^+(U)$ ganz abgeschlossen in $\mathcal{O}_X(U)$ und topologisch abgeschlossen in $\mathcal{O}_X(U)$.

Im allgemeinen ist die Prägarbe der adischen Funktionen keine Garbe. Dies kann man zum Beispiel folgendermaßen sehen. Seien A ein f-adischer Ring und a, f Elemente von A, so daß f eine Einheit in A ist und die Folgen $(f^n a \,|\, n \in \mathbb{N})$ und $(f^{-n} a \,|\, n \in \mathbb{N})$ nach 0 konvergieren. Sei A^+ ein beliebiger Ganzheitsring von A. In $X = \operatorname{Spa}(A, A^+)$

betrachten wir die offenen Teilmengen $U = \{v \in X | v(f) \geq 0\}$ und $V = \{v \in X | v(f^{-1}) \geq 0\}$, die X überdecken. Sei $\mathcal{O}$ die Prägarbe der adischen Funktionen auf X. Seien $\bar{a}$ und $\bar{f}$ die durch a und f gegebenen Elemente von $\mathcal{O}(X)$. Es ist $\bar{f}|U \in \mathcal{O}^{+}(U)$. Also ist $\bar{f}|U$ potenzbeschränkt in $\mathcal{O}(U)$. Hieraus folgt, daß $(\bar{a}|U = (\bar{f}|U)^n \cdot (\bar{f}^{-n}\bar{a}|U) | n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in $\mathcal{O}(U)$ ist. Also $\bar{a}|U = 0$. Da $(\bar{f}|V)^{-1} \in \mathcal{O}^{+}(V)$, ist $(\bar{f}|V)^{-1}$ potenzbeschränkt in $\mathcal{O}(V)$. Deshalb ist $(\bar{a}|V = (\bar{f}|V)^{-n} \cdot (\bar{f}^n \bar{a}|V) | n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in $\mathcal{O}(V)$ und somit $\bar{a}|V = 0$. Wir haben also $\bar{a}|U = 0$ und $\bar{a}|V = 0$. Es ist zwar $\bar{a}^2 = 0$ (da $(f^n a \cdot f^{-n} a | n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in A ist), aber im allgemeinen ist $\bar{a} \neq 0$.

Wir geben nun ein konkretes Beispiel an, in dem die eben beschriebene Situation eintritt. Dieses Beispiel stammt von M. Rost. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{Z}[a, f, s]$ in den drei Variablen a, f, s. Sei $A = \mathbb{Z}[a, f, s]_{fs}$ die Lokalisation des Polynomrings nach fs. In A betrachten wir den Unterring B, der von den Elementen s, sf, sf^{-1}, $(s^{-n} f^n a | n \in \mathbb{N})$, $(s^{-n} f^{-n} a | n \in \mathbb{N})$ erzeugt wird. Wir versehen A mit der Gruppentopologie, so daß $\{s^n B | n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Dadurch wird A zu einem Tate-Ring. f ist eine Einheit in A und $(f^n a | n \in \mathbb{N})$ und $(f^{-n} a | n \in \mathbb{N})$ sind Nullfolgen in A. Durch direktes Nachrechnen zeigt man, daß $a \notin sB$. Deshalb ist $\bar{a} \neq 0$.

3.3. ANALYTISCHE RÄUME

Lemma 3.3.1. Sei A ein vollständiger noetherscher Tate-Ring. Dann gilt

i) Der Ring $A\langle X\rangle$ ist treuflach über A.

ii) Für jedes $f \in A$ sind die Ringe $A\langle X\rangle/(1-fX)$ und $A\langle X\rangle/(f-X)$ flach über A.

Beweis: Wir übernehmen den Beweis aus [FP], III.7.8 und 7.9.

i) Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Nach (2.2.15.i) ist M auf kanonische Weise ein topologischer A-Modul. Mit $M\langle X\rangle$ bezeichnen wir den A-Modul $\{\sum_{\nu\in\mathbb{N}_0} m_\nu X^\nu \mid m_\nu \in M$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0$ und für jede Nullumgebung U von M ist $m_\nu \in U$ für fast alle ν aus $\mathbb{N}_0\}$. $M\langle X\rangle$ ist auf kanonische Weise ein $A\langle X\rangle$-Modul. Es gilt

(1) Die Abbildung $M \otimes_A A\langle X\rangle \longrightarrow M\langle X\rangle$, $m \otimes a \longmapsto m \cdot a$ ist bijektiv.

Dies ist klar, wenn M ein endlich erzeugter freier A-Modul ist. Ist M ein beliebiger endlich erzeugter A-Modul, so betrachten wir eine exakte Sequenz $A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Nach (2.2.15.ii) erhalten wir hieraus eine exakte Sequenz $A^m\langle X\rangle \longrightarrow A^n\langle X\rangle \longrightarrow M\langle X\rangle \longrightarrow 0$. Also gilt (1).

Aus (1) folgt, daß jeder injektive Homomorphismus $M \longrightarrow N$ zwischen endlich erzeugten A-Moduln M und N einen injektiven Homomorphismus $M \otimes_A A\langle X\rangle \longrightarrow N \otimes A\langle X\rangle$ gibt. Also ist $A\langle X\rangle$ flach über A.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, so ist die Menge aller Elemente $\Sigma\, a_\nu X^\nu$ von $A\langle X\rangle$, deren konstanter Koeffizient in $\mathfrak{p}$ liegt, ein Primideal von $A\langle X\rangle$, das über $\mathfrak{p}$ liegt. Also ist $A\langle X\rangle$ treuflach über A.

ii) Wir zeigen zunächst, daß $A\langle X\rangle/(1-fX)$ ein flacher A-Modul ist. Dazu betrachten wir die Sequenz

(2) $\quad 0 \longrightarrow A\langle X\rangle \xrightarrow{v} A\langle X\rangle \longrightarrow A\langle X\rangle/(1-fX) \longrightarrow 0,$

wobei v die Multiplikation mit $1-fX$ ist. Nach [B], I.2.5 Prop. 4 ist zu zeigen, daß für jeden endlich erzeugten A-Modul M die mit M tensorierte Sequenz

(3) $\quad 0 \longrightarrow M \otimes_A A\langle X\rangle \xrightarrow{w} M \otimes_A A\langle X\rangle \longrightarrow M \otimes_A A\langle X\rangle/(1-fX) \longrightarrow 0$

exakt ist. Es ist sofort zu sehen, daß die Multiplikation mit $1-fX$ eine injektive Abbildung $M\langle X\rangle \longrightarrow M\langle X\rangle$ ist. Daher folgt aus (1), daß w injektiv ist. Mit $A = M$ erhalten wir, daß (2) exakt ist. Dann ist auch (3) exakt.

Nun zeigen wir, daß $A\langle X\rangle/(f-X)$ ein flacher A-Modul ist. Indem wir die zu (2) und (3) entsprechenden Sequenzen betrachten, ist zu zeigen, daß für jeden endlich erzeugten A-Modul M die Multiplikation mit $f-X$ eine injektive Abbildung $M\langle X\rangle \longrightarrow M\langle X\rangle$ ist. Sei ein $u = \sum_{i=0}^{\infty} m_i X^i \in M\langle X\rangle$ gegeben mit $(f-X)\cdot u = 0$. Dann gilt

(4) $\quad f\,m_0 = 0$ und $f\,m_i = m_{i-1}$ für jedes $i > 0$.

Sei M_1 der von $(m_i | i \in \mathbb{N}_0)$ erzeugte Untermodul von M. Da A noethersch ist, ist M_1 endlich erzeugt, etwa von $m_0, \ldots, m_\ell$. Nach (4) wird dann M_1 von m_ℓ erzeugt und es gilt $f^{\ell+1}m_\ell = 0$. Wir schreiben $m_{2\ell+1} = am_\ell$ mit $a \in A$. Wir erhalten $m_\ell = f^{\ell+1}m_{2\ell+1} = af^{\ell+1}m_\ell = 0$. Also ist $u = 0$.

Definition 3.3.2. Ein Tate-Ring A heißt strikt noethersch, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der Ring $\hat{A}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ noethersch ist. Ein tatescher affinoider Ring A heißt strikt noethersch, wenn $\tilde{A}$ strikt noethersch ist.

Sei A ein vollständiger Tate-Ring. A ist genau dann strikt noethersch, wenn jeder Tate-Ring, der topologisch von endlichem Typ über A ist, noethersch ist. Ist A strikt noethersch, so ist auch jeder Tate-Ring, der topologisch von endlichem Typ über A ist, strikt noethersch.

3.3.3. Beispiele für strikt noethersche Tate-Ringe.

i) Tate-Ringe, die topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen Rang 1 bewerteten Körper sind ([BGR], 5.2.6 Theorem 1)
ii) Tate-Ringe, die einen noetherschen Definitionsring besitzen ((2.3.9.i) und (2.3.31.iii))

Der Durchschnitt dieser beiden Klassen von Ringen besteht aus den Tate-Ringen, die topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen diskret (Rang 1) bewerteten Körper sind. Denn: Seien k ein vollständiger Rang 1 bewerteter Körper und A ein vollständiger Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Sei $f : k \longrightarrow A$ ein stetiger Ringhomomorphismus. Wir wählen ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A. f induziert Abbildungen $k^\circ \longrightarrow (A/\mathfrak{m})^\circ$ und $k^{\circ\circ} \longrightarrow (A/\mathfrak{m})^{\circ\circ}$. Aus (2.2.10) folgt, daß die Bewertung von k diskret ist.

Lemma 3.3.4. Sei A ein vollständiger strikt noetherscher Tate-Ring. Dann gilt

i) Seien $s_1, \ldots, s_n$ Elemente von A und $T_1, \ldots, T_n$ endliche Teilmengen von A mit $A = T_i \cdot A$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei B der Ring $A\langle X_{ti} \mid i \in \{1, \ldots, n\}, t \in T_i \backslash \{s_i\}\rangle$ und sei I das von $\{t - s_i X_{ti} \mid i \in \{1, \ldots, n\}, t \in T_i\backslash\{s_i\}\}$ erzeugte Ideal von B. Dann sind die Ringe $A\langle \frac{T_1}{s_1}, \ldots, \frac{T_n}{s_n}\rangle$ und B/I isomorph.
ii) Sei $A\langle X, X^{-1}\rangle$ der Ring $\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n | \, a_n \in A$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und für jede Nullumgebung U von A ist $a_n \in U$ für fast jedes $n \in \mathbb{Z}\}$. Wir versehen $A\langle X, X^{-1}\rangle$ mit der Ringtopologie, so daß die Mengen $\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n \in A\langle X, X^{-1}\rangle | \, a_n \in U$ für jedes

$n \in \mathbb{Z}\}$ (U Nullumgebung von A) ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen bilden. Dann sind $A\langle X, X^{-1}\rangle$ und $A\langle X, Y\rangle/(1 - XY)$ isomorph.

Beweis: i) Nach (2.2.14) ist I abgeschlossen in B. Wegen $A = T_i \cdot A$ ist s_i eine Einheit in B/I. Deshalb erfüllen $A\langle\frac{T_1}{s_1}, \ldots, \frac{T_n}{s_n}\rangle$ und B/I dieselbe universelle Eigenschaft (siehe (2.1.14) und (2.1.15)).
ii) Nach (2.2.14) ist das Ideal $(1 - XY)$ abgeschlossen in $A\langle X, Y\rangle$. Deshalb ist sowohl $A \longrightarrow (A\langle X, X^{-1}\rangle; X)$ als auch $A \longrightarrow (A\langle X, Y\rangle/(1 - XY); X)$ ein universeller stetiger Ringhomomorphismus von A in einen vollständigen nat-Ring, in dem eine Einheit u ausgezeichnet ist, so daß u und u^{-1} potenzbeschränkt sind.

Satz 3.3.5. Sei A ein strikt noetherscher tatescher affinoider Ring. Dann ist die Prägarbe $\mathcal{O}$ der analytischen Funktionen auf $\operatorname{Spa} A$ eine Garbe vollständiger nat-Ringe. Für jede rationale Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$ und jedes $i > 0$ ist $H^i(U, \mathcal{O}) = 0$.

Man kann (3.3.5) analog zu Tate's Azyklizitätstheorem beweisen. Wir geben deshalb nur die wichtigsten Schritte an und verweisen ansonsten auf [BGR].

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß A vollständig ist.

(1) Sei f ein Element von $\tilde{A}$. Seien U und V die rationalen Teilmengen $R(\frac{1,f}{1})$ und $R(\frac{1,f}{f})$ von $S := \operatorname{Spa} A$. Dann ist der augmentierte Čech-Komplex zu $\mathcal{O}$ und der Überdeckung $\{U, V\}$ von S

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(S) \longrightarrow \mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U \cap V) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Aus (3.3.4) erhalten wir $\mathcal{O}(U) = \tilde{A}\langle\frac{1,f}{1}\rangle = \tilde{A}\langle X\rangle/(f - X)$, $\mathcal{O}(V) = \tilde{A}\langle\frac{1,f}{f}\rangle = \tilde{A}\langle X\rangle/(1 - fX)$, $\mathcal{O}(U \cap V) = \tilde{A}\langle\frac{1,f}{1}, \frac{1,f}{f}\rangle = \tilde{A}\langle X, Y\rangle/(f - X, 1 - fY) = \tilde{A}\langle X, Y\rangle/(f - X, 1 - XY) = \tilde{A}\langle X, X^{-1}\rangle/(f - X)$. Es folgt aus (3.3.1.ii), daß $\varepsilon : \mathcal{O}(S) \longrightarrow \mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(V)$ flach ist. Nach (3.2.5) ist ε treuflach. Deshalb ist ε injektiv. Die Exaktheit des obigen Komplexes an den Stellen $\mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(V)$ und $\mathcal{O}(U \cap V)$ kann man ganz einfach nachrechnen (siehe [BGR], 8.2.3).

Seien $f_1, \ldots, f_n$ Elemente von $\tilde{A}$. Die Familie rationaler Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ $(U_1 \cap \ldots \cap U_n \mid U_i = R(\frac{1,f_i}{1})$ oder $U_i = R(\frac{1,f_i}{f_i})$ für $i = 1, \ldots, n)$ ist eine Überdeckung von $\operatorname{Spa} A$. Sie heißt die von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugte Laurentüberdeckung von $\operatorname{Spa} A$.

Seien $f_1, \ldots, f_n$ Elemente von $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} = (f_1, \ldots, f_n)$. Die Überdeckung $(R(\frac{f_1,\ldots,f_n}{f_i}) \mid i = 1, \ldots, n)$ von $\operatorname{Spa} A$ heißt die von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugte rationale Überdeckung von $\operatorname{Spa} A$.

(2) Sei $(U_i | i \in I)$ eine rationale Überdeckung von $\operatorname{Spa} A$. Dann gibt es eine Laurentüberdeckung $(V_j | j \in J)$ von $\operatorname{Spa} A$, so daß für jedes $j \in J$ gilt: Ist $f : \operatorname{Spa} F_A(V_j) \longrightarrow \operatorname{Spa} A$ die kanonische Abbildung, so ist $\left(f^{-1}(U_i) | i \in I\right)$ eine rationale Überdeckung von $\operatorname{Spa} F_A(V_j)$, die von Einheiten von $F_A(V_j)^\sim$ erzeugt wird.

Beweis: Seien $f_1, \dots, f_n$ Elemente von $\tilde{A}$, die die Überdeckung $(U_i | i \in I)$ erzeugen. Zu jedem $v \in \operatorname{Spa} A$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $v(f_i) \neq \infty$. Nach (3.1.20) gibt es eine Einheit s von $\tilde{A}$, so daß es zu jedem $v \in \operatorname{Spa} A$ ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $v(s) > v(f_i)$. Die von $s^{-1} f_1, \dots, s^{-1} f_n$ erzeugte Laurentüberdeckung von $\operatorname{Spa} A$ erfüllt die Behauptung, vgl. [BGR], 8.2.2 Lemma 3.

(3) Jede rationale Überdeckung von $\operatorname{Spa} A$, die von Einheiten in $\tilde{A}$ erzeugt wird, wird von einer Laurentüberdeckung von $\operatorname{Spa} A$ verfeinert.

Beweis: Die von Einheiten $f_1, \dots, f_n$ erzeugte rationale Überdeckung wird von der von $(f_i f_j^{-1} | i, j \in \{1, \dots, n\})$ erzeugten Laurentüberdeckung verfeinert.

(4) Sei U eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$. Sei $\mathcal{P}$ die Prägarbe der adischen Funktionen auf $\operatorname{Spa} F_A(U)$. Dann sind $\left(\operatorname{Spa} F_A(U), \mathcal{P}\right)$ und $(U, \mathcal{O}|U)$ kanonisch isomorph.

Die Aussage (4) folgt aus (3.2.7) und (3.2.8). Den folgenden Punkt (5) werden wir in (3.6.3 iv) beweisen.

(5) Jede offene Überdeckung von $\operatorname{Spa} A$ wird von einer rationalen Überdeckung von $\operatorname{Spa} A$ verfeinert.

Mit der Argumentation von [BGR], 8.2.2 Prop. 5 folgt aus den Punkten (1) – (4), daß für jede rationale Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$ und jede rationale Überdeckung $\mathfrak{U}$ von U $(= \operatorname{Spa} F_A(U))$ der augmentierte Čech-Komplex von $\mathcal{O}|U$ zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$ exakt ist. Damit folgt aus (5) und [EGA*], 0.3.2.2.

(a) $\mathcal{O}$ ist eine Garbe von Ringen.

(b) $\check{H}^i(U, \mathcal{O}) = 0$ für jede rationale Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$ und jedes $i > 0$.

Aus (a) und (b) und [Gr], 3.8 Cor.4 folgt, daß $H^i(U, \mathcal{O}) = 0$ für jede rationale Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$ und jedes $i > 0$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathcal{O}$ eine Garbe topologischer Ringe ist. Nach [EGA*], 0.3.2.2 reicht es, dazu folgendes zu zeigen: Ist $(U_i | i \in I)$ eine Überdeckung einer rationalen Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$ durch rationale Teilmengen, so ist die kanonische Abbildung $f : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{O}(U_i)$ eine topologische Einbettung.

Da U quasikompakt ist, können wir annehmen, daß I endlich ist. Wegen $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ mit $g : \prod_i \mathcal{O}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, ist $\mathrm{im}(f)$ abgeschlossen in $\prod_i \mathcal{O}(U_i)$. Damit folgt die Behauptung aus (2.2.13).

Sei A ein strikt noetherscher tatescher affinoider Ring. Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der analytischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}\, A$. Nach (3.2.9.i) ist $\big(\mathrm{Spa}\, A, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in \mathrm{Spa}\, A)\big)$ ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$. Es heißt der analytische Raum zu dem affinoiden Ring A.

Definition 3.3.6. i) Ein affinoider analytischer Raum ist ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$, das isomorph ist zu dem analytischen Raum eines strikt noetherschen tateschen affinoiden Rings.
ii) Ein (rigid) analytischer Raum ist ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$ $\big(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X)\big)$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt von X eine offene Umgebung U besitzt, so daß $\big(U, \mathcal{O}|U, (v_x | x \in U)\big)$ ein affinoider analytischer Raum ist.
iii) Für zwei analytische Räume X und Y sind die Morphismen (analytischer Räume) von X nach Y die Morphismen $X \longrightarrow Y$ der Kategorie $(VL)_{top}$.

Nach (3.2.9) ist die Kategorie der affinoiden analytischen Räume dual zu der Kategorie der strikt noetherschen vollständigen tateschen affinoiden Ringe (mit den stetigen Ringhomomorphismen als Morphismen).

Sind $\big(\mathrm{Spa}\, A, \mathcal{O}, (v_x | x \in \mathrm{Spa}\, A)\big)$ ein affinoider analytischer Raum und U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$, so ist $\big(U, \mathcal{O}|U, (v_x \mid x \in U)\big)$ ein affinoider analytischer Raum, nämlich der analytische Raum zu dem affinoiden Ring $F_A(U) = \big(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U)\big)$ (nach (3.2.7) und (3.2.8)). Also ist jeder offene Teilraum eines analytischen Raums ein analytischer Raum.

Seien A ein strikt noetherscher tatescher affinoider Ring und $\big(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X)\big)$ der analytische Raum dazu. Nach (1.1.3.ii) sind die rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spa}\, A$ die Mengen der Form $\{v \in \mathrm{Spa}\, A \mid v(f_1) \geq v(f_0), \ldots, v(f_n) \geq v(f_0)\}$, wobei $f_1, \ldots, f_n$ Elemente von $\tilde{A}$ sind mit $\tilde{A} = (f_0, \ldots, f_n)$. Nach (3.1.22) und (3.2.5) lassen sich die rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spa}\, A = X$ auch folgendermaßen beschreiben: Eine Teilmenge U von X ist genau dann rational, wenn es $f_0, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ gibt, so daß $f_0, \ldots, f_n$ keine gemeinsame Nullstelle auf X haben (d.h. es gibt kein $x \in X$ mit $f_0(x) = \ldots = f_n(x) = 0$) und $U = \{x \in X \mid v_x(f_1) \geq v_x(f_0), \ldots, v_x(f_n) \geq v_x(f_0)\}$.
Sind U eine rationale Teilmenge von X und V eine rationale Teilmenge des affinoiden analytischen Raums $\big(U, \mathcal{O}|U, (v_x | x \in U)\big)$, so ist V eine rationale Teilmenge von X (nach (3.2.7)).

Eine offene Teilmenge U eines analytischen Raums X heißt affinoid, wenn der durch U gegebene offene Teilraum von X ein affinoider analytischer Raum ist.

Wir werden am Ende dieses Paragraphen einen analytischen Raum X angeben, für den $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)^\circ$ keine Prägarbe ist (vgl. (3.2.2)). Es gilt jedoch das folgende einfache Kriterium.

Proposition 3.3.7. Sei X ein analytischer Raum. Besitzt $\mathcal{O}_X(X)$ eine topologisch nilpotente Einheit, so ist $U \longmapsto \mathcal{O}_X(U)^\circ$ eine Garbe auf X. Insbesondere ist $U \longmapsto \mathcal{O}_X(U)^\circ$ eine Garbe auf X, wenn es einen Morphismus $X \longrightarrow Y$ von X in einen affinoiden analytischen Raum Y gibt.

Beweis: Seien U und V offene Teilmengen von X mit $U \subseteq V$. Nach (3.2.2.ii) ist zu zeigen, daß die Restriktionsabbildung $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ die Menge $\mathcal{O}_X(V)^\circ$ in die Menge $\mathcal{O}_X(U)^\circ$ abbildet.

Sei B eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{O}_X(V)$. Wir zeigen, daß $B|U$ beschränkt in $\mathcal{O}_X(U)$ ist. Seien s eine topologisch nilpotente Einheit in $\mathcal{O}_X(X)$ und $(U_i | i \in I)$ eine Überdeckung von U durch offene affinoide Teilmengen. Nach (2.2.7.iii) gibt es zu jedem $i \in I$ einen Unterring $\mathcal{O}_X(U_i)_0$ von $\mathcal{O}_X(U_i)$, so daß $\left(\mathcal{O}_X(U_i)_0, s|U_i\right)$ ein Definitionstupel von $\mathcal{O}_X(U_i)$ ist. Da die Restriktionsabbildungen $r_i : \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i)$ stetig sind, gibt es zu jedem $i \in I$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(s|V)^n \cdot B \subseteq r_i^{-1}\left(\mathcal{O}_X(U_i)_0\right)$. Deshalb ist $r_i(B) \subseteq (s|U_i)^{-n}\mathcal{O}_X(U_i)_0$ beschränkt in $\mathcal{O}_X(U_i)$. Da $\mathcal{O}_X(U)$ ein topologischer Unterring von $\prod_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i)$ ist, ist $B|U$ beschränkt in $\mathcal{O}_X(U)$.

Proposition 3.3.8. Sei X ein affinoider analytischer Raum. Sei $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von X. Es gilt

i) Für jede rationale Teilmenge U von X ist die Restriktionsabbildung $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ flach.

ii) Für jedes $x \in X$ ist der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}_x$ flach.

Beweis: i) Wir übernehmen den Beweis auf [FP], III. 7.10. Seien $f_0, \ldots, f_n$ Elemente von $\mathcal{O}(X)$ mit $U = \{x \in X | v_x(f_i) \geq v_x(f_0) \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } v_x(f_0) \neq \infty\}$. Nach (3.1.20) gibt es eine Einheit s in $\mathcal{O}(X)$, so daß $v_x(s) \geq v_x(f_0)$ für jedes $x \in U$. Also ist $U \subseteq Y := \{x \in X | 0 \geq v_x(\frac{f_0}{s})\}$. Es ist $f_0|Y$ eine Einheit in $\mathcal{O}(Y)$. Wir definieren nun induktiv rationale Teilmengen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y =: Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \ldots \supseteq Y_n = U$ durch $Y_k = \{x \in Y_{k-1} | v_x(\frac{f_k}{f_0}) \geq 0\}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Nach (3.3.1.ii) und (3.3.4.i) ist $\mathcal{O}(Y_{k-1}) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_k)$ flach für $k = 0, \ldots, n$ (wir setzen $Y_{-1} = X$). Also ist

$\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ flach.
ii) folgt unmittelbar aus i).

Sei X ein topologischer T_0-Raum. Für Elemente x und y von X setzt man $x \leq y$, wenn x eine Generalisierung von y ist. Dadurch erhält man eine partielle Ordnung auf X. Die Menge der minimalen Punkte von X wird mit $X_{\min}$ bezeichnet, die Menge der maximalen Punkte von X wird mit $X_{\max}$ bezeichnet.

Proposition 3.3.9. Sei $\big(X, \mathcal{O}, (v_x | x \in X)\big)$ ein analytischer Raum.

i) Sei x ein Punkt von X. Die Menge der Generalisierungen von x in X ist eine Kette, d.h. sind y und z Generalisierungen von x, so ist y eine Generalisierung von z oder z eine Generalisierung von y. Insbesondere hat x genau eine Generalisierung, die ein minimaler Punkt ist.
ii) Ein $x \in X$ ist genau dann minimal, wenn v_x den Rang 1 hat.
iii) Seien y eine Spezialisierung eines Punktes x und $g : \mathcal{O}_y \longrightarrow \mathcal{O}_x$ die kanonische Abbildung. Dann ist v_y eine Sekundärspezialisierung von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ in $\operatorname{Spv} \mathcal{O}_y$. Weiterhin ist g lokal und treuflach. Insbesondere ist g injektiv.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß X der analytische Raum zu einem affinoiden Ring A ist. Zunächst zeigen wir

(1) Sind x ein Punkt von $X = \operatorname{Spa} A \subseteq \operatorname{Spv} \tilde{A}$ und y eine Spezialisierung von x in $\operatorname{Spv} \tilde{A}$, so ist y eine Sekundärspezialisierung von x in $\operatorname{Spv} \tilde{A}$.

Begründung von (1): Sei s eine topologisch nilpotente Einheit in $\tilde{A}$. Nach (1.1.17) gibt es ein $z \in \operatorname{Spv} \tilde{A}$, so daß y eine Primärspezialisierung von z und x eine Sekundärgeneralisierung von z ist. Da $x(s)$ kofinal in $(\Gamma_x)_\infty$ ist, ist $z(s)$ kofinal in $(\Gamma_z)_\infty$. Da s eine Einheit ist, erhalten wir $\Gamma_z = c\Gamma_z$. Hieraus folgt $z = y$. Damit ist (1) gezeigt.
i) folgt unmittelbar aus (1).
ii) Sei x ein minimaler Punkt von X. Angenommen, v_x hat nicht Rang 1. Da x eine stetige Bewertung von $\tilde{A}$ ist, ist $\Gamma_x = \Gamma_{v_x}$ nicht die triviale Gruppe. Also gibt es eine konvexe Untergruppe H von Γ_x mit $H \neq (0)$ und $H \neq \Gamma_x$. Sei w die Bewertung x/H von $\tilde{A}$. Es ist w stetig und $w(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^+$. Also ist w ein Element von $\operatorname{Spa} A$. Es ist w eine echte Generalisierung von x, Widerspruch zur Minimalität von x.

Sei nun x ein Punkt von X, so daß $\Gamma_x = \Gamma_{v_x}$ Rang 1 hat. Angenommen, x ist nicht minimal in X. Sei w eine echte Generalisierung von x in X. Nach (1) ist w eine Sekundärgeneralisierung von x. Also $w = x/H$, wobei H eine von (0) verschiedene

konvexe Untergruppe von Γ_x ist. Dann ist w eine triviale Bewertung von $\tilde{A}$ und somit nicht stetig, Widerspruch.
iii) Aus (1) folgt, daß v_y eine Sekundärspezialisierung von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ ist. Hieraus ergibt sich, daß g ein lokaler Ringhomomorphismus ist. Sei U eine offene affinoide Umgebung von y. Nach (3.3.8.ii) ist $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_x$ flach. Deshalb ist $g : \mathcal{O}_y = \varinjlim \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_x$ flach.

Wir werden in (3.4.4) an einem Beispiel zeigen, daß in der Situation von (3.3.9 iii) die injektive Abbildung $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ im allgemeinen nicht surjektiv ist (vgl. jedoch (3.3.13 iii)).

Korollar 3.3.10. Für jede Teilmenge L von $\mathcal{O}(X)$ ist die abgeschlossene Teilmenge $\{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in L\}$ abgeschlossen gegenüber Generalisierungen in X.

Korollar 3.3.11. Seien $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus analytischer Räume und x ein Punkt von X. Dann bildet f die Menge der Generalisierungen von x in X surjektiv ab auf die Menge der Generalisierungen von $f(x)$ in Y.

Beweis: Wir können annehmen, daß Y und X die analytischen Räume zu vollständigen affinoiden Ringen (A, A^+) und (B, B^+) sind. f gibt einen stetigen Ringhomomorphismus $f^* : A \longrightarrow B$. Sei s eine topologisch nilpotente Einheit in A. Eine Generalisierung v von $y := f(x)$ in Y ist eine Bewertung von A der Form y/H, wobei H eine konvexe Untergruppe von Γ_y ist mit $y(s) \notin H$. Wir betrachten Γ_y als Untergruppe von Γ_x. Sei K die konvexe Hülle von H in Γ_x. Dann ist $u := \Gamma_x/K$ ein Element von $\operatorname{Spa}(B, B^+)$ mit $f(u) = v$.

Ist X ein affinoider analytischer Raum, so ist X ein spektraler Raum mit der Eigenschaft, daß die Menge der Generalisierungen eines jeden Punktes eine Kette ist. Hieraus folgt, daß der Abschluß $\bar{U}$ einer offenen konstruierbaren Teilmenge U von X eine prokonstruierbare Teilmenge ist, die abgeschlossen gegenüber Generalisierungen ist. Deshalb ist $\bar{U}$ Durchschnitt von offenen konstruierbaren Teilmengen von X. Wir wollen dies explizit nachrechnen.

Beispiel 3.3.12. Sei X ein affinoider analytischer Raum mit globalem Schnittring $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Seien s ein Element von A und T eine endliche Teilmenge von A mit $A = T \cdot A$. Sei r eine topologisch nilpotente Einheit von A. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $T_n = \{r \cdot t^n | t \in T\}$. Dann gilt $A = T_n \cdot A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also haben wir die rationalen Teilmengen $U = R(\frac{T}{s})$ und $U_n = R(\frac{T_n}{s^n})$ von X. Es gilt

$$\bar{U} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n .$$

Beweis: Wir betrachten die Punkte von X als stetige Bewertungen von A. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine größte konvexe Untergruppe H_x von Γ_x mit $H_x \neq \Gamma_x$. Es ist $x(r) > H_x$ und Γ_x / H_x hat Rang 1. Die Bewertung x/H_x ist die minimale Generalisierung von x in X. Der Abschluß $\bar{U}$ von U in X ist die Menge aller Spezialisierungen aller Punkte von X, oder, anders ausgedrückt, ist die Menge aller Punkte von X, die eine Generalisierung in U haben. Da U offen ist, erhalten wir $\bar{U} = \{x \in X | x/H_x \in U\}$. Somit

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \big\{x \in X \,|\, (x/H_x)(s) \neq \infty \text{ und } (x/H_x)(t) \geq (x/H_x)(s) \\
&\qquad \text{für jedes } t \in T\big\} \\
&= \big\{x \in X \,|\, x(s) \neq \infty \text{ und für jedes } t \in T \text{ gilt } x(t) - x(s) \geq 0 \\
&\qquad \text{oder } x(t) - x(s) \in H_x\big\} \\
&= \big\{x \in X \,|\, x(s) \neq \infty \text{ und für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und jedes } t \in T \\
&\qquad \text{gilt } x(r) + n\big(x(t) - x(s)\big) \geq 0\big\} \\
&= \big\{x \in X \,|\, \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } x(s^n) \neq 0 \text{ und} \\
&\qquad x(rt^n) \geq x(s^n) \text{ für jedes } t \in T\big\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n .
\end{aligned}$$

Sei A ein strikt noetherscher tatescher affinoider Ring. Seien A_1 und A_2 Ganzheitsringe von A mit $A_1 \subset A_2$. Seien Y und X die analytischen Räume zu den affinoiden Ringen (A, A_1) und (A, A_2). Sei $(\varphi, \psi) : X \longrightarrow Y$ der durch den kanonischen Ringhomomorphismus $(A, A_1) \longrightarrow (A, A_2)$ induzierte Morphismus analytischer Räume.

Proposition 3.3.13. Es gilt

i) $\varphi(X)$ ist eine prokonstruierbare Teilmenge von Y, die abgeschlossen ist gegenüber Generalisierungen. φ induziert einen Homöomorphismus von X auf $\varphi(X)$.

ii) $\psi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$ ist ein Isomorphismus (topologischer Garben). Für jedes $x \in X$ ist $\psi_x : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ ein Isomorphismus. Aber $\mathcal{O}_Y^+ \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X^+$ ist kein Isomorphismus, wenn $A_1 \neq A_2$.

iii) Sei y ein Element von Y. Die Menge L aller Generalisierungen von y, die in $\varphi(X)$ liegen, ist nicht leer. L besitzt ein größtes Element x. Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,x}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: i) ist trivial.

ii) Aus (3.2.3) folgt, daß ψ ein Isomorphismus ist. Damit folgt aus (i), daß jedes ψ_x ein Isomorphismus ist. Nach (3.2.9.i) ist $\mathcal{O}_Y^+(Y) = \hat{A}_1$ und $\mathcal{O}_X^+(X) = \hat{A}_2$. Ist $A_1 \neq A_2$, so ist auch $\hat{A}_1 \neq \hat{A}_2$. Also ist $\mathcal{O}_Y^+ \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X^+$ kein Isomorphismus.

iii) Sei ein $y \in Y$ gegeben. Sei z die minimale Generalisierung von y in Y. Nach (3.1.14 ii) und (3.3.9 ii) ist $v_z(a) \geq 0$ für jedes $a \in A_2$. Also ist $z \in \varphi(X)$ und somit L nicht leer. L ist als Durchschnitt zweier prokonstruierbarer Teilmengen von Y ein spektraler Raum. Deshalb hat L ein maximales Element x. Nach (3.3.9i) ist x das größte Element von L. Wir zeigen, daß $\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,x}$ ein Isomorphismus ist. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die Familien $\big(\varphi^{-1}(U) | U$ offene konstruierbare Umgebung von y in $Y\big)$ und $\big(\varphi^{-1}(U) | U$ offene konstruierbare Umgebung von x in $Y\big)$. Nach (ii) gilt $\mathcal{O}_{Y,y} = \varinjlim_{V\in\mathcal{F}} \mathcal{O}_X(V)$ und $\mathcal{O}_{Y,x} = \varinjlim_{V\in\mathcal{G}} \mathcal{O}_X(V)$. Es ist $\mathcal{F}$ eine Unterfamilie von $\mathcal{G}$. Somit ist zu zeigen, daß $\mathcal{F}$ kofinal in $\mathcal{G}$ liegt.

Sei ein $W \in \mathcal{G}$ gegeben. Seien D die Menge aller Generalisierungen von y in Y, E die Menge aller Generalisierungen von x in $\varphi(X)$ und $\mathcal{H}$ die Familie aller offenen konstruierbaren Umgebungen von y in Y. Es ist $D \cap \varphi(X) = E$. Deshalb gilt

$$\bigcap_{V\in\mathcal{F}} V = \varphi^{-1}\Big(\bigcap_{U\in\mathcal{H}} U\Big) = \varphi^{-1}(D) = \varphi^{-1}\big(D \cap \varphi(X)\big) = \varphi^{-1}(E) \subseteq W\,.$$

Hieraus folgt, daß es ein $V \in \mathcal{F}$ gibt mit $V \subseteq W$.

Bemerkung 3.3.14. Die Struktur eines analytischen Raums X ist gegeben durch das Paar $\big(\mathcal{O}_X, (v_x | x \in X)\big)$ oder durch das Paar von Garben $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ (vgl. 1.5.).

Wir betrachten die Situation von (3.3.13). Nach (ii) erhält man die Struktur von $\operatorname{Spa}(A, A_2)$ durch Einschränkung der Struktur von $\operatorname{Spa}(A, A_1)$ auf den topologischen Teilraum $\operatorname{Spa}(A, A_2)$. Aber umgekehrt läßt sich aus der Struktur von $\operatorname{Spa}(A, A_2)$ im allgemeinen nicht die Struktur von $\operatorname{Spa}(A, A_1)$ gewinnen.

3.3.15. Zur Situation von (3.3.13) betrachten wir noch zwei Beispiele.

i) Sei A_2 der ganze Abschluß von $A_1[f_1, \ldots, f_n]$ in A, wobei $f_1, \ldots, f_n \in A^\circ$. Dann ist $(\varphi, \psi) : X \longrightarrow Y$ eine offene Einbettung von X auf den rationalen Teilraum $R(\frac{1, f_1, \ldots, f_n}{1})$ von Y.

ii) Sei A^+ ein Ganzheitsring von A. Seien $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von $\operatorname{Spa}(A, A^+)$ und U eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^+)$. Wir haben dann den adischen Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(A, A^+) \longrightarrow \big(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U)\big)$. Sei E der kleinste Ganzheitsring von $\mathcal{O}(U)$, so daß $(A, A^+) \longrightarrow \big(\mathcal{O}(U), E\big)$ ein Ringhomomorphismus affinoider Ringe ist (vgl. Seite 76). Dann haben wir das kommutative Diagramm analytischer Morphismen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spa}\,(\mathcal{O}(U),\mathcal{O}^+(U)) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Spa}\,(\mathcal{O}(U),E) \arrow[dl, "h"] \\ & \mathrm{Spa}\,(A,A^+) & \end{tikzcd}$$

Wir wissen, daß f eine Einbettung auf den offenen Teilraum U ist. g ist ein Morphismus, wie wir ihn in (3.3.13) betrachtet haben (g ist sogar von der Art wie in (i)). Es gilt: Die h zugrundeliegende stetige Abbildung ist ein Homöomorphismus von $\mathrm{Spa}\,(\mathcal{O}(U),E)$ auf den Abschluß $\bar{U}$ von U in $\mathrm{Spa}\,(A,A^+)$.

Beweis: i) ist klar.

ii) Seien s ein Element von A und T eine endliche Teilmenge von A, so daß $A = T\cdot A$ und $U = R(\frac{T}{s})$. Sei (A_0,r) ein Definitionstupel von A mit $A_0 \subseteq A^+$. Der affinoide Ring $(\mathcal{O}(U),E)$ ist die Vervollständigung des affinoiden Rings $\left(A(\frac{T}{s}),B^c\right)$, wobei B der kleinste Unterring von $A(\frac{T}{s})$ ist, der A^+ und $r\cdot\left(A_0\left[\frac{t}{s}\mid t\in T\right]\right)$ enthält. Deshalb gilt $\mathrm{im}\,(h) = \left\{v\in \mathrm{Spa}\,(A,A^+) \mid v(s)\neq\infty \text{ und } v\left(r\cdot\left(\frac{t}{s}\right)^n\right)\geq 0 \text{ für jedes } n\in\mathbb{N}\right\}$. Aus (3.3.12) folgt $\mathrm{im}\,(h) = \bar{U}$. Natürlich ist h injektiv. Wie im Beweis von (3.2.7) zeigt man, daß $h : \mathrm{Spa}\,(\mathcal{O}(U),E) \longrightarrow \mathrm{im}\,(h)$ offen ist.

Zu einem vollständigen Tate-Ring A betrachten wir die folgende Eigenschaft.

(T) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A wird die Quotiententopologie von $A/\mathfrak{m}$ durch eine Bewertung des Körpers $A/\mathfrak{m}$ gegeben.

Die in (3.3.3) angegebenen Ringe besitzen die Eigenschaft (T): Ist A topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen Rang 1 bewerteten Körper k und ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A, so ist $A/\mathfrak{m}$ endlich über k ([BGR], 6.1.2 Cor.3). Da es auf einem endlich dimensionalen Vektorraum über k nur eine hausdorffsche Vektorraumtopologie gibt ([B$_1$], I.2.3), wird die Quotiententopologie von $A/\mathfrak{m}$ durch die Fortsetzung der Bewertung von k auf $A/\mathfrak{m}$ gegeben. Ein vollständiger Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, hat die Eigenschaft (T) nach (2.2.10).

Ich weiß nicht, ob jeder vollständige strikt noethersche Tate-Ring die Eigenschaft (T) besitzt. Trivialerweise sind äquivalent

a) Jeder vollständige strikt noethersche Tate-Ring hat die Eigenschaft (T).

b) Jeder vollständige strikt noethersche Tate-Ring, der ein Körper ist, hat die Eigenschaft (T).

Proposition 3.3.16. Seien A ein vollständiger strikt noetherscher Tate-Ring, der die Eigenschaft (T) besitzt, A^+ ein Ganzheitsring von A und $(X, \mathcal{O}, (v_x | x \in X))$ der analytische Raum zu (A, A^+). Dann gilt für jedes $x \in X$, dessen Träger $\operatorname{supp}(x) =: \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A ist.

i) Der Halm $\mathcal{O}_x$ ist noethersch.

ii) $\mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}_x$ ist das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x$ von $\mathcal{O}_x$ und die Abbildung $A/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ ist bijektiv.

iii) Die kanonische Abbildung $\hat{A}^{\mathfrak{m}} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_x^{\mathfrak{m}_x}$ ist bijektiv, wobei $\hat{A}^{\mathfrak{m}}$ bzw. $\hat{\mathcal{O}}_x^{\mathfrak{m}_x}$ die Vervollständigung von A bzw. $\mathcal{O}_x$ in der $\mathfrak{m}$-adischen bzw. $\mathfrak{m}_x$-adischen Topologie ist.

Beweis: Für jede rationale Teilmenge U von X mit $x \in U$ setzen wir $\mathfrak{m}_U = \{f \in \mathcal{O}(U) | \, v_x(f) = \infty\}$. Zunächst zeigen wir

(1) Es ist $\mathfrak{m}_U = \mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}(U)$ und $A/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathcal{O}(U)/\mathfrak{m}_U$ bijektiv für jede rationale Teilmenge U von X mit $x \in U$.

Begründung von (1): Sei U eine rationale Teilmenge von X mit $x \in U$. Wir wählen eine endliche Teilmenge T von A mit $A = T \cdot A$ und ein $s \in A$, so daß $U = R(\frac{T}{s})$. Da $A(\frac{T}{s}) = A_s$, gilt $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} A(\frac{T}{s})/\mathfrak{m} \cdot A(\frac{T}{s})$. Wir haben also die exakte Sequenz

(2) $0 \longrightarrow \mathfrak{m} \cdot A(\frac{T}{s}) \longrightarrow A(\frac{T}{s}) \xrightarrow{\alpha} A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$

Sei $\mathcal{T}$ die durch den Bewertungsring $A(x)$ von $A/\mathfrak{m}$ gegebene Topologie von $A/\mathfrak{m}$. Sei $\mathcal{T}_1$ die durch die Topologie von A auf $A/\mathfrak{m}$ definierte Quotiententopologie. Dann ist $(A/\mathfrak{m}, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (A/\mathfrak{m}, \mathcal{T})$ stetig. Nach Voraussetzung wird auch $\mathcal{T}_1$ durch eine Bewertung von $A/\mathfrak{m}$ definiert. Deshalb gilt:

(3) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$

Wir versehen $A/\mathfrak{m}$ mit der Topologie $\mathcal{T}$. Dann ist α stetig (da sich x fortsetzt zu einer stetigen Bewertung von $A(\frac{T}{s})$). Aus (3) folgt, daß $A/\mathfrak{m}$ vollständig ist und α eine offene Abbildung ist. Deshalb erhalten wir aus (2) durch Übergang zu den Vervollständigungen die exakte Sequenz

(4) $\quad 0 \longrightarrow (\mathfrak{m} \cdot A(\frac{T}{s}))^\wedge \longrightarrow A\langle\frac{T}{s}\rangle \longrightarrow A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$

Es ist $(\mathfrak{m} \cdot A(\frac{T}{s}))^\wedge$ der Abschluß des Ideals $\mathfrak{m} \cdot A\langle\frac{T}{s}\rangle$ in $A\langle\frac{T}{s}\rangle$. Da A strikt noethersch ist, ist $A\langle\frac{T}{s}\rangle$ noethersch. Nach (2.2.14) ist $\mathfrak{m} \cdot A\langle\frac{T}{s}\rangle$ abgeschlossen in $A\langle\frac{T}{s}\rangle$. Deshalb gilt

(5) $(\mathfrak{m} \cdot A(\frac{T}{s}))^\wedge = \mathfrak{m} \cdot A\langle\frac{T}{s}\rangle$

Da $\mathcal{O}(U) = A\langle\frac{T}{s}\rangle$, folgt aus (5) und der Exaktheit von (4) die Behauptung aus (1).

Nun zum Beweis von (i) und (ii). Es ist $\mathcal{O}_x = \varinjlim_{U} \mathcal{O}(U) = \varinjlim_{U} \mathcal{O}(U)_{\mathfrak{m}_U}$. Nach (3.3.8.i) sind die Übergangsmorphismen $\mathcal{O}(U)_{\mathfrak{m}_U} \longrightarrow \mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_V}$ flach. Da A strikt noethersch ist, sind die Ringe $\mathcal{O}(U)_{\mathfrak{m}_U}$ noethersch. Benutzt man (1), so folgen aus [EGA], 0_{III}.10.3.1.3 die Behauptungen aus (i) und (ii).
iii) Es ist zu zeigen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $A/\mathfrak{m}^n \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n$ bijektiv ist. Dazu zeigen wir, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung

(6) $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$

bijektiv ist. Da $\mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x$ und $A \longrightarrow \mathcal{O}_x$ flach ist, gilt

$$\mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1} = (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \otimes_A \mathcal{O}_x = (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x)$$

Da $A/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ bijektiv ist, ist also auch die Abbildung in (6) bijektiv.

Sei X ein affinoider analytischer Raum mit Strukturgarbe $\mathcal{O}$. Wir wollen zu jedem endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Modul M eine Garbe auf X mit Werten in der Kategorie der vollständigen topologischen Gruppen definieren. Für jede rationale Teilmenge U von X setzen wir $\mathcal{F}(U) = M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(U)$. Es ist $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter Modul über dem vollständigen noetherschen Tate-Ring $\mathcal{O}(U)$ und somit trägt $\mathcal{F}(U)$ nach (2.2.15.i) eine kanonische Topologie. Die Bemerkung (2.2.16) zeigt, daß für rationale Teilmengen U und V mit $U \subseteq V$ die kanonische Abbildung $\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ stetig ist. Wir haben also auf der Kategorie der rationalen Teilmengen von X eine Prägarbe $\mathcal{F}$ mit Werten in der Kategorie der vollständigen topologischen Gruppen. Gemäß [EGA*], 0.3.2. setzen wir $\mathcal{F}$ fort zu einer Prägarbe auf X, indem wir für jede offene Teilmenge V von X setzen $\mathcal{F}(V) = \varprojlim_{U} \mathcal{F}(U)$, wobei U die Menge aller rationalen Teilmengen von X durchläuft, die in V enthalten sind. Diese Prägarbe ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulprägarbe. Wir bezeichnen sie mit $M \otimes \mathcal{O}$.

Satz 3.3.17. Für jeden endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Modul M ist $M \otimes \mathcal{O}$ eine Garbe auf X mit Werten in der Kategorie der vollständigen topologischen Gruppen. Es ist $H^i(X, M \otimes \mathcal{O}) = 0$ für jedes $i > 0$.

Beweis: Aus (3.3.5) und (3.3.8.i) erhält man sehr schnell, daß $M \otimes \mathcal{O}$ eine Garbe abelscher Gruppen ist mit $H^i(X, M \otimes \mathcal{O}) = 0$ für $i > 0$ (siehe [BGR], 8.2.1 Cor. 5.) Daß $M \otimes \mathcal{O}$ eine Garbe topologischer Gruppen ist, folgt aus dem Satz von Banach (2.2.13).

Aus (3.3.17) und (3.3.8.i) folgt, daß $M \longmapsto M \otimes \mathcal{O}$ ein Funktor von der Kategorie der endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Moduln in die Kategorie der $\mathcal{O}$-Modulgarben ist, der exakt und volltreu ist.

Da für jede rationale Teilmenge U von X der Ring $\mathcal{O}(U)$ noethersch ist, erhalten wir: Eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann kohärent, wenn jedes $x \in X$ eine offene affinoide Umgebung U besitzt, so daß $\mathcal{F}|U$ isomorph zu einer Garbe der Form $M \otimes (\mathcal{O}|U)$ ist, wobei M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(U)$-Modul ist. Insbesondere ist die Strukturgarbe $\mathcal{O}$ kohärent.

Satz 3.3.18. Jede kohärente Garbe auf X ist isomorph zu einer Garbe der Form $M \otimes \mathcal{O}$, wobei M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(X)$-Modul ist.

Man kann (3.3.18) ganz analog zu Theorem III.6.2 in [FP] beweisen. Nur an einer Stelle muß der Beweis etwas modifiziert werden. Wir skizzieren den Beweis.

Sei f ein Element von $\mathcal{O}(X)$. Wir setzen $U_1 = \{x \in X \,|\, 0 \geq v_x(f_x)\}$ und $U_2 = \{x \in X \,|\, v_x(f_x) \geq 0\}$. Sei $\mathfrak{U}$ die Überdeckung $\{U_1, U_2\}$ von X. Eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt $\mathfrak{U}$-kohärent, wenn es endlich erzeugte $\mathcal{O}(U_i)$-Moduln M_i gibt, so daß $\mathcal{F}|U_i$ isomorph zu $M_i \otimes (\mathcal{O}|U_i)$ ist für $i = 1, 2$.

(1) Ist $\mathcal{F}$ eine $\mathfrak{U}$-kohärente Garbe auf X, so wird die $(\mathcal{O}|U_2)$-Modulgarbe $\mathcal{F}|U_2$ vom Bild der Abbildung $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U_2)$ erzeugt.

Beweis: siehe [FP], III.6.4.

(2) Für jede $\mathfrak{U}$-kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X gilt $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Beweis: Nach (3.3.17) ist $H^k(U_1, \mathcal{F}) = H^k(U_2, \mathcal{F}) = H^k(U_1 \cap U_2, \mathcal{F}) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Deshalb gilt $H^1(X, \mathcal{F}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Also ist zu zeigen $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$. Nach (1) gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Untermodul M von $\mathcal{F}(X)$, so daß für den kanonischen Garbenmorphismus $\mathcal{G} := M \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}$ gilt: Für jede rationale Teilmenge U von U_2 ist $\mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ surjektiv. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}(U_1 \cap U_2) \\ \uparrow & & \uparrow h \\ \mathcal{G}(U_1) \times \mathcal{G}(U_2) & \xrightarrow[d_{\mathcal{G}}]{} & \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)\,. \end{array}$$

Nach (3.3.17) ist $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0$, also ist $d_{\mathcal{G}}$ surjektiv. Da h surjektiv ist, ist also auch $d_{\mathcal{F}}$ surjektiv und damit $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$.

(3) Jede $\mathfrak{U}$-kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X wird von ihren globalen Schnitten erzeugt.

Beweis: Nach (1) gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Untermodul M von $\mathcal{F}(X)$, so daß die Einschränkung des kanonischen Garbenmorphismus $M \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}$ auf U_2

surjektiv ist. Sei $\mathcal{G}$ das Bild des Garbenmorphismus $M \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}$. Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0 .$$

$\mathcal{G}$ ist eine $\mathfrak{U}$-kohärente Garbe und somit ist auch $\mathcal{H}$ eine $\mathfrak{U}$-kohärente Garbe. Da $\mathcal{H}|U_2 = 0$, ist die Abbildung $\mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(U_1)$ surjektiv. Deshalb wird $\mathcal{H}$ von seinen globalen Schnitten erzeugt. Da $M \otimes \mathcal{O}$ von seinen globalen Schnitten erzeugt wird, wird auch $\mathcal{G}$ von seinen globalen Schnitten erzeugt. Nach (2) ist $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ und somit ist $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ surjektiv. Hieraus folgt, daß $\mathcal{F}$ von seinen globalen Schnitten erzeugt wird.

(4) Jede $\mathfrak{U}$-kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist isomorph zu einer Garbe $M \otimes \mathcal{O}$, wobei M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(X)$-Modul ist.

Beweis: Nach (3) gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Untermodul N_1 von $\mathcal{F}(X)$, so daß der kanoniche Garbenmorphismus $f : N_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}$ surjektiv ist. Der Kern von f ist $\mathfrak{U}$-kohärent. Mit dem gleichen Schluß erhalten wir eine exakte Sequenz

$$N_2 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow N_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 .$$

Hieraus folgt die Behauptung aus (4).

Aus (4) und den Punkten (2), (3), (5) im Beweis von (3.3.5) folgt (3.3.18).

Definition 3.3.19. i) Ein analytischer Raum X heißt quasisepariert, wenn der Durchschnitt zweier offener quasikompakter Teilmengen von X quasikompakt ist.
ii) Ein Morphismus analytischer Räume $f: X \to Y$ heißt quasikompakt, wenn $f^{-1}(U)$ quasikompakt ist für jede offene quasikompakte Teilmenge U von Y.

Jeder affinoide analytische Raum ist quasisepariert. Ist $(U_i | i \in I)$ eine Überdeckung eines analytischen Raums X durch offene affinoide Teilmengen, so ist X genau dann quasisepariert, wenn $U_i \cap U_j$ quasikompakt ist für jedes $i, j \in I$.
Sind $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer Räume und $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung von Y durch offene affinoide Teilmengen, so ist f genau dann quasikompakt, wenn $f^{-1}(U_i)$ quasikompakt ist für jedes $i \in I$.

Proposition 3.3.20. Sei $f: X \to Y$ ein injektiver quasikompakter Morphismus zwischen analytischen Räumen. Dann ist die durch f gegebene stetige Abbildung $X \to f(X)$ ein Homöomorphismus.

Beweis: Ohne Einschränkung ist Y affinoid. Sei $g: X \to f(X)$ die Restriktion von f. Wir zeigen, daß g abgeschlossen ist. Da X quasikompakt ist, ist $f(X)$ prokonstruierbar in Y und ist $g(T)$ prokonstruierbar in $f(X)$ für jede abgeschlossene Teilmenge T von X. Es genügt deshalb zu zeigen, daß g spezialisierend ist (d.h. sind x ein Punkt von X und y' eine Spezialisierung von $g(x)$ in $f(X)$, so gibt es eine Spezialisierung y von x in X mit $g(y) = y'$). Nach (3.3.11) ist g generalisierend. Da g bijektiv ist, ist dann g auch spezialisierend.

Definition 3.3.21. i) Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ zwischen analytischen Räumen heißt lokal von endlichem Typ, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene affinoide Umgebung U von x in X und eine offene affinoide Umgebung V von $f(x)$ in Y mit $f(U) \subseteq V$ gibt, so daß der Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)) \longrightarrow (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ topologisch von endlichem Typ ist.
ii) Ein Morphismus analytischer Räume heißt von endlichem Typ, wenn er lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

Proposition 3.3.22. Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Morphismen zwischen analytischen Räumen.
i) Sind f und g lokal von endlichem Typ, so ist auch $g \circ f$ lokal von endlichem Typ.
ii) Ist $g \circ f$ lokal von endlichem Typ, so ist auch f lokal von endlichem Typ.
iii) Sind U und V offene Teilmengen von X und Y mit $f(U) \subseteq V$ und ist f lokal von endlichem Typ, so ist auch die Restriktion $f: U \to V$ lokal von endlichem Typ.

Beweis: Wir beweisen (i), der Beweis von (ii) ist entsprechend. (iii) folgt aus (i) und (ii).
Sei ein $x \in X$ gegeben. Seien U_1 und V_1 offene affinoide Umgebungen von x und $f(x)$ in X und Y, so daß $(\mathcal{O}_Y(V_1), \mathcal{O}_Y^+(V_1)) \to (\mathcal{O}_X(U_1), \mathcal{O}_X^+(U_1))$ topologisch von endlichem Typ ist, und seien V_2 und W offene affinoide Umgebungen von $f(x)$ und $g(f(x))$ in Y und Z, so daß $(\mathcal{O}_Z(W), \mathcal{O}_Z^+(W)) \to (\mathcal{O}_Y(V_2), \mathcal{O}_Y^+(V_2))$ topologisch von endlichem Typ ist. Wir wählen rationale Teilmengen U und V von U_1 und V_2, so daß $x \in U, f(x) \in V \subseteq V_1 \cap V_2$ und $f(U) \subseteq V$. Da $(\mathcal{O}_Y(V_2), \mathcal{O}_Y^+(V_2)) \to (\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V))$ topologisch von endlichem Typ ist ((2.4.8 i)), ist nach (2.4.10) $(\mathcal{O}_Z(W), \mathcal{O}_Z^+(W)) \to (\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V))$ topologisch von endlichem Typ. Ebenso erhalten wir, daß $(\mathcal{O}_Y(V_1), \mathcal{O}_Y^+(V_1)) \to (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ topologisch von endlichem Typ ist. Nach (2.4.14 ii) ist dann $(\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)) \to (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ topologisch von endlichem Typ. Wieder mit (2.4.10) erhalten wir, daß $(\mathcal{O}_Z(W), \mathcal{O}_Z^+(W)) \to (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ topologisch von endlichem Typ ist.

Satz 3.3.23. Ist $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen Räumen, der lokal von endlichem Typ ist, so ist $(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))$ topologisch von endlichem Typ.

Einen Beweis von (3.3.23) geben wir in (3.8).

Beispiel 3.3.24. (Zur geometrischen Motivation dieses Beispiels siehe (3.9.15 iv)). Für jeden noetherschen Ring B bezeichnet $B((T))$ den Laurentreihenring in einer Variablen über B, also $B((T)) = B[[T]]_T = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_nT^n \mid b_n \in B$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $b_n = 0$ für $n < m\}$. Für ein $p = \sum b_nT^n \in B((T))$ sei $\deg(p) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid b_n \neq 0\}$ der Grad von p (für $0 \in B((T))$ setzen wir $\deg(0) = \infty$). In diesem Beispiel versehen wir einen Laurentreihenring $B((T))$ immer mit der Gruppentopologie, so daß die Mengen $\{p \in B((T)) \mid \deg(p) \geq n\}, n \in \mathbb{N}$, ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen bilden. Damit ist $B((T))$ ein vollständiger Tate-Ring mit Definitionstupel $(B[[T]], T)$. Da $B[[T]]$ noethersch und somit $B((T))$ strikt noethersch ist, haben wir einen analytischen Raum Y zu dem affinoiden Ring $(B((T)), B[[T]]^c)$. Für jedes $b \in B$ ist der offene Teilraum $\{y \in Y \mid v_y(1) \geq v_y(b)\}$ von Y der analytische Raum zu dem affinoiden Ring $(B_b((T)), B_b[[T]]^c)$.

Wir fixieren einen noetherschen Ring A. Seien $A[S]$ der Polynomring in einer Variablen über A und Y der analytische Raum zu dem affinoiden Ring $(A[S]((T)), A[S][[T]]^c)$. Wie eben erwähnt, ist der offene Teilraum $V := \{y \in Y \mid v_y(1) \geq v_y(S)\}$ von Y der analytische Raum zu dem affinoiden Ring

$$D := (A[S, S^{-1}]((T)), A[S, S^{-1}][[T]]^c).$$

Wir betrachten den stetigen A-Algebrenhomomorphismus

$$\begin{gathered}\varphi: A[S, S^{-1}]((T)) \longrightarrow A[S, S^{-1}]((T)) \\ \text{mit} \quad \varphi(S) = S^{-1} \quad \text{und} \quad \varphi(T) = S^{-1}T.\end{gathered}$$

φ ist ein Homöomorphismus mit $\varphi(A[S, S^{-1}][[T]]) = A[S, S^{-1}][[T]]$. Deshalb definiert φ einen Isomorphismus affinoider Ringe

$$\psi: D \longrightarrow D.$$

Sei $g: V \to V$ der von ψ induzierte Isomorphismus analytischer Räume. Sei X der analytische Raum, der dadurch entsteht, daß man zwei Kopien von Y längs des

Automorphismus g von V miteinander verklebt. Wir haben also offene Teilmengen U_1 und U_2 von X, die X überdecken, und Isomorphismen $f_1: Y \to U_1$ und $f_2: Y \to U_2$, so daß $f_1(V) = f_2(V) = U_1 \cap U_2$ und $f_2^{-1} \circ (f_1 \mid V) = g$.

Mittels f_2 identifizieren wir $\mathcal{O}_X(U_2)$ mit $\mathcal{O}_Y(Y) = A[S]((T))$. Dann gilt

(1) Die Restriktionsabbildung $\sigma: \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U_2)$ ist injektiv und das Bild von σ ist der Ring $E := \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(S)T^n \in A[S]((T)) \mid \deg_S a_n(S) \leq -n$ für jedes $n \in \mathbb{Z}\}$. Dabei bezeichnet $\deg_S$ den üblichen Grad eines Polynoms aus $A[S]$ (für $0 \in A[S]$ setzen wir $\deg_S 0 = -\infty$).

Beweis: Da die Restriktion $\tau: \mathcal{O}_Y(Y) = A[S]((T)) \to A[S, S^{-1}]((T)) = \mathcal{O}_Y(V)$ injektiv ist, ist σ injektiv. Ein $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(S)T^n \in \mathcal{O}_X(U_2) = \mathcal{O}_Y(Y)$ liegt genau dann im Bild von σ, wenn $g^*(a \mid V) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n(S^{-1}) \cdot S^{-n})T^n$ im Bild von τ liegt, d.h. $-\deg_S a_n(S) - n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Sei W die Nullumgebung $\{p \in A[S]((T)) \mid \deg(p) \geq 1\}$ von $\mathcal{O}_X(U_2)$. Aus (1) folgt, daß unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ nur die 0 nach $\mathcal{O}_X(U_1) \times W$ abgebildet wird. Deshalb ist die Topologie auf $\mathcal{O}_X(X)$ die diskrete Topologie.

Nach (1) gibt es ein $a \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $\sigma(a) = T^{-1}$.Da $\mathcal{O}_X(X)$ diskret ist, ist $a \in \mathcal{O}_X(X)^\circ$. Es ist jedoch $T^{-1} \notin \mathcal{O}_X(U_2)^\circ$. Die Restriktionsabbildung $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U_2)$ bildet also $\mathcal{O}_X(X)^\circ$ nicht nach $\mathcal{O}_X(U_2)^\circ$ ab.

$\mathcal{O}_X(X)$ ist isomorph zum Polynomring in zwei Variablen über A. Ist A reduziert, so ist $\mathcal{O}_X^+(X)$ isomorph zu A.

3.4. Analytische Varietäten und analytische Räume

Wir wollen in diesem Abschnitt die Beziehungen zwischen den analytischen Varietäten der rigid analytischen Geometrie und den im vorigen Paragraphen definierten analytischen Räumen untersuchen.

Definition 3.4.1. Sei X ein lokal spektraler topologischer Raum. Die Menge der indkonstruierbaren Teilmengen von X ist eine Topologie auf X ([EGA*], I.7.2.2.). Sie heißt die konstruierbare Topologie von X. Eine Teilmenge von X heißt c-dicht in X, wenn sie dicht in X bezüglich der konstruierbaren Topologie ist.

Beispiel 3.4.2. Sei k ein topologischer Körper, dessen Topologie sich durch eine Rang 1 Bewertung definieren läßt. (k ist nicht unbedingt vollständig.) Wir betrachten den topologischen Polynomring $A = k[X_1, \dots, X_n]_T$ mit $T = (\{1\}, \dots, \{1\})$. A ist ein strikt noetherscher Tate-Ring. Deshalb haben wir einen analytischen Raum zu dem affinoiden Ring (A, A°). Er heißt der n-dimensionale Einheitspolyzylinder über k und wird mit $E^n = E^n_k$ bezeichnet. Sei S die boolesche Algebra von Teilmengen von E^n_k, die erzeugt wird von den Mengen $\{x \in E^n_k \,|\, v_x(a) \geq v_x(b)\}$ mit $a, b \in A$ (d.h. $S = \{Q \cap \mathrm{Spa}\,(A, A^\circ) \mid Q$ konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,A\})$. Sei $X^n = X^n_k$ die Menge aller $x \in E^n_k$, so daß $\{a \in A \,|\, a(x) = 0\}$ ein maximales Ideal von A ist. Dann gilt

Proposition 3.4.3. Eine Teilmenge M von E^n_k ist genau dann konstruierbar, wenn $M \in S$ und $M \cap X^n_k$ sowohl offen als auch abgeschlossen in der Teilraumtopologie von X^n_k ist. Ist M ein Element von S, das nicht die leere Menge ist, so ist der Durchschnitt $M \cap X^n_k$ nicht leer. Insbesondere ist X^n_k c-dicht in E^n_k.

Beweis: Nach (3.1.3) gilt

(1) $$E^n = \mathrm{Spa}\,(A, A^\circ) = \big\{v \in \mathrm{Spv}\,(A, A) | v(a) > 0 \text{ für jedes } a \in A^{\circ\circ} \text{ und } v(a) \geq 0 \text{ für jedes } a \in A^\circ\big\}.$$

Sei $\alpha : k \twoheadrightarrow \Gamma_\infty$ die Rang 1 Bewertung von k, die die Topologie von k definiert. Die Bewertung $A \longrightarrow \Gamma_\infty$, $\Sigma\, a_\nu X^\nu \longmapsto \min\{\alpha(a_\nu) | \,\nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ definiert die Topologie von A. Deshalb gilt $A^{\circ\circ} = \{\Sigma\, a_\nu X^\nu \in A | \,\alpha(a_\nu) > 0$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n\}$ und $A^\circ = \{\Sigma\, a_\nu X^\nu \in A | \,\alpha(a_\nu) \geq 0$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0^n\}$. Damit erhalten wir aus (1)

(2) $$E^n = \big\{v \in \mathrm{Spv}\,(A, A) \,|\, v|k = \alpha \text{ und } v(X_i) \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\big\}.$$

Wir betrachten nun das Beispiel (iii) in (1.3.14). Dort haben wir die Menge $X := \mathrm{Spv}\,(\alpha, A) \cap \mathrm{Spv}\,(A, A)$ eingeführt und festgestellt, daß X eine prokonstruierbare

Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,(A,A)$ ist und $\mathrm{Max\,Spv}\,(\alpha,A)$ in X enthalten ist. In $\mathrm{Spv}\,(A,A)$ haben wir die konstruierbare Teilmenge $X_1 := \{v \in \mathrm{Spv}\,(A,A) | \, v(X_i) \geq 0$ für $i = 1,\ldots,n\}$ und in $\mathrm{Spv}\,(\alpha,A)$ haben wir die konstruierbare Teilmenge $X_2 := \{v \in \mathrm{Spv}\,(\alpha,A) | \, v(X_i) \geq 0$ für $i = 1,\ldots,n\}$. Nach (2) gilt

(3) $\qquad X^n = X_2 \cap \mathrm{Max\,Spv}\,(\alpha,A)$

(4) $\qquad X^n = X_1 \cap \mathrm{Max\,Spv}\,(\alpha,A)$

(5) $\qquad E^n = X_1 \cap X$

Sei M ein Element von S mit $M \neq \emptyset$. Nach (2) gibt es eine konstruierbare Teilmenge M' von X_2 mit $M' \cap E^n = M$. Aus (1.2.2) und (3) folgt $M \cap X^n = M' \cap X^n \neq \emptyset$.

Sei M eine konstruierbare Teilmenge von E^n. Natürlich ist dann $M \in S$. Nach (4) und (5) und der Proposition in (1.3.14.iii) ist $M \cap X^n$ offen und abgeschlossen in der Teilraumtopologie von X^n.

Sei M ein Element von S, so daß $M \cap X^n$ offen und abgeschlossen in X^n ist. Nach (3), (4) und (5) und der Proposition in (1.3.14.iii) gibt es eine konstruierbare Teilmenge N von E^n mit $N \cap X^n = M \cap X^n$. Sei $L = M \triangle N$ die symmetrische Differenz von M und N. Dann ist $L \in S$ und $L \cap X^n = \emptyset$. Wie schon gezeigt, folgt hieraus $L = \emptyset$, also $M = N$. Damit ist (3.4.3) bewiesen.

Sei nun die Bewertung α von k henselsch. Die Fortsetzung von α auf eine algebraische Erweiterung von k bezeichnen wir ebenfalls mit α. Für jedes $f \in A$ und jedes maximale Ideal x von A sei $f(x)$ das Bild von f in A/x. Wir betrachten die Menge $\mathrm{Max}\,A$ der maximalen Ideale von A als Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,A$, indem wir ein $x \in \mathrm{Max}\,A$ mit der Bewertung von A identifizieren, die sich aus der Fortsetzung von α auf A/x ergibt. Für (3) können wir dann schreiben

(6) $\qquad X^n = \{x \in \mathrm{Max}\,A | \, \alpha(X_i(x)) \geq 0$ für $i = 1,\ldots,n\}$.

Beispiel 3.4.4. Wir verbleiben in der Situation von (3.4.2). Sei nun aber k algebraisch abgeschlossen und $n = 1$. Nach (3.4.3) und (6) ist $X_k^1 = \{x \in k | \, \alpha(x) \geq 0\}$ c-dicht in E_k^1. Für $a, b \in k$ mit $b \neq 0$ setzen wir

$$B(a;b) = R\Big(\frac{b, X-a}{b}\Big) = \{v \in E_k^1 | \, v(X-a) \geq v(b)\}$$

$$C(a;b) = E_k^1 \setminus R\Big(\frac{b}{X-a}\Big) = \{v \in E_k^1 | v(X-a) > v(b)\}$$

Die $B(a;b)$ heißen die offenen Kreise von E_k^1 und die $C(a;b)$ heißen die abgeschlossenen Kreise von E_k^1. Es ist E_k^1 ein offener und abgeschlossener Kreis von E_k^1. Die Aussagen

(1.2.4) — (1.2.10) gelten analog für E_k^1, wenn man die Kreise $B(a;b)$ und $C(a;b)$ anstelle der Kreise $X(a;b)$ und $Y(a;b)$ nimmt.

Wir fixieren ein Element γ_0 der Wertegruppe Γ von α mit $\gamma_0 > 0$. Auf $\Gamma \oplus \mathbb{Z}$ wählen wir die Gruppenanordnung, die die Anordnung von Γ fortsetzt und so daß $\gamma = \gamma \oplus 0 < 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma < \gamma_0$ und $\gamma = \gamma \oplus 0 > 0 \oplus 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \geq \gamma_0$. Wir erhalten Bewertungen $x : A \longrightarrow \Gamma_\infty$ und $y : A \longrightarrow (\Gamma \oplus \mathbb{Z})_\infty$, indem wir für ein Polynom $p = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ setzen

$$x(p) = \min\{\alpha(a_i) + i \cdot \gamma_0 \,|\, i = 0, \ldots, n\}$$
$$y(p) = \min\{\alpha(a_i) + i \cdot (0 \oplus 1) | i = 0, \ldots, n\}\,.$$

x und y sind Elemente von E_k^1 und y ist eine Spezialisierung von x. Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der analytischen Funktionen auf E_k^1. Es gilt

(7) Die kanonische Abbildung $g : \mathcal{O}_y \longrightarrow \mathcal{O}_x$ ist nicht surjektiv.

Beweis: Sei b_0 ein Element von k mit $\alpha(b_0) = \gamma_0$. Es ist $x \in B(0;b_0)$. Für jede analytische Funktion f auf $B(0;b_0)$, die sich auf keinen größeren Kreis $B(0;b)$ ($b \in k$ mit $\gamma_0 > \alpha(b)$) fortsetzen läßt, ist f_x nicht im Bild der Abbildung g enthalten. (Solch ein f gibt es, da für jedes $b \in k^*$ mit $\alpha(b) \geq 0$ gilt $\mathcal{O}(B(0;b)) = k\langle X\rangle_{\{\frac{1}{b}\}}$.) Denn: Angenommen, f_x liegt doch im Bild von g. Seien U eine offene Umgebung von y in E_k^1 und h ein Element von $\mathcal{O}(U)$ mit $g(h_y) = f_x$, d.h. $h_x = f_x$. Sei $K = B(a;b) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C(a_i;b_i)$ ein offener gelochter Kreis von E_k^1 mit $y \in K \subseteq U$. Da $h_x = f_x$ und $K \cap B(0;b_0)$ zusammenhängend ist, gilt $h|K \cap B(0;b_0) = f|K \cap B(0;b_0)$. Also läßt sich f zu einer analytischen Funktion auf $K \cup B(0;b_0)$ fortsetzen. Wir werden im nachfolgenden zeigen, daß $K \cup B(0;b_0)$ einen Kreis $B(0;b')$ mit $\gamma_0 > \alpha(b')$ enthält. Dies ist ein Widerspruch.

Da $y \in B(a;b)$, erhalten wir $y(X-a) \geq y(b)$, d.h. $\alpha(a) \geq \alpha(b)$ und $\gamma_0 > \alpha(b)$. Aus $\alpha(a) \geq \alpha(b)$ folgt $0 \in B(a;b)$ und somit $B(a;b) = B(0;b)$. Wir können annehmen, daß $C(a_i;b_i) \subseteq B(0;b_0)$ für $i = 1, \ldots, m$ und $C(a_i;b_i) \not\subseteq B(0;b_0)$ für $i = m+1, \ldots, n$. Für jedes $i \in \{m+1, \ldots, n\}$ gilt dann entweder $B(0;b_0) \subseteq C(a_i;b_i)$ oder $B(0;b_0) \cap C(a_i;b_i) = \emptyset$. Ist $B(0;b_0) \subseteq C(a_i;b_i)$, so ist $C(a_i;b_i) = C(0;b_i)$ mit $\gamma_0 > \alpha(b_i)$. Hieraus folgt $y \in C(a_i;b_i)$, was jedoch nicht möglich ist. Also ist $B(0;b_0) \cap C(a_i;b_i) = \emptyset$ für $i = m+1, \ldots, n$. Hieraus ergibt sich $\gamma_0 > \alpha(a_i)$ für $i = m+1, \ldots, n$. Wir wählen ein $b' \in k$ mit $\gamma_0 > \alpha(b') \geq \alpha(b)$ und $\alpha(b') > \alpha(a_i)$ für $i = m+1, \ldots, n$. Dann ist $0 \notin C(a_i;b_i)$ und $a_i \notin B(0;b')$ für $i = m+1, \ldots, n$, woraus sich ergibt $B(0;b') \cap C(a_i;b_i) = \emptyset$ für $i = m+1, \ldots, n$. Weiterhin ist $B(0;b') \subseteq B(0;b) = B(a;b)$. Also ist $L := B(0;b') \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C(a_i;b_i) \subseteq K$. Es ist $B(0;b') = L \cup B(0;b_0) \subseteq K \cup B(0;b_0)$.

Lemma 3.4.5. Seien X ein lokal spektraler topologischer Raum und M eine Teilmenge von X. Dann gibt es genau eine prokonstruierbare Teilmenge Y von X, die M enthält und in der M c-dicht ist.

Beweis: Y ist der Durchschnitt aller prokonstruierbaren Teilmengen von X, die M enthalten.

Sei A ein Tate-Ring. Dann gilt

$$\mathrm{Cont}\,(A)_{\min} = \{v \in \mathrm{Cont}\,(A) \mid v \text{ hat Rang } 1\}$$

(siehe Beweis von (3.3.9)). Für jeden Ganzheitsring A^+ von A gilt $\mathrm{Cont}\,(A)_{\min} \subseteq \mathrm{Spa}\,(A, A^+)$ (nach (3.1.14 ii)), also

$$\mathrm{Spa}\,(A, A^+)_{\min} = \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}\,.$$

Wir setzen

$$\mathrm{Max}\,_v A = \{v \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min} \mid \mathrm{supp}\,(x) \text{ ist ein maximales Ideal von } A\}\,.$$

Ist A vollständig, so gibt es nach (3.2.5) zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A ein $v \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$ mit $\mathrm{supp}\,(v) = \mathfrak{m}$, d.h. die Trägerabbildung $\ell : \mathrm{Max}\,_v A \longrightarrow \mathrm{Max}\, A$ ist surjektiv. Besitzt A darüberhinaus noch die Eigenschaft (T) aus (3.3), so ist ℓ bijektiv. Die Umkehrabbildung ℓ^{-1} gibt dann eine kanonische Injektion $\mathrm{Max}\, A \hookrightarrow \mathrm{Cont}\,(A)$.

Die entscheidende Aussage für den ganzen Paragraphen ist der folgende Satz.

Satz 3.4.6. Sei A ein vollständiger Tate-Ring, der topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen topologischen Körper k ist, dessen Topologie sich durch eine Rang 1 Bewertung definieren läßt. Dann ist $\mathrm{Max}\,_v A$ c-dicht in $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$.

Also ist nach (3.4.5) $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$ die eindeutig bestimmte prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Cont}\,(A)$, die $\mathrm{Max}\,_v A$ enthält und in der $\mathrm{Max}\,_v A$ c-dicht ist. (Insbesondere ist A° der einzige Ganzheitsring A^+ von A, so daß $\mathrm{Max}\,_v A$ c-dicht in $\mathrm{Spa}\,(A, A^+)$ ist (nach (3.2.6)).

Zum Beweis von (3.4.6) benutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.4.7. Gegeben seien vollständige Tate-Ringe A und B, ein Ganzheitsring A^+ von A und ein stetiger Ringhomomorphismus $f : A \longrightarrow B$, so daß A integer und normal, B integer und f injektiv, endlich und endlich präsentiert ist. Sei B^+ der kleinste Ganzheitsring von B, so daß $f : (A, A^+) \longrightarrow (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus affinoider Ringe ist. Dann gilt: Die Abbildung $\mathrm{Spa}\,(f) : \mathrm{Spa}\,(B, B^+) \longrightarrow \mathrm{Spa}\,(A, A^+)$ ist offen und abgeschlossen und bildet konstruierbare Mengen auf konstruierbare Mengen ab.

Beweis: Sei $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ ein A-Modulerzeugendensystem von B über A. Indem wir jedes t_i mit einer geeigneten Einheit von A multiplizieren, können wir annehmen, daß jedes t_i ganz über A^+ ist. Nach (2.2.13) ist die A-lineare Abbildung $A^n \longrightarrow B$, die das Standarderzeugendensystem von A^n auf T abbildet, eine offene Abbildung. Deshalb ist $\{T \cdot U | \, U$ Nullumgebung von $A\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von B. Sei V eine Nullumgebung von $A^{\circ\circ}$, so daß $T \cdot V \subseteq B^{\circ\circ}$. Dann ist B^+ der kleinste Unterring von B, der ganz abgeschlossen in B ist und $A^+ \cup T \cdot V$ enthält. Also gilt

(1) $\quad B^+$ ist der ganze Abschluß von A^+ in B.

Wir setzen $X_A = \{v \in \mathrm{Spv}\, A | \, v(a) > 0$ für jedes $a \in A^{\circ\circ}$ und $v(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^+\}$ und $X_B = \{v \in \mathrm{Spv}\, B | \, v(b) > 0$ für jedes $b \in B^{\circ\circ}$ und $v(b) \geq 0$ für jedes $b \in B^+\}$. Sei g die durch f induzierte Abbildung $\mathrm{Spv}\, B \longrightarrow \mathrm{Spv}\, A$. Es gilt

(2) $\quad X_B = g^{-1}(X_A)$.

Denn: Mit (1) erhalten wir $g^{-1}(X_A) = \{v \in \mathrm{Spv}\, B | \, v(f(a)) > 0$ für jedes $a \in V$ und $v(f(a)) \geq 0$ für jedes $a \in A^+\} = \{v \in \mathrm{Spv}\, B | \, v(b) > 0$ für jedes $b \in T \cdot V \cup f(V)$ und $v(b) \geq 0$ für jedes $b \in B^+\} = X_B$.

X_A und X_B sind prokonstruierbare Teilmengen von $\mathrm{Spv}\, A$ und $\mathrm{Spv}\, B$, die abgeschlossen sind gegenüber Primärgeneralisierungen und Primärspezialisierungen. Nach (3.1.3) gilt $\mathrm{Spa}\,(A, A^+) = \mathrm{Spv}\,(A, A) \cap X_A = \{v \in X_A | v$ hat keine echte Primärspezialisierung$\}$ und $\mathrm{Spa}\,(B, B^+) = \mathrm{Spv}\,(B, B) \cap X_B = \{v \in X_B | \, v$ hat keine echte Primärspezialisierung$\}$. Damit folgt aus (2) und (1.1.20.ii)

(3) $\quad \mathrm{Spa}\,(B, B^+) = g^{-1}(\mathrm{Spa}\,(A, A^+))$

Seien r_A und r_B die Retraktionen $X_A \longrightarrow \mathrm{Spa}\,(A, A^+)$, $v \longmapsto v|c\Gamma_v$ und $X_B \longrightarrow \mathrm{Spa}\,(B, B^+)$, $v \longmapsto v|c\Gamma_v$. Nach (1.3.10.i) sind r_A und r_B spektrale Abbildungen. Sei Q eine konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,(B, B^+)$. Wegen $Q = \mathrm{Spa}\,(B, B^+) \cap r_B^{-1}(Q)$ folgt aus (3)

(4) $\quad \mathrm{Spa}\,(f)(Q) = \mathrm{Spa}\,(A, A^+) \cap g(r_B^{-1}(Q))$

Da $r_B^{-1}(Q)$ eine konstruierbare Teilmenge von X_B ist, folgt aus (1.1.21) und (2)

(5) $\quad g(r_B^{-1}(Q))$ ist eine konstruierbare Teilmenge von X_A.

Es ist $r_B^{-1}(Q)$ abgeschlossen gegenüber Primärgeneralisierungen und Primärspezialisierungen. Aus (1.1.20.ii und iv) folgt, daß dann auch $g(r_B^{-1}(Q))$ abgeschlossen ist gegenüber Primärgeneralisierungen und Primärspezialisierungen. Deshalb gilt $r_A^{-1}(\mathrm{Spa}\,(A,A^+) \cap g(r_B^{-1}(Q))) = g(r_B^{-1}(Q))$. Da r_A spektral ist, folgt damit aus (5), daß $\mathrm{Spa}\,(A,A^+) \cap g(r_B^{-1}(Q))$ konstruierbar in $\mathrm{Spa}\,(A,A^+)$ ist. Mit (4) erhalten wir, daß $\mathrm{Spa}\,(f)(Q)$ konstruierbar in $\mathrm{Spa}\,(A,A^+)$ ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathrm{Spa}\,(f)$ konstruierbare Mengen auf konstruierbare Mengen abbildet.

Sei nun Q eine offene konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,(B,B^+)$. Nach (3.3.11) und dem eben Bewiesenen ist $\mathrm{Spa}\,(f)(Q)$ eine offene konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,(A,A^+)$. Deshalb ist $\mathrm{Spa}\,(f)$ eine offene Abbildung.

Sei schließlich Q eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,(B,B^+)$. Da $\mathrm{Spa}\,(f)$ eine spektrale Abbildung ist, ist $\mathrm{Spa}\,(f)(Q)$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,(A,A^+)$. Aus (1) folgt, daß $\mathrm{Spa}\,(f)$ die Menge der Spezialisierungen eines Punktes surjektiv abbildet auf die Menge der Spezialisierungen des Bildpunktes. Deshalb ist $\mathrm{Spa}\,(f)(Q)$ abgeschlossen.

Beweis von (3.4.6): Wir teilen den Beweis in drei Schritte auf.

1. Schritt: $A = k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$.

(A,A°) ist die Vervollständigung des affinoiden Rings (B,B°) mit $B = k[X_1,\ldots,X_n]_T$, $T = (\{1\},\ldots,\{1\})$. Sei $f : \mathrm{Spa}\,(A,A^\circ) \longrightarrow \mathrm{Spa}\,(B,B^\circ)$ der Homöomorphismus, der durch die Inklusion $B \hookrightarrow A$ induziert wird. In (3.4.2) haben wir die Teilmenge X_k^n von $\mathrm{Spa}\,(B,B^\circ)$ definiert. Es gilt

(1) $\qquad f^{-1}(X_k^n) \subseteq \mathrm{Max}_v A.$

Denn: Sei ein $x \in X_k^n$ gegeben. Sei α die Rang 1 Bewertung von k, die die Topologie von k definiert. Sei β die durch x definierte Bewertung von $B/\mathrm{supp}\,(x)$. Nach dem Punkt (2) aus dem Beweis von (3.4.3) ist β eine Fortsetzung von α. Wir versehen $B/\mathrm{supp}\,(x)$ mit der Bewertungstopologie von β. Dann ist die Abbildung $B \longrightarrow B/\mathrm{supp}\,(x)$ stetig. Nach [B$_1$], I.2.3 Kor. zu Prop. 3 ist sie auch offen. Deshalb erhalten wir durch Übergang zu den Vervollständigungen eine surjektive Abbildung $A = \hat{B} \longrightarrow (B/\mathrm{supp}\,(x))^\wedge$. Hieraus folgt $f^{-1}(x) \in \mathrm{Max}_v A$. (Es gilt sogar $f^{-1}(X_k^n) = \mathrm{Max}_v A$, da $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung von k ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ([BGR], 6.1.2 Cor. 3)).

Aus (1) und (3.4.3) folgt (3.4.6).

2. Schritt: A ist integer.

Nach [BGR], 6.1.2 Cor. 2 gibt es einen injektiven und endlichen k-Algebrenhomomorphismus f: $B := k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle \longrightarrow A$. Nach [BGR], 6.1.3 Th. 1 ist f stetig.

Wir wollen (3.4.7) auf $g := \mathrm{Spa}(f) : \mathrm{Spa}(A, A^\circ) \longrightarrow \mathrm{Spa}(B, B^\circ)$ anwenden. Die Voraussetzungen sind erfüllt, denn A° ist ganz über B° ([BGR], 6.3.4 Prop. 1) und B ist normal ([BGR], 5.2.6 Th. 2).

Sei Q eine nichtleere konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Dann ist $g(Q)$ eine konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}(B, B^\circ)$. Nach Schritt 1 ist $\mathrm{Max}_v B \cap g(Q) \neq \emptyset$. Sei x ein Element aus Q mit $g(x) \in \mathrm{Max}_v B$. Dann ist $x \in \mathrm{Max}_v A \cap Q$.

3. Schritt: A beliebig.

Sei Q eine nichtleere konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Wir wählen ein $x \in Q$. Das Ideal $\mathrm{supp}(x)$ ist abgeschlossen in A. Sei $g : \mathrm{Spa}(B, B^\circ) \longrightarrow \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ die durch $A \longrightarrow A/\mathrm{supp}(x) =: B$ gegebene Abbildung. Nach [BGR], 6.3.4 Prop. 1 ist B° ganz über A°. Deshalb ist $g^{-1}(Q) \neq \emptyset$. Nach Schritt 2 gibt es ein $y \in \mathrm{Max}_v B \cap g^{-1}(Q)$. Es ist $g(y) \in \mathrm{Max}_v A \cap Q$.

Definition 3.4.8. Sei A ein affinoider Ring. Eine Teilmenge Q von $\mathrm{Spa}\, A$ heißt v-konstruierbar, wenn es eine konstruierbare Teilmenge Q' von $\mathrm{Spv}\, \tilde{A}$ gibt mit $Q = Q' \cap \mathrm{Spa}\, A$.

Im Gegensatz zum Begriff der Konstruierbarkeit ist der Begriff der v-Konstruierbarkeit kein topologischer Begriff. Zum Beispiel wird unter dem Homöomorphismus $\mathrm{Spa}\, \hat{A} \longrightarrow \mathrm{Spa}\, A$ eine v-konstruierbare Teilmenge nicht unbedingt auf eine v-konstruierbare Teilmenge abgebildet.

Die Menge der v-konstruierbaren Teilmengen von $\mathrm{Spa}\, A$ ist eine boolesche Algebra. Jede konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$ ist v-konstruierbar. Natürlich ist eine v-konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$ im allgemeinen nicht konstruierbar und (deshalb) im allgemeinen auch nicht indkonstruierbar. Es gilt jedoch

Lemma 3.4.9. Seien A ein affinoider Ring und Q eine v-konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$. Dann gibt es eine Familie $(I_j | j \in J)$ von Idealen von $\tilde{A}$ und zu jedem $j \in J$ eine konstruierbare Teilmenge Q_j von $\mathrm{Spa}\, A/I_j$, so daß

$$Q = \bigcup_{j \in J} g_j(Q_j),$$

wobei g_j die kanonische Abbildung $\mathrm{Spa}\, A/I_j \longrightarrow \mathrm{Spa}\, A$ ist.

Beweis: Wir können annehmen, daß Q von der Form ist $\{v \in \mathrm{Spa}\, A | v(f_1) \geq v(h_1), \dots, v(f_n) \geq v(h_n),\ v(r_1) > v(s_1), \dots, v(r_m) > v(s_m)\}$, wobei die f_i, h_i, r_i, s_i Elemente von $\tilde{A}$ sind. Sei ein $w \in Q$ gegeben. Wir zeigen, daß es ein Ideal I von

$\tilde{A}$ und eine konstruierbare Teilmenge P von $\operatorname{Spa} A/I$ gibt mit $w \in g(P) \subseteq Q$, wobei g die Abbildung $\operatorname{Spa} A/I \longrightarrow \operatorname{Spa} A$ ist.

Wir können annehmen, daß $w(h_i) \neq \infty$ für $i = 1, \dots, k$ und $w(h_i) = \infty$ für $i = k+1, \dots, n$. Zu jedem $i \in \{1, \dots, k\}$ wählen wir eine endliche Teilmenge F_i von $\tilde{A}$, so daß $f_i \in F_i$, $w(f) \geq w(h_i)$ für jedes $f \in F_i$ und $F_i \cdot \tilde{A}$ offen in $\tilde{A}$ ist. Zu jedem $i \in \{1, \dots, m\}$ wählen wir eine endliche Teilmenge R_i von $\tilde{A}$, so daß $r_i \in R_i$, $w(r) > w(s_i)$ für jedes $r \in R_i$ und $R_i \cdot \tilde{A}$ offen in $\tilde{A}$ ist. Sei I das $f_{k+1}, \dots, f_n, h_{k+1}, \dots, h_n$ erzeugte Ideal von $\tilde{A}$. Mit $^-$ bezeichnen wir die Abbildung $\tilde{A} \longrightarrow \tilde{A}/I$. Wir setzen $L_i = \{v \in \operatorname{Spa} A/I \,|\, v(\bar{f}) \geq v(\bar{h}_i) \neq \infty$ für jedes $f \in F_i\}$ für $i = 1, \dots, k$ und $M_i = \{v \in \operatorname{Spa} A/I \,|\, v(\bar{r}) > v(\bar{s}_i)$ für jedes $r \in R_i\}$ für jedes $i = 1, \dots, m$. Die L_i sind rationale Teilmengen von $\operatorname{Spa} A/I$ und damit konstruierbare Teilmengen von $\operatorname{Spa} A/I$. Nach dem nachfolgenden Lemma sind auch die M_i konstruierbare Teilmengen von $\operatorname{Spa} A/I$. Deshalb ist $P := \bigcap_{i=1}^{k} L_i \cap \bigcap_{i=1}^{m} M_i$ eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa} A/I$. Es gilt $w \in g(P) \subseteq Q$.

Lemma 3.4.10. Seien A ein affinoider Ring und $f_0, \dots, f_n$ Elemente von $\tilde{A}$, so daß das Ideal $(f_0, \dots, f_n)$ von $\tilde{A}$ offen ist. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei L_i die Menge $\{v \in \operatorname{Spa} A \,|\, v(f_i) \geq v(f_0) \neq \infty\}$ oder die Menge $\{v \in \operatorname{Spa} A \,|\, v(f_i) > v(f_0)\}$. Dann ist $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$.

Beweis: Sei I ein endlich erzeugtes Ideal von $\tilde{A}$ mit $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \tilde{A} \,|\, \mathfrak{p}$ ist offen $\}$. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei M_i die Menge $\{v \in \operatorname{Spv} \tilde{A} \,|\, v(f_i) \geq v(f_0) \neq \infty\}$ oder die Menge $\{v \in \operatorname{Spv} \tilde{A} \,|\, v(f_i) > v(f_0)\}$. Man rechnet leicht nach, daß jedes M_i abgeschlossen ist gegenüber Primärgeneralisierungen in $\operatorname{Spv} \tilde{A}$. Der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ ist abgeschlossen gegenüber I-zulässigen Spezialisierungen in $\operatorname{Spv} A$. Denn: Sei ein $v \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ gegeben. Sei w eine I-zulässige Spezialisierung von v. Zu zeigen ist $w \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. Ist $v(I) = \{\infty\}$, so ist $v = w$. Sei nun $v(I) \neq \{\infty\}$. Da w eine Primärspezialisierung von v ist, sieht man leicht, daß $w \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, wenn man voraussetzt, daß $w(f_0) \neq \infty$. Angenommen, es sei $w(f_0) = \infty$. Wegen $v(f_i) \geq v(f_0)$ für $i = 1, \dots, n$ ist dann $w(f_i) = \infty$ für $i = 0, \dots, n$. Da $(f_0, \dots, f_n)$ offen ist und somit $I \subseteq \sqrt{(f_0, \dots, f_n)}$, erhalten wir $w(I) = \infty$. Widerspruch.

Sei r die Retraktion $\operatorname{Spv} \tilde{A} \longrightarrow \operatorname{Spv}(\tilde{A}, I)$, $v \longmapsto c\Gamma_v(I)$. Da $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ abgeschlossen gegenüber I-zulässigen Generalisierungen und I-zulässigen Spezialisierungen ist, gilt $\bigcap_{i=1}^{n} M_i = r^{-1}\left(\operatorname{Spv}(\tilde{A}, I) \cap \bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)$. Nach (1.3.10) ist r spektral. Deshalb ist

$\operatorname{Spv}(\tilde{A}, I) \cap \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\tilde{A}, I)$. Da $\operatorname{Spa} A$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv}(\tilde{A}, I)$ ist (nach (3.1.3.)), ist $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$.

Bemerkung 3.4.11. i) Sei A ein tatescher affinoider Ring. Wie wir gleich sehen werden, ist das Innere einer konstruierbaren Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$ von gewissem Interesse. Wir wollen deshalb für die in (3.4.10) angegebenen konstruierbaren Teilmengen das Innere bestimmen. Seien also $f_0, \ldots, f_n$ Elemente von $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} = (f_0, \ldots, f_n)$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei L_i die Menge $\{v \in \operatorname{Spa} A | \, v(f_i) \geq v(f_0) \neq \infty\}$ oder die Menge $\{v \in \operatorname{Spa} A | \, v(f_i) > v(f_0)\}$. Wir setzen $L = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$. Sei s eine topologisch nilpotente Einheit von $\tilde{A}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir $L_i(m) = \{\operatorname{Spa} A \mid v(sf_i^m) \geq v(sf_0^m) \neq \infty\}$ oder $L_i(m) = \{v \in \operatorname{Spa} A \mid v(f_i^m) \geq v(sf_0^m) \neq \infty\}$, je nachdem ob $L_i = \{v \in \operatorname{Spa} A | \, v(f_i) \geq v(f_0) \neq \infty\}$ oder $L_i = \{v \in \operatorname{Spa} A | \, v(f_i) > v(f_0)\}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definieren wir $L(m) = \bigcap_{i=1}^{n} L_i(m)$. Dann ist $L(m)$ eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Es gilt $L(1) \subseteq L(2) \subseteq L(3) \subseteq \ldots \subseteq L$. Mit $\operatorname{int}(L)$ bezeichnen wir das Innere von L. Es gilt

$$\operatorname{int}(L) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L(m) .$$

Beweis: Sei ein $w \in \operatorname{int}(L)$ gegeben. Zu zeigen ist, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $w \in L(m)$. Wir nehmen an, daß $L_i = \{v \in \operatorname{Spa} A | \, v(f_i) > v(f_0)\}$ für $i = 1, \ldots, \ell$ und $L_i = \{v \in \operatorname{Spa} A | \, v(f_i) \geq v(f_0) \neq \infty\}$ für $i = \ell + 1, \ldots, n$. Sei H die größte konvexe Untergruppe von Γ_w mit $w(s) \notin H$. Dann ist die Bewertung w/H von $\tilde{A}$ eine Generalisierung von w in $\operatorname{Spa} A$ und somit $w/H \in L$. Deshalb gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\} : w(f_0) \neq \infty$ und $w(f_i) - w(f_0) > H$. Für ein genügend großes $m \in \mathbb{N}$ gilt dann: $w(f_0) \neq \infty$ und $m \cdot (w(f_i) - w(f_0)) \geq w(s)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Wir erhalten $w \in L_i(m)$ für $i = 1, \ldots, \ell$ und somit $w \in \bigcap_{i=1}^{\ell} L_i(m) \cap \bigcap_{i=\ell+1}^{n} L_i = L(m)$.

ii) Seien $f : A \longrightarrow B$ ein stetiger Ringhomomorphismus tatescher affinoider Ringe und $g : \operatorname{Spa} B \longrightarrow \operatorname{Spa} A$ die durch f induzierte Abbildung. Seien L und M Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ und $\operatorname{Spa} B$. Es sei L konstruierbar und $g(M) \subseteq L$. Mit $\operatorname{int}(L)$ und $\operatorname{int}(M)$ bezeichnen wir das Innere von M und L. Dann gilt

$$g(\operatorname{int}(M)) \subseteq \operatorname{int}(L) .$$

Beweis: Sei ein $x \in \operatorname{int}(M)$ gegeben. Sei T die Menge der Generalisierungen von x in $\operatorname{Spa} B$ und sei S die Menge der Generalisierungen von $g(x)$ in $\operatorname{Spa} A$. Es gilt $g(T) = S$

(siehe Beweis von (3.3.11)). Da $T \subseteq M$ und $g(M) \subseteq L$, erhalten wir $S \subseteq L$. Hieraus folgt $g(x) \in \operatorname{int}(L)$.

Ist A ein Tate-Ring, der topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen Rang 1 bewerteten Körper ist, so gilt $(A, A^{\circ})/I = (A/I, (A/I)^{\circ})$ für jedes Ideal I von A ([BGR], 6.3.4 Prop. 1). Deshalb folgt aus (3.4.6) und (3.4.9).

Korollar 3.4.12. Sei A ein vollständiger Tate-Ring, der topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen Rang 1 bewerteten Körper ist. Dann ist $Q \cap \operatorname{Max}_v A \neq \emptyset$ für jede nichtleere v-konstruierbare Teilmenge Q von $\operatorname{Spa}(A, A^{\circ})$.

Wir verbleiben in der Situation von (3.4.12). Ist Q eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^{\circ})$, so ist $Q \cap \operatorname{Max}_v A$ offen und abgeschlossen in der Teilraumtopologie von $\operatorname{Max}_v A$ (,da $\operatorname{Max}_v A \subseteq \operatorname{Spa}(A, A^{\circ})_{\min}$). Proposition (3.4.3) führt zur folgenden Frage: Ist eine v-konstruierbare Teilmenge Q von $\operatorname{Spa}(A, A^{\circ})$ mit der Eigenschaft, daß $Q \cap \operatorname{Max}_v A$ offen und abgeschlossen in der Teilraumtopologie von $\operatorname{Max}_v A$ ist, konstruierbar?

Wir wollen nun die Beziehung zwischen den analytischen Varietäten der rigid analytischen Geometrie und den hier definierten analytischen Räumen untersuchen. Dabei beziehen wir uns auf die in [BGR], 9.3.1 angegebene Definition einer analytischen Varietät.

Wir fixieren einen vollständigen topologischen Körper k, dessen Topologie sich durch eine Rang 1 Bewertung definieren läßt. Mit $\mathcal{A}$ bezeichnen wir die Kategorie der vollständigen Tate-Ringe, die topologisch von endlichem Typ über k sind; die Morphismen sind die k-Algebrenhomomorphismen. Nach [BGR], 6.1.3 Th. 1 sind die Morphismen in $\mathcal{A}$ stetige Abbildungen. Ist $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$, so bezeichnet $\operatorname{Spa}(f)$ die durch $(A, A^{\circ}) \longrightarrow (B, B^{\circ})$ induzierte Abbildung $\operatorname{Spa}(B, B^{\circ}) \longrightarrow \operatorname{Spa}(A, A^{\circ})$. Unter $\operatorname{Spa}(f)$ wird $\operatorname{Max}_v B$ nach $\operatorname{Max}_v A$ abgebildet ([BGR], 6.1.2 Cor. 3). Die Restriktion $\operatorname{Max}_v B \longrightarrow \operatorname{Max}_v A$ von $\operatorname{Spa}(f)$ wird mit $\operatorname{Max}(f)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.4.13. Sei A ein Objekt aus $\mathcal{A}$. Sei X der analytische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A°), mit Strukturgarbe $\mathcal{O}$. Sei U eine rationale Teilmenge von X. Wir wissen, daß der Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(A, A^{\circ}) \longrightarrow (\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^{+}(U))$ einen Isomorphismus zwischen dem analytischen Raum zu $(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^{+}(U))$ und dem offenen Teilraum U von X induziert. Nach (2.4.8.i) ist

$(A, A^\circ) \longrightarrow (\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U))$ topologisch von endlichem Typ. Deshalb ist $\mathcal{O}(U)$ ein Objekt von $\mathcal{A}$ und gilt nach (2.4.15) $\mathcal{O}^+(U) = \mathcal{O}(U)^\circ$.

Sei A ein Objekt von $\mathcal{A}$. Mittels der bijektiven Trägerabbildung $\operatorname{Max}_v A \longrightarrow \operatorname{Max} A$ identifizieren wir $\operatorname{Max} A$ mit $\operatorname{Max}_v A$. Die Teilraumtopologie von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ auf $\operatorname{Max} A$ stimmt überein mit der in der rigid analytischen Geometrie betrachteten Topologie auf $\operatorname{Max} A$. Für jede offene Teilmenge U von $\operatorname{Max} A$ sei $t(U)$ die größte offene Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ mit $U = t(U) \cap \operatorname{Max} A$. Es ist $t(U)$ die Vereinigung aller rationalen Teilmengen V von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ mit $V \cap \operatorname{Max} A \subseteq U$. Es gilt $t(U_1) \subseteq t(U_2)$, wenn $U_1 \subseteq U_2$, und $t(U_1 \cap U_2) = t(U_1) \cap t(U_2)$, aber im allgemeinen gilt nicht $t(U_1 \cup U_2) = t(U_1) \cup t(U_2)$. Aus (3.4.12) folgt

Beispiel 3.4.14. Ist V eine v-konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$, so daß $V \cap \operatorname{Max} A$ offen in $\operatorname{Max} A$ ist, so ist $t(V \cap \operatorname{Max} A)$ das Innere von V.

Durch $V \longmapsto V \cap \operatorname{Max} A$ erhält man eine Bijektion von der Menge der rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ auf die Menge der rationalen Teilmengen von $\operatorname{Max} A$. Die Umkehrabbildung ist $U \longmapsto t(U)$.

Zulässige offene Mengen und zulässige Überdeckungen beziehen sich im folgenden auf die starke Grothendiecktopologie von $\operatorname{Max} A$ ([BGR], 9.1.4).

Nach einem Satz von Gerritzen und Grauert besitzt jede zulässige offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$ eine zulässige Überdeckung durch rationale Teilmengen von $\operatorname{Max} A$ ([BGR], 7.3.5 Cor. 3).

Lemma 3.4.15. i) Eine offene Teilmenge U von $\operatorname{Max} A$ ist genau dann zulässig, wenn sie die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

a) Für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$ gilt $\operatorname{Spa}(f)^{-1}(t(U)) = t(\operatorname{Max}(f)^{-1}(U))$.

b) Für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$ mit $\operatorname{im}(\operatorname{Max}(f)) \subseteq U$ gilt $\operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) \subseteq t(U)$.

ii) Sind U eine zulässige offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$ und $(U_i | i \in I)$ eine Familie zulässiger offener Teilmengen von $\operatorname{Max} A$, so ist $(U_i | i \in I)$ genau dann eine zulässige Überdeckung von U, wenn gilt $t(U) = \bigcup_{i \in I} t(U_i)$.

Beweis: i) (b) ist eine Abschwächung von (a). Mit (3.4.13) folgt (a) aus (b).

Sei U eine zulässige offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$. Wir zeigen, daß (b) gilt. Dazu wählen wir eine Familie $(V_i | i \in I)$ von rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$, so daß $(V_i \cap \operatorname{Max} A | i \in I)$ eine zulässige Überdeckung von U ist. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ mit $\operatorname{im}(\operatorname{Max}(f)) \subseteq U$. Da $(\operatorname{Max}(f)^{-1}(V_i \cap \operatorname{Max} A) | i \in I)$ eine zulässige Überdeckung von $\operatorname{Max} B$ ist, gibt es eine endliche Teilmenge J von I mit $\operatorname{Max} B = \bigcup_{i \in J} \operatorname{Max}(f)^{-1}(V_i \cap \operatorname{Max} A) = \operatorname{Spa}(f)^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} V_i\right) \cap \operatorname{Max} B$. Nach (3.4.6) gilt $\operatorname{Spa}(f)^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} V_i\right) = \operatorname{Spa}(B, B^\circ)$, also $\operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i \subseteq t(U)$.

Sei nun U eine offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$, die (b) erfüllt. Wir zeigen, daß U zulässig ist. Sei $(V_i | i \in I)$ die Familie aller rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ mit $V_i \cap \operatorname{Max} A \subseteq U$. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ mit $\operatorname{im}(\operatorname{Max}(f)) \subseteq U$. Nach Voraussetzung ist dann $\operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) \subseteq t(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$. Da $\operatorname{Spa}(B, B^\circ)$ quasikompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge J von I mit $\operatorname{Spa}(B, B^\circ) = \bigcup_{i \in J} \operatorname{Spa}(f)^{-1}(V_i)$. Also gilt $\operatorname{Max} B = \bigcup_{i \in J} \operatorname{Max}(f)^{-1}(V_i \cap \operatorname{Max} A)$. Nach [BGR], 9.1.4 Prop. 2 folgt hieraus, daß U zulässig ist.

ii) Seien U eine zulässige offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$ und $(U_i | i \in I)$ eine Familie zulässiger offener Teilmengen von $\operatorname{Max} A$. Zunächst nehmen wir an, daß $(U_i | i \in I)$ eine zulässige Überdeckung von U ist und zeigen $t(U) = \bigcup_{i \in I} t(U_i)$. Sei V eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ mit $V \cap \operatorname{Max} A \subseteq U$. Zu zeigen ist $V \subseteq \bigcup_{i \in I} t(U_i)$. Nach (3.4.13) gibt es einen Morphismus $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$ mit $\operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) = V$. Es ist $(\operatorname{Max}(f)^{-1}(U_i) | i \in I)$ eine zulässige Überdeckung von $\operatorname{Max} B$. Deshalb gibt es rationale Teilmengen $W_1, \ldots, W_n$ von $\operatorname{Spa}(B, B^\circ)$, so daß $\operatorname{Max} B = \bigcup_{i=1}^{n} (W_i \cap \operatorname{Max} B)$ und es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $k(i) \in I$ gibt mit $W_i \cap \operatorname{Max} B \subseteq \operatorname{Max}(f)^{-1}(U_{k(i)})$. Die zweite Bedingung besagt, daß $W_i \subseteq t(\operatorname{Max}(f)^{-1}(U_{k(i)}))$. Aus der ersten Bedingung und (3.4.6) folgt $\operatorname{Spa}(B, B^\circ) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Also gilt $\operatorname{Spa}(B, B^\circ) = \bigcup_{i=1}^{n} t\left(\operatorname{Max}(f)^{-1}(U_{k(i)})\right)$. Da jedes U_i eine zulässige offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$ ist, gilt nach dem Punkt (b) in (i) $\operatorname{Spa}(B, B^\circ) = \operatorname{Spa}(f)^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} t(U_{k(i)})\right)$. Damit erhalten wir $V = \operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) \subseteq \bigcup_{i \in I} t(U_i)$.

Nun setzen wir voraus, daß $t(U) = \bigcup_{i \in I} t(U_i)$, und zeigen, daß $(U_i | i \in I)$ eine zulässige Überdeckung von U ist. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ mit $\operatorname{im}(\operatorname{Max}(f)) \subseteq U$. Nach (i) und der Voraussetzung $t(U) = \bigcup_{i \in I} t(U_i)$ gilt $\operatorname{Spa}(B, B^\circ) = \bigcup_{i \in I} t\left(\operatorname{Max}(f)^{-1}(U_i)\right)$. Da $\operatorname{Spa}(B, B^\circ)$ quasikompakt ist, gibt es rationale Teilmengen $W_1, \ldots, W_n$ von $\operatorname{Spa}(B, B^\circ)$, so daß $\operatorname{Spa}(B, B^\circ) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ und es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $k(i) \in I$ gibt mit $W_i \subseteq t(\operatorname{Max}(f)^{-1}(U_{k(i)}))$. Dann gilt

$\operatorname{Max} B = \bigcup_{i=1}^{n} (W_i \cap \operatorname{Max} B)$ und $W_i \cap \operatorname{Max} B \subseteq \operatorname{Max}(f)^{-1}(U_{k(i)})$. Hieraus folgt nach [BGR] 9.1.4 Prop. 2, daß $(U_i | i \in I)$ eine zulässige Überdeckung von U ist.

Beispiel 3.4.16. i) Sei V eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ oder eine offene v-konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$. Dann ist $V \cap \operatorname{Max} A$ eine zulässige offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$.

Denn: $V \cap \operatorname{Max} A$ ist offen in $\operatorname{Max} A$. Sei $f\colon A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ mit $\operatorname{im}(\operatorname{Max}(f)) \subseteq V \cap \operatorname{Max} A$. Nach (3.4.15 i) ist zu zeigen

(1) $\quad \operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) \subseteq t(V \cap \operatorname{Max} A)$.

Da $\operatorname{Max} B \subseteq \operatorname{Spa}(f)^{-1}(V)$, folgt aus (3.4.12) $\operatorname{Spa}(B, B^\circ) = \operatorname{Spa}(f)^{-1}(V)$, d.h. $\operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) \subseteq V$. Ist V offen in $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$, so ist $V \subseteq t(V \cap \operatorname{Max} A)$ und (1) ist erfüllt. Sei nun V eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$. Nach (3.4.11.ii) gilt $\operatorname{im}(\operatorname{Spa}(f)) \subseteq \operatorname{int}(V) \subseteq t(V \cap \operatorname{Max} A)$ und damit ist (1) gezeigt.

ii) Seien $L \subseteq \operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ und $L(m) \subseteq \operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ wie in (3.4.11 i). Nach (i) ist $L \cap \operatorname{Max} A$ eine zulässige offene Teilmenge von $\operatorname{Max} A$. Aus (3.4.11 i), (3.4.14) und (3.4.15 ii) folgt, daß $(L(m) \cap \operatorname{Max} A \mid m \in \mathbb{N})$ eine zulässige Überdeckung von $L \cap \operatorname{Max} A$ ist.

iii) $\operatorname{Max} A$ ist zusammenhängend (in der Grothendiecktopologie) genau dann, wenn $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ zusammenhängend ist. Speziell gilt

iv) Wir nehmen an, daß $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ zusammenhängend ist. Sei $\operatorname{Spa}(A, A^\circ) = V_1 \cup V_2$ eine Zerlegung von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ in zwei nichtleere konstruierbare Teilmengen. Wir setzen $U_1 := V_1 \cap \operatorname{Max} A$ und $U_2 := V_2 \cap \operatorname{Max} A$. Nach (i) sind U_1 und U_2 zulässige offene Teilmengen von $\operatorname{Max} A$. Natürlich ist $\operatorname{Max} A = U_1 \cup U_2$. Aber $\{U_1, U_2\}$ ist keine zulässige Überdeckung von $\operatorname{Max} A$.

Satz 3.4.17. Es gibt einen kanonischen Funktor r von der Kategorie der analytischen Varietäten über $\operatorname{Sp} k$ in die Kategorie der analytischen Räume über $\operatorname{Spa}(k, k^\circ)$, der durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt ist (bis auf Isomorphie):

(a) Ist X die analytische Varietät zu einem Ring $A \in \mathcal{A}$, so ist $r(X)$ der analytische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A°). Sind X, Y die analytischen Varietäten zu Ringen $A, B \in \mathcal{A}$ und $f : X \longrightarrow Y$ der Morphismus zu einem Ringhomomorphismus $g : B \longrightarrow A$ aus $\mathcal{A}$, so ist $r(f) : r(X) \longrightarrow r(Y)$ der Morphismus zu dem Ringhomomorphismus $g : (B, B^\circ) \longrightarrow (A, A^\circ)$.

(b) r ist treu.

(c) Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine offene Einbettung analytischer Varietäten, so ist $r(f) : r(X) \longrightarrow r(Y)$ eine offene Einbettung.

(d) Ist $(U_i | i \in I)$ eine zulässige Überdeckung einer analytischen Varietät X, so ist $\big(r(U_i) | i \in I\big)$ eine Überdeckung von $r(X)$ (dabei betrachten wir $r(U_i)$ als offene Teilmenge von $r(X)$ gemäß (c)).

Beweis: i) Zunächst zeigen wir die Existenz eines solchen Funktors r. Im folgenden werden analytische Varietäten bzw. analytische Räume meistens nur durch ihre zugrundeliegenden topologischen Räume angegeben. Seien U und V zulässige offene Teilmengen von affinoiden analytischen Varietäten $\operatorname{Sp} A$ und $\operatorname{Sp} B$. Wir versehen U und V mit der Teilraumstruktur von $\operatorname{Sp} A$ und $\operatorname{Sp} B$ und $t(U)$ und $t(V)$ mit der Teilraumstruktur von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ und $\operatorname{Spa}(B, B^\circ)$. Dann gibt es eine kanonische Abbildung $s : \operatorname{Hom}(U, V) \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(t(U), t(V)\big)$, die man folgendermaßen konstruieren kann. Sei ein Morphismus $f : U \longrightarrow V$ gegeben. Sei M die Menge aller rationalen Teilmengen W von $\operatorname{Sp} A$, so daß $W \subseteq U$ und es eine rationale Teilmenge S von $\operatorname{Sp} B$ gibt mit $f(W) \subseteq S \subseteq V$. Wir konstruieren dann zu jedem $W \in M$ einen Morphismus $f_W : t(W) \longrightarrow t(V)$, so daß $f_{W_2} | t(W_1) = f_{W_1}$, wenn $W_1 \subseteq W_2$. Da M eine zulässige Überdeckung von U ist, definieren nach (3.4.15.ii) die f_W einen Morphismus $s(f) : t(U) \longrightarrow t(V)$. Zur Konstruktion von f_W. Seien $\mathcal{O}_A$ und $\mathcal{O}_B$ die Strukturgarben von $\operatorname{Sp} A$ und $\operatorname{Sp} B$ und seien $\mathcal{O}'_A$ und $\mathcal{O}'_B$ die Strukturgarben von $\operatorname{Spa}(A, A^\circ)$ und $\operatorname{Spa}(B, B^\circ)$. Wir wählen eine rationale Teilmenge S von $\operatorname{Sp} B$ mit $f(W) \subseteq S \subseteq V$. Es gilt $\mathcal{O}_A(W) = \mathcal{O}'_A\big(t(W)\big)$ und $\mathcal{O}_B(S) = \mathcal{O}'_B\big(t(S)\big)$. Deshalb gilt nach (3.4.13) $t(W) = \operatorname{Spa}\big(\mathcal{O}_A(W), \mathcal{O}_A(W)^\circ\big)$ und $t(S) = \operatorname{Spa}\big(\mathcal{O}_B(S), \mathcal{O}_B(S)^\circ\big)$. Der Morphismus f gibt eine Abbildung $f^* : \mathcal{O}_B(S) \longrightarrow \mathcal{O}_A(W)$. Sei f'_W der Morphismus $t(W) \longrightarrow t(S)$, der durch den Ringhomomorphismus $f^* : \big(\mathcal{O}_B(S), \mathcal{O}_B(S)^\circ\big) \longrightarrow \big(\mathcal{O}_A(W), \mathcal{O}_A(W)^\circ\big)$ gegeben wird. Wir definieren f_W als die Komposition von f'_W und der offenen Einbettung $t(S) \longrightarrow t(V)$. Damit ist die Abbildung $s : \operatorname{Hom}(U, V) \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(t(U), t(V)\big)$ konstruiert.

Um zu einer analytischen Varietät X den zugehörigen analytischen Raum $r(X)$ zu definieren, betrachten wir ein Klebedatum $\big((\operatorname{Sp} A_i | i \in I), (U_{ij} | i, j \in I), (\varphi_{ij} | i, j \in I)\big)$ von X. Der Raum $r(X)$ ist definiert als der analytische Raum zu dem Klebedatum $\big((\operatorname{Spa}(A_i, A_i^\circ) | i \in I), \big(t(U_{ij}) | i, j \in I\big), \big(s(\varphi_{ij}) | i, j \in I\big)\big)$.

Es ist klar, wie der Funktor r auf den Morphismen zu definieren ist, damit (a) — (d) gelten.

ii) Sei r_0 ein Funktor von der Kategorie der analytischen Varietäten über $\operatorname{Sp} k$ in die Kategorie der analytischen Räume über $\operatorname{Spa}(k, k^\circ)$, der die Eigenschaften (a) — (d) besitzt. Wir zeigen, daß r_0 mit dem in (i) konstruierten Funktor r übereinstimmt. Seien U und V offene Teilräume von affinoiden analytischen Varietäten $\operatorname{Sp} A$ und $\operatorname{Sp} B$. Aus (a), (c), (d) und (3.4.13) folgt, daß $r_0(U)$ und $r_0(V)$

die offenen Teilräume $t(U)$ und $t(V)$ von Spa (A, A°) und Spa (B, B°) sind und daß die Abbildung Hom $(U, V) \longrightarrow$ Hom $(t(U), t(V))$, $f \longmapsto r_0(f)$ die Abbildung s aus (i) ist. Sei X eine analytische Varietät über k. Daß $r_0(X)$ mit dem Raum $r(X)$ übereinstimmt, folgt nun aus

(1) Seien X_1 und X_2 offene affinoide Untervarietäten von X. Wir betrachten $r_0(X_1)$, $r_0(X_2)$ und $r_0(X_1 \cap X_2)$ als offene Teilmengen von $r_0(X)$. Dann gilt $r_0(X_1 \cap X_2) = r_0(X_1) \cap r_0(X_2)$.

Begründung von (1): Natürlich gilt $r_0(X_1 \cap X_2) \subseteq r_0(X_1) \cap r_0(X_2)$. Angenommen, es sei $r_0(X_1 \cap X_2) \subsetneqq r_0(X_1) \cap r_0(X_2)$. Wir wählen ein $x \in r_0(X_1) \cap r_0(X_2)$ mit $x \notin r_0(X_1 \cap X_2)$. Nach (3.4.13) gibt es eine affinoide analytische Varietät Y und einen Morphismus $f_1 : Y \longrightarrow X_1$ mit $x \in \operatorname{im}(r_0(f_1)) \subseteq r_0(X_1) \cap r_0(X_2)$. Sei $f_2 : Y \longrightarrow X_2$ der Morphismus, so daß $r_0(g_1) \circ r_0(f_1) = r_0(g_2) \circ r_0(f_2)$, wobei g_1 und g_2 die Einbettungen $X_1 \longrightarrow X$ und $X_2 \longrightarrow X$ sind. Da r_0 treu ist, erhalten wir $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. Hieraus ergibt sich, daß f_1 über einen Morphismus $f : Y \longrightarrow X_1 \cap X_2$ faktorisiert. Da $x \in \operatorname{im}(r_0(f_1))$, folgt $x \in r_0(X_1 \cap X_2)$. Widerspruch. Damit ist (1) gezeigt und der Beweis von (3.4.17) beendet.

Aus der Konstruktion von r erhalten wir

Korollar 3.4.18. Der Funktor r ist volltreu.

Definition 3.4.19. Ein analytischer Raum X über Spa (k, k°) heißt geometrisch über k, wenn es eine analytische Varietät Y über Sp k gibt, so daß X Spa (k, k°)-isomorph zu $r(Y)$ ist. Eine analytischer Raum X heißt geometrisch, wenn es einen vollständigen Rang 1 bewerteten Körper k und einen Morphismus $X \rightarrow$ Spa (k, k°) gibt, so daß X geometrisch über k ist.

Sei A ein Objekt von $\mathcal{A}$. Sei M die Menge $\{t(U) | U$ zulässige offene Teilmenge von Max $A\}$. Zum Beispiel ist jede offene v-konstruierbare Teilmenge von Spa (A, A°) oder das Innere einer jeden konstruierbaren Teilmenge von Spa (A, A°) ein Element von M (nach (3.4.14) und (3.4.16.i)). Aber im allgemeinen ist nicht jede offene Teilmenge von Spa (A, A°) ein Element von M. (Beispiel: Ist s ein abgeschlossener Punkt von Spa (A, A°) mit $s \notin$ Max A, so ist Spa $(A, A^\circ) \setminus \{s\}$ kein Element von M). Vermutlich gibt es keine gute Charakterisierung für die Elemente von M und dem entsprechend auch keine gute Beschreibung für das Bild des Funktors r.

Nach (3.4.15.ii) ist eine zulässige offene Teilmenge U von Max A genau dann quasikompakt (in der starken Grothendiecktopologie von Max A), wenn $t(U)$ quasikompakt ist. Jede offene quasikompakte Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^{\circ})$ ist ein Element von M. Mit (2.4.15) erhalten wir

Korollar 3.4.20. Der Funktor r gibt per Restriktion eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der quasiseparieriert analytischen Varietäten über $\mathrm{Sp}\, k$ und der Kategorie der quasiseparieriert analytischen Räume lokal von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}(k, k^{\circ})$.

Sei X eine analytische Varietät über k. Nach Konstruktion des Funktors r kann man X kanonisch als Teilmenge von $r(X)$ auffassen. X liegt c-dicht in $r(X)$. Die Teilraumtopologie von $r(X)$ auf X ist die gegebene Topologie von X. Für eine zulässige offene Teilmenge U von X sei wieder $t(U)$ die größte offene Teilmenge von $r(X)$ mit $U = t(U) \cap X$. Betrachten wir $r(U)$ als offenen Teilraum von $r(X)$, so gilt $r(U) = t(U)$. Sind U eine zulässige offene Teilmenge von X und $(U_i | i \in I)$ eine Familie zulässiger offener Teilmengen von X, so ist $(U_i | i \in I)$ genau dann eine zulässige Überdeckung von U, wenn $t(U) = \bigcup_{i \in I} t(U_i)$.

Die Kategorie der Garben auf X ist kanonisch äquivalent zu der Kategorie der Garben auf $r(X)$. Ist nämlich $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $r(X)$, so erhält man durch $U \longmapsto \mathcal{F}(t(U))$ eine Garbe auf X. Ist umgekehrt $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so erhält man durch $V \longmapsto \varprojlim_{U} \mathcal{F}(U)$ (das projektive System erstreckt sich über alle zulässigen offenen Teilmengen U von X mit $t(U) \subseteq V$) eine Garbe auf $r(X)$. Diese beiden Funktoren sind zueinander quasiinvers ([EGA*], 0.3.2).

Unter der Korrespondenz zwischen den Garben auf X und $r(X)$ entsprechen einander die Strukturgarben. Ist $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe auf $r(X)$, so gilt $X = \{x \in r(X) |$ der Residuenkörper $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ ist endlich über $k\}$. Nach (3.3.7) haben wir eine Garbe $\mathcal{O}^{\circ}$ auf $r(X)$. Aus (3.4.13) (oder auch aus (3.4.23)) folgt $\mathcal{O}^{\circ} = \mathcal{O}^{+}$.

Aus (3.4.18), (3.4.20), (3.4.21) und (3.4.22) folgt: Ist X quasiseparariert, so gibt $U \mapsto t(U)$ eine Bijektion von der Menge der offenen affinoiden Teilmengen von X auf die Menge der offenen affinoiden Teilmengen von $r(X)$.

Proposition 3.4.21. Sei X eine analytische Varietät über k. Ist $r(X)$ ein affinoider analytischer Raum, so ist X eine affinoide analytische Varietät über k.

Beweis: Seien $f: X \longrightarrow \mathrm{Sp}\, k$ der Strukturmorphismus und $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von $r(X)$. Der Morphismus $r(f): r(X) \longrightarrow \mathrm{Spa}(k, k^{\circ})$ ist lokal von endlichem Typ. Aus (3.3.23) folgt, daß $(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}^{+}(X))$ topologisch von endlichem Typ über (k, k°) ist. Nach (2.4.15) gilt $\mathcal{O}^{+}(X) = \mathcal{O}(X)^{\circ}$. Da $r(X)$ affinoid ist, ist $r(X)$ über $\mathrm{Spa}(k, k^{\circ})$

isomorph zu $\mathrm{Spa}\big(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}^+(X)\big) = r\big(\mathrm{Sp}\,\mathcal{O}(X)\big)$. Nach (3.4.18) ist X isomorph zu $\mathrm{Sp}\,\mathcal{O}(X)$.

Lemma 3.4.22. Seien X und Y analytische Varietäten. X sei quasikompakt und Y sei quasisepariert. Ist $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus, so daß $r(f) : r(X) \longrightarrow r(Y)$ eine offene Einbettung ist, so ist f eine offene Einbettung (vgl. (3.4.17 c)).

Beweis: Wir betrachten X und Y als Teilmengen von $r(X)$ und $r(Y)$. Da X quasikompakt ist, ist $U := r(f)\big(r(X)\big)$ eine offene quasikompakte Teilmenge von $r(Y)$. Da Y quasisepariert ist, folgt hieraus, daß $V := U \cap Y$ eine zulässige offene Teilmenge von Y ist mit $t(V) = U$. Sei $g : X \longrightarrow V$ die Restriktion von f. Da $r(g) : r(X) \longrightarrow r(V) = U$ ein Isomorphismus ist und r volltreu ist, ist g ein Isomorphismus.

Lemma 3.4.23. Sei X ein affinoider analytischer Raum. Nach (3.3.7) haben wir eine Garbe $\mathcal{O}^\circ$ auf X. Ist $X_{\min}$ c-dicht in X, so gilt $\mathcal{O}^\circ = \mathcal{O}^+$.

Beweis: Nach (3.2.1) gilt $\mathcal{O}^+ \subseteq \mathcal{O}^\circ$. Seien U eine rationale Teilmenge von X und $f \in \mathcal{O}(U)^\circ$. Nach (3.1.14.ii) und (3.3.9 ii) ist $v_x(f) \geq 0$ für jedes $x \in U_{\min} = U \cap X_{\min}$. Da $X_{\min}$ c-dicht in X ist, folgt $v_x(f) \geq 0$ für jedes $x \in U$. Also ist $f \in \mathcal{O}^+(U)$.

Beispiel 3.4.24. Sei X eine quasikompakte separierte analytische Varietät über k, die steinsch ist (d.h. $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für jedes $i > 0$ und jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X). Wir betrachten den analytischen Raum $r(X)$. Sei A der topologische Ring $\mathcal{O}_{r(X)}\big(r(X)\big)$ $(= \mathcal{O}_X(X))$. A ist ein Tate-Ring, denn: Sei $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine Überdeckung von $r(X)$ durch offene affinoide Teilmengen. Als topologischer Unterring von $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{r(X)}(U_i)$ hat A eine potenzbeschränkte Nullumgebung und als Algebra über k hat A eine topologisch nilpotente Einheit.

Nach [L], 1.2 und 4.1 ist A strikt noethersch. Wir haben deshalb einen analytischen Raum Y zu dem affinoiden Ring (A, A°). Wie oben festgestellt, gilt $\mathcal{O}^\circ_{r(X)} = \mathcal{O}^+_{r(X)}$, also speziell $A^\circ = \mathcal{O}^+_{r(X)}\big(r(X)\big)$. Gemäß (3.2.9.ii) definiert die Identität $(A, A^\circ) \longrightarrow \big(\mathcal{O}_{r(X)}(r(X)), \mathcal{O}^+_{r(X)}(r(X))\big)$ einen Morphismus $f : r(X) \longrightarrow Y$.

Nach [L], 1.3 ist die kanonische Abbildung $X \longrightarrow \mathrm{Max}\,A$ bijektiv. Insbesondere ist $A/\mathfrak{m}$ endlich über k für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A. Deshalb gibt die Trägerabbildung eine Bijektion von $\mathrm{Max}_v A$ nach $\mathrm{Max}\,A$. Wir betrachten X als Teilmenge von $r(X)$. Dann gibt f einen Homöomorphismus von X nach $\mathrm{Max}_v A \subseteq Y$.

$r(X)$ ist ein spektraler Raum und f ist eine spektrale Abbildung. Deshalb ist $f\big(r(X)\big)$ eine prokonstruierbare Teilmenge von Y. Da $f(X) = \mathrm{Max}_v A$, ist $f\big(r(X)\big)$ die eindeutig bestimmte prokonstruierbare Teilmenge von Y, die $\mathrm{Max}_v A$ enthält und in der $\mathrm{Max}_v A$ c-dicht ist.

Aus [L], 2.2 und Cor. 1 zu Th. 1 folgen

(1) $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_{r(X)}$ ist ein Isomorphismus (topologischer Garben).

(2) Es gibt eine Überdeckung $\mathfrak{U}$ von Y durch rationale Teilmengen von Y, so daß $f^{-1}(U)$ eine offene affinoide Teilmenge von $r(X)$ ist für jedes $U \in \mathfrak{U}$.

Aus (1) und (2) folgt, daß für jedes $U \in \mathfrak{U}$ der Morphismus $f : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ von der Art wie in (3.3.13) ist. Insbesonder erhalten wir, daß $f : r(X) \longrightarrow f(r(X))$ ein Homöomorphismus ist. Es ist nun leicht zu sehen, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(a) f ist ein Isomorphismus

(b) f ist surjektiv

(c) $\mathcal{O}_Y^+ \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_{r(X)}^+)$ ist surjektiv

(d) $\mathcal{O}_Y^\circ = \mathcal{O}_Y^+$

(e) $\mathrm{Max}_v A$ ist c-dicht in Y

(f) $Y_{\min}$ ist c-dicht in Y

(g) X ist affinoid

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): klar. (b) $\Longrightarrow$ (e): $\mathrm{Max}_v A$ ist c-dicht in $f(r(X))$. (e) $\Longrightarrow$ (f): klar. (f) $\Longrightarrow$ (d): nach (3.4.23). (d) $\Longrightarrow$ (c): nach (1). (c) $\Longrightarrow$ (a): für jedes $U \in \mathfrak{U}$ ist der Morphismus $f : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ von der Bauart wie in (3.3.13). (g) $\Longrightarrow$ (a): klar. (a) $\Longrightarrow$ (g): nach (3.4.21).

In [L], §5 wird eine quasikompakte separierte analytische Varietät X konstruiert, die steinsch, aber nicht affinoid ist. Der Ring $A := \mathcal{O}_X(X)$ ist dann ein Beispiel für einen strikt noetherschen Tate-Ring, so daß

i) $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)_{\min}$ nicht c-dicht in $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$ ist. Insbesondere gehört A zu keiner der in (3.3.3) angegebenen Klassen von Ringen (nach (3.4.6) und (3.5.5)).

ii) für die Garbe $\mathcal{O}$ der analytischen Funktionen auf $Y = \mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$ gilt $\mathcal{O}^+ \subsetneqq \mathcal{O}^\circ$ (obwohl $\mathcal{O}^+(Y) = \mathcal{O}^\circ(Y)$).

Bemerkung 3.4.25. Seien k und A wie in (3.4.6). Sei r die Retraktion $\mathrm{Spv}\, A \longrightarrow \mathrm{Spv}\,(A, A), v \mapsto v \mid c\Gamma_v$. Da $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\,(A, A)$ und r spektral ist, ist $K := r^{-1}(\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ))$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\, A$. Es gilt

$$K = \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v(a) > 0 \quad \text{für jedes} \quad a \in A^{\circ\circ}$$
$$\text{und} \quad v(a) \geq 0 \quad \text{für jedes} \quad a \in A^{\circ}\}.$$

(3.4.12) besagt, daß jeder Punkt von $\operatorname{Spa}(A, A^{\circ})$ ein Berührungspunkt von $\operatorname{Max}_v A$ in der konstruierbaren Topologie von $\operatorname{Spv} A$ ist, oder, äquivalent dazu, daß $\operatorname{Spa}(A, A^{\circ})$ in der prokonstruierbaren Teilmenge von $\operatorname{Spv} A$, die $\operatorname{Max}_v A$ enthält und in der $\operatorname{Max}_v A$ c-dicht ist, liegt. Genauer gilt

(1) $\operatorname{Max}_v A$ ist c-dicht in K.

Ein Beweis hiervon ist in [Hu] dargestellt.

3.5. Tate-Ringe mit noetherschem Definitionsring

In diesem Abschnitt untersuchen wir einige ganz einfache Eigenschaften von Tate-Ringen, die einen noetherschen Definitionsring besitzen. Die Betrachtungen sind motiviert durch die entsprechenden Eigenschaften von Tate-Ringen, die topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen Rang 1 bewerteten Körper sind.

Sei A ein Tate-Ring. Wir setzen $A^\bullet = \{a \in A \,|\, a \cdot A^{\circ\circ} \subseteq A^{\circ\circ}\}$. Es gilt

$$A^{\circ\circ} \subseteq A^\circ \subseteq A^\bullet .$$

$A^\bullet$ ist der größte Unterring von A, der $A^{\circ\circ}$ als Ideal enthält.

Wir erinnern daran, daß gilt $\operatorname{Cont}(A)_{\min} = \{v \in \operatorname{Cont}(A) \,|\, v \text{ hat Rang } 1\}$.

Lemma 3.5.1. Für jeden Tate-Ring A gilt

i) $A^{\circ\circ} = \{a \in A \,|\, v(a) > 0 \text{ für jedes } v \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}\} = \{a \in A \,|\, v(a) > 0 \text{ für jedes } v \in \operatorname{Cont}(A)\}$.

ii) $A^\bullet = \{a \in A \,|\, v(a) \geq 0 \text{ für jedes } v \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}\}$.

Beweis: i) Die Aussage $A^{\circ\circ} \subseteq \{a \in A \,|\, v(a) > 0 \text{ für jedes } v \in \operatorname{Cont}(A)\} \subseteq \{a \in A \,|\, v(a) > 0 \text{ für jedes } v \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}\}$ ist klar. Sei nun ein $a \in A$ gegeben mit $v(a) > 0$ für jedes $v \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}$. Wir zeigen $a \in A^{\circ\circ}$. Sei s eine topologisch nilpotente Einheit von A. Es gilt

(1) Zu jedem $v \in \operatorname{Cont}(A)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot v(a) \geq v(s)$.

Denn: Angenommen, es gibt ein $v \in \operatorname{Cont}(A)$ mit $n \cdot v(a) < v(s)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei H die größte konvexe Untergruppe von Γ_v mit $v(s) \notin H$. Dann ist $v/H \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}$ und $(v/H)(a) \leq 0$. Widerspruch.

Aus (1) und der Quasikompaktheit von $\operatorname{Cont}(A)$ folgt, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $v(a^m) \geq v(s)$ für jedes $v \in \operatorname{Cont}(A)$, d.h. $v(\frac{a^m}{s}) \geq 0$ für jedes $v \in \operatorname{Cont}(A)$. Nach (3.2.6) gilt $\frac{a^m}{s} \in A^\circ$ und somit $a^m \in sA^\circ \subseteq A^{\circ\circ}$. Hieraus folgt $a \in A^{\circ\circ}$ (nach (2.1.7)).

ii) Sei a ein Element von A mit $v(a) \geq 0$ für jedes $v \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}$. Nach (i) gilt $a \cdot A^{\circ\circ} \subseteq A^{\circ\circ}$ und somit $a \in A^\bullet$. Sei nun a ein Element von A, zu dem es ein $w \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}$ gibt mit $w(a) < 0$. Zu zeigen ist $a \notin A^\bullet$. Sei s eine topologisch nilpotente Einheit von A. Da Γ_w Rang 1 hat, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot w(a) < -w(s)$, d.h. $w(a^n \cdot s) < 0$. Hieraus folgt $a^n \cdot s \notin A^{\circ\circ}$ und somit $a^n \notin A^\bullet$. Da $A^\bullet$ ein Ring ist, gilt $a \notin A^\bullet$.

Sei A ein Tate-Ring. Wir fixieren eine topologisch nilpotente Einheit s von A. Für jedes $v \in \operatorname{Cont}(A)_{\min}$ sei γ_v der ordnungstreue Gruppenhomomorphismus $\Gamma_v \longrightarrow \mathbb{R}$

mit $\gamma_v(v(s)) = 1$. Die Bewertung $\gamma_v \circ v : A \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ bezeichnen wir mit v_s. Sei $\mathcal{S}$ die Topologie von $\mathbb{R}_\infty$, die von den Mengen $\{x \in \mathbb{R}_\infty | \, x < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}_\infty | \, x > a\}$ $(a \in \mathbb{R})$ erzeugt wird.

Lemma 3.5.2. Der topologische Raum $\mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$ ist hausdorffsch und total unzusammenhängend. Sei ein $a \in A$ gegeben. Dann ist die Funktion $f : \mathrm{Cont}\,(A)_{\min} \longrightarrow (\mathbb{R}_\infty, \mathcal{S})$, $v \longmapsto v_s(a)$ stetig. Für jede offene konstruierbare Teilmenge U von $\mathrm{Cont}\,(A)$ hat $f|U \cap \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$ ein Minimum und ein Maximum.

Beweis: Für jeden spektralen Raum ist der Teilraum der minimalen Punkte hausdorffsch und total unzusammenhängend.

Sei U die Menge $\{x \in \mathbb{R}_\infty | \, x > \frac{p}{q}\}$, wobei $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $q \in \mathbb{N}$. Es ist $f^{-1}(U) = \{v \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min} | \, v(a^q) > v(s^p)\}$. Sei ein $w \in f^{-1}(U)$ gegeben. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $n \cdot w(a^q) \geq (n+1) \cdot w(s^p)$ oder $(n+1) \cdot w(a^q) \geq n \cdot w(s^p)$, je nachdem ob $p > 0$ oder $p < 0$. Dann ist $\{v \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min} | v(a^{nq}) \geq v(s^{(n+1)p})\}$ oder $\{v \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min} | \, v(a^{(n+1)q}) \geq v(s^{np})\}$ eine Umgebung von w in $\mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$, die in $f^{-1}(U)$ liegt, je nachdem ob $p > 0$ oder $p < 0$. Also ist $f^{-1}(U)$ offen. Genauso zeigt man, daß $f^{-1}(\{x \in \mathbb{R}_\infty | \, x < \frac{p}{q}\})$ offen ist. Damit ist gezeigt, daß f stetig ist.

Sei $\mathcal{T}$ die Topologie von $\mathrm{Cont}\,(A)$, die von den abgeschlossenen konstruierbaren Teilmengen von $\mathrm{Cont}\,(A)$ erzeugt wird. Nach (1.1.8) ist $\mathcal{T}$ eine spektrale Topologie. $\mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$ ist die Menge der maximalen Punkte von $(\mathrm{Cont}\,(A), \mathcal{T})$. Für jeden spektralen Raum ist die Menge der maximalen Punkte quasikompakt. Deshalb ist $(\mathrm{Cont}\,(A)_{\min}, \mathcal{T} | \, \mathrm{Cont}\,(A)_{\min})$ quasikompakt. Die Abbildung f ist stetig auch bezüglich der Topologie $\mathcal{T} | \, \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$. Deshalb ist $f(U \cap \mathrm{Cont}\,(A)_{\min})$ eine kompakte Teilmenge von $(\mathbb{R}_\infty, \mathcal{S})$ für jede offene konstruierbare Teilmenge U von $\mathrm{Cont}\,(A)$. Hieraus folgt, daß $f|U \cap \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$ ein Minimum und ein Maximum hat.

Für jedes $a \in A$ setzen wir $\nu(a) = \inf\{v_s(a) | \, v \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}\} = \min\{v_s(a) | \, v \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}\}$. Dadurch erhalten wir eine Abbildung $\nu : A \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$. Diese Abbildung ist eine Filtration von A.

Lemma 3.5.3. Es sind äquivalent

i) Die durch ν definierte Topologie von A stimmt überein mit der gegebenen Topologie von A.
ii) $A^\bullet$ ist beschränkt.
iii) A° ist beschränkt.
iv) $A^{\circ\circ}$ ist beschränkt.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $a \in A$ gilt $\nu(s^n \cdot a) = n + \nu(a)$. Nach (3.5.1.ii) gilt $\nu^{-1}([0,\infty]) = A^\bullet$. Damit erhalten wir $\nu^{-1}([n,\infty]) = s^n A^\bullet$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Also gilt: Die durch ν definierte Topologie von A ist eine Tate-Topologie mit Definitionstupel $(A^\bullet, s)$. Damit ist die Äquivalenz von (i) und (ii) gezeigt. Die Implikationen (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) sind trivial. Es ist $A^\bullet \subseteq s^{-1}A^{\circ\circ}$. Ist $A^{\circ\circ}$ beschränkt, so ist auch $s^{-1}A^{\circ\circ}$ beschränkt. Also gilt (iv) $\Longrightarrow$ (ii).

Korollar 3.5.4. Ist A reduziert und besitzt A einen Definitionsring, der ein Nagata-Ring ist (in der Notation von [M]), so definiert ν die Topologie von A.

Beweis: Sei A_0 ein Definitionsring von A, der ein Nagata-Ring ist. Sei B der ganze Abschluß von A_0 in A. Da A reduziert ist, ist B endlich über A_0. Deshalb ist B beschränkt. Es ist $A^{\circ\circ} \subseteq B$.

Besitzt A einen Definitionsring, der ein Nagata-Ring ist, so besitzt jeder Tate-Ring, der topologisch von endlichem Typ über $\hat{A}$ ist, ebenfalls einen Definitionsring, der ein Nagata-Ring ist ([M], 31.H und 41.D).

Für einen vollständigen Tate-Ring A, der topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen Rang 1 bewerteten Körper ist, gilt

(1) Ist B ein vollständiger Tate-Ring, der topologisch von endlichem Typ über A ist, so wird unter $\mathrm{Cont}(B) \longrightarrow \mathrm{Cont}(A)$ die Menge $\mathrm{Max}_v B$ nach $\mathrm{Max}_v A$ abgebildet.

(2) $\mathrm{Max}_v A$ ist c-dicht in $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$.

Sei nun A ein vollständiger Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Dann ist zwar A ein Jacobson-Ring ([EGA], IV.10.5.8) (d.h. ist B eine endlich erzeugte A-Algebra, so wird unter $\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ die Menge $\mathrm{Max}\, B$ nach $\mathrm{Max}\, A$ abgebildet oder, äquivalent dazu, $\mathrm{Max}\, A$ ist c-dicht in $\mathrm{Spec}\, A$), aber (1) und (2) gelten im allgemeinen nicht. Wir werden später ein Gegenbeispiel zu (1) und (2) angeben.

Für einen Tate-Ring A, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, definieren wir

$$\mathrm{Cont}(A)_d = \{v \in \mathrm{Cont}(A) \mid v \text{ ist diskret vom Rang } 1\}.$$

Nach (2.2.10) gilt $\mathrm{Max}_v A \subseteq \mathrm{Cont}(A)_d$. Wir haben also

$$\mathrm{Max}_v A \subseteq \mathrm{Cont}(A)_d \subseteq \mathrm{Cont}(A)_{\min} = \mathrm{Spa}(A, A^\circ)_{\min}.$$

Im allgemeinen ist $\mathrm{Cont}(A)_d$ wesentlich größer als $\mathrm{Max}_v A$, da, wenn A vollständig ist, es zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von A ein $v \in \mathrm{Cont}(A)_d$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{supp}(v)$ gibt ((3.6.11)).

Es ist leicht zu sehen, daß für einen vollständigen Tate-Ring A, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, die obigen Punkte (1) und (2) richtig sind, wenn man $\mathrm{Cont}(\ )_d$ statt Max_v setzt. (1) ist trivial, (2) zeigen wir in der folgenden Proposition.

Proposition 3.5.5. Sei A ein Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Dann ist $\mathrm{Cont}(A)_d$ c-dicht in $\mathrm{Spa}(A, A^{\circ})$. Es gilt sogar: Ist Q eine nichtleere v-konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^{\circ})$, so ist $Q \cap \mathrm{Cont}(A)_d \neq \emptyset$.

Wir sehen mit (3.4.5), daß $\mathrm{Spa}(A, A^{\circ})$ die eindeutig bestimmte prokonstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Cont}(A)$ ist, die $\mathrm{Cont}(A)_d$ enthält und in der $\mathrm{Cont}(A)_d$ c-dicht ist. Nach (3.4.9) (und (2.4.16)) ist die zweite Aussage von (3.5.5) nicht stärker als die erste Aussage von (3.5.5).

Beweis von (3.5.5): Sei Q eine konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\, A$ mit $Q \cap \mathrm{Spa}(A, A^{\circ}) \neq \emptyset$. Wir zeigen $Q \cap \mathrm{Cont}(A)_d \neq \emptyset$. Dazu wählen wir einen noetherschen Definitionsring B von A, eine topologisch nilpotente Einheit s von A mit $s \in B$ und ein $v \in Q \cap \mathrm{Spa}(A, A^{\circ})$. Es gilt $v(b) \geq 0$ für jedes $b \in B$ und $v(s) > 0$. Nach dem nachfolgenden Lemma (3.5.6) gibt es eine diskrete Rang 1 Bewertung w von A mit $w \in Q$, $w(s) > 0$ und $w(b) \geq 0$ für jedes $b \in B$. Es ist dann $w \in Q \cap \mathrm{Cont}(A)_d$.

Lemma 3.5.6 Seien A ein Ring, B ein noetherscher Unterring von A, so daß für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A der Körper $\mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$ endlich erzeugt über dem Körper $\mathrm{Quot}(B/\mathfrak{p} \cap B)$ ist, und Q eine konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spv}\, A$. Es gebe eine nichttriviale Bewertung v von A mit $v \in Q$ und $v(b) \geq 0$ für jedes $b \in B$. Dann gibt es eine diskrete Rang 1 Bewertung w von A mit $\mathrm{supp}(w) = \mathrm{supp}(v)$, $w \in Q$ und $w(b) \geq 0$ für jedes $b \in B$.

Beweis: Wir können annehmen, daß Q die Gestalt hat $\{u \in \mathrm{Spv}\, A \mid u(f_1) \geq u(g_1), \ldots, u(f_n) \geq u(g_n), u(r_1) > u(s_1), \ldots, u(r_m) > u(s_m)\}$. Aufgrund der Voraussetzung, daß v nicht trivial ist, können wir annehmen $v(r_1) \neq \infty$. Weiterhin können wir annehmen, daß $v(g_i) \neq \infty$ für $i = 1, \ldots, \ell$ und $v(g_i) = \infty$ für $i = \ell + 1, \ldots, n$. Sei $\mathfrak{p}$ der Träger von v. Mit φ bezeichnen wir die Abbildung $A \longrightarrow \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$. In $\mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$ betrachten wir den Unterring C, der von $\varphi(B)$, $\frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)}, \ldots, \frac{\varphi(f_\ell)}{\varphi(g_\ell)}$, $\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(s_1)}, \ldots, \frac{\varphi(r_m)}{\varphi(s_m)}$ erzeugt wird. Der Bewertungsring $A(v)$ von $\mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$ enthält C. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $A(v)$. Da $v(r_1) \neq \infty$, ist $\mathfrak{m} \cap C$ nicht das Nullideal. Nach [EGA*], 0.6.5.8 gibt es einen diskreten Rang 1 Bewertungsring D von $\mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$, der $C_{\mathfrak{m} \cap C}$ dominiert. Sei w die Bewertung von A mit $\mathrm{supp}(w) = \mathfrak{p}$ und $A(w) = D$.

Korollar 3.5.7. Ist A ein Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, so hat jede nichtleere konstruierbare Teilmenge Q von $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$ ein nichtleeres Inneres.

Beweis: Nach (3.5.5) enthält Q einen minimalen Punkt von $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$.

Korollar 3.5.8. Für einen Tate-Ring A, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, gilt $A^\bullet = A^\circ$.

Beweis: Sei ein $a \in A^\bullet$ gegeben. Angenommen, es sei $a \notin A^\circ$. Nach (3.2.6) gibt es ein $v \in \mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$ mit $v(a) < 0$. Dann gibt es nach (3.5.5) ein $w \in \mathrm{Cont}\,(A)_{\min}$ mit $w(a) < 0$. Widerspruch zu (3.5.1.ii).

Proposition 3.5.9. Sei A ein Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Für die Garbe $\mathcal{O}$ der analytischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$ gilt $\mathcal{O}^\circ = \mathcal{O}^+$.

Beweis: Nach (2.4.3) können wir annehmen, daß A vollständig ist. Sei U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}\,(A, A^\circ)$. Nach (2.4.8.i) ist der Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(A, A^\circ) \longrightarrow \big(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U)\big)$ topologisch von endlichem Typ. Aus (2.4.17) folgt $\mathcal{O}^+(U) = \mathcal{O}(U)^\circ$. (N.B. (3.5.9) folgt auch aus (3.4.23) und (3.5.5).)

Beispiel 3.5.10. i) Sei k ein topologischer Körper, dessen Topologie sich durch eine diskrete Rang 1 Bewertung $\alpha : k \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$ definieren läßt. Sei A der topologische Ring $k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$. Die Topologie von A wird gegeben durch die Bewertung $w : A \longrightarrow \mathbb{Z}_\infty$, $\sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} a_\nu X^\nu \longmapsto \min\big\{\alpha(a_\nu) \,|\, \nu \in \mathbb{N}_0^n\big\}$. Der Ring $A^\circ = \big\{a \in A \,|\, w(a) \geq 0\big\} = k^\circ[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ ist ein noetherscher Definitionsring des Tate-Rings A. Sei Y der analytische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A°). In Y betrachten wir die abgeschlossene konstruierbare Teilmenge $S = \big\{v \in Y \,|\, v(X_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n\big\}$. Mit $\mathrm{int}\,(S)$ bezeichnen wir das Innere von S.

Sei B der topologische Ring $k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$. Die Inklusion $(B, B^\circ) \longrightarrow (A, A^\circ)$ induziert einen analytischen Morphismus $f : Y \longrightarrow E_k^n = \mathrm{Spa}\,(B, B^\circ)$. Sei T die abgeschlossene konstruierbare Teilmenge $\big\{v \in E_k^n \,|\, v(X_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n\big\}$ von E_k^n. Mit G bezeichnen wir die Menge aller Genealisierungen aller Punkte von T und mit $\mathrm{int}\,(T)$ das Innere von T.

Es ist $f^{-1}(T) = S$. Nach (3.4.11.ii) gilt dann $f^{-1}\big(\mathrm{int}\,(T)\big) = \mathrm{int}\,(S)$. Wir zeigen

a) Jeder Punkt von Y spezialisiert in einen Punkt von S. Deshalb gilt $f^{-1}(G) = Y$.

b) f gibt per Restriktion einen analytischen Isomorphismus $\mathrm{int}\,(S) \longrightarrow \mathrm{int}\,(T)$.

Beweis: a) Sei ein $v \in \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ gegeben. Sei φ die kanonische Abbildung $A \longrightarrow \mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(v))$. Seien $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal des Bewertungsrings $A(v)$ von $\mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(v))$ und $\psi : A(v) \longrightarrow A(v)/\mathfrak{m}$ die kanonische Abbildung. Es ist $\varphi(A^\circ) \subseteq A(v)$. Deshalb haben wir den Unterring $D = \psi(\varphi(A^\circ))$ von $A(v)/\mathfrak{m}$. Da A° ein lokaler Ring ist und die Elemente $X_1, \ldots, X_n$ in dem maximalen Ideal von A° liegen, ist auch D ein lokaler Ring und liegt $\psi(\varphi(X_i))$ im maximalen Ideal von D für $i = 1, \ldots, n$. Sei E ein Bewertungsring von $A(v)/\mathfrak{m}$, der D dominiert. Sei w die Bewertung vom A mit $\mathrm{supp}\,(w) = \mathrm{supp}\,(v)$ und $A(w) = \psi^{-1}(E)$. Dann ist w ein Element von S und eine Spezialisierung von v.

b) Sei s eine topologisch nilpotente Einheit von k. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $S_m = \{v \in Y \,|\, v(X_i^m) \geq v(s)$ für $i = 1, \ldots, n\}$ und $T_m = \{v \in E_k^n \,|\, v(X_i^m) \geq v(s)$ für $i = 1, \ldots, n\}$. S_m und T_m sind rationale Teilmengen von Y und E_k^n mit $f^{-1}(T_m) = S_m$. Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{A}$ die Strukturgarben von Y und E_k^n. Man rechnet direkt nach, daß $(\mathcal{A}(T_m), \mathcal{A}^+(T_m)) \longrightarrow (\mathcal{O}(S_m), \mathcal{O}^+(S_m))$ ein Isomorphismus ist für jedes $m \in \mathbb{N}$. Also gibt f per Restriktion einen Isomorphismus $S_m \longrightarrow T_m$. Nach (3.4.11.i) gilt $\mathrm{int}\,(S) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m$ und $\mathrm{int}\,(T) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} T_m$. Hieraus folgt die Behauptung.

ii) Wir verbleiben in der Situation von (i). Sei nun aber $n = 1$. Die rationale Teilmenge $Y \setminus S = \{v \in Y \,|\, 0 \geq v(X)\}$ von Y bezeichnen wir mit U. Sei $\bar{U}$ der Abschluß von U in Y, also $\bar{U} = Y \setminus \mathrm{int}\,(S)$. Sei $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von Y. Es gilt

a) $U = \{w\}$ und $\mathcal{O}(U)$ ist die Vervollständigung des Körpers $\mathrm{Quot}\,(A)$ nach der durch w induzierten Bewertung von $\mathrm{Quot}\,(A)$.

b) $|\bar{U}| = 2$

c) f induziert einen Homöomorphismus $Y \longrightarrow G$.

Beweis: a) Sei s ein Element von k°, das das maximale Ideal von k° erzeugt. Wir betrachten den affinoiden Ring $(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U))$. Es gilt $(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U)) = (A, A^\circ)\langle\frac{1}{X}\rangle = (A\langle\frac{1}{X}\rangle, A^\circ\langle\frac{1}{X}\rangle^c)$. Weiterhin ist $(A^\circ\langle\frac{1}{X}\rangle, s)$ ein Definitionstupel des Tate-Rings $A\langle\frac{1}{X}\rangle$. Somit folgt (a) aus

(1) $A^\circ\langle\frac{1}{X}\rangle$ ist die Vervollständigung des diskreten Bewertungsrings $A(w)$ (von $\mathrm{Quot}\,(A)$) nach der Bewertungstopologie von $A(w)$.

Beweis von (1): Die Topologie auf A° ist die sA°-adische Topologie. Deshalb ist $A^\circ\langle\frac{1}{X}\rangle$ die Vervollständigung von $(A^\circ)_X$ nach der $s \cdot (A^\circ)_X$-adischen Topologie. Das Ideal $s \cdot (A^\circ)_X$ von $(A^\circ)_X$ ist maximal, denn $(A^\circ)_X/s \cdot (A^\circ)_X = (A^\circ/sA^\circ)_X = (k^\circ/sk^\circ)[\![X]\!]_X$ ist ein Körper. Damit erhalten wir

$A^\circ\langle\frac{1}{X}\rangle$ = Vervollständigung von $D := (A^\circ)_X$ nach dem maximalen Ideal $\mathfrak{p} := s \cdot (A^\circ)_X$.
$\cong$ Vervollständigung des lokalen Rings $D_\mathfrak{p} = (A^\circ)_{sA^\circ}$ nach seinem maximalen Ideal.

Es ist $(A^\circ)_{sA^\circ}$ der Bewertungsring $A(w)$ von Quot(A). Damit ist (1) gezeigt.

b) Seien $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{Quot}(A)$ und $\psi : A(w) \longrightarrow A(w)/\mathfrak{m}$ die kanonischen Abbildungen, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $A(w)$ ist. Die Spezialisierungen von w in Y entsprechen eineindeutig den Bewertungsringen des Körpers $A(w)/\mathfrak{m}$, die $\psi(\varphi(A^\circ))$ enthalten. Da $A(w) = (A^\circ)_{sA^\circ}$, gilt $A(w)/\mathfrak{m} = \mathrm{Quot}(A^\circ/sA^\circ) = \mathrm{Quot}\big((k^\circ/sk^\circ)[\![X]\!]\big)$ und $\psi(\varphi(A^\circ)) = (k^\circ/sk^\circ)[\![X]\!]$. Also gibt es genau zwei Bewertungsringe von $A(w)/\mathfrak{m}$, die $\psi(\varphi(A^\circ))$ umfassen. Damit ist (b) gezeigt.

c) Wir setzen $V = G\setminus T$. Sei $\bar{V}$ der Abschluß von V in G. Dann gilt $\bar{V} = G\setminus \mathrm{int}(T)$. Aus (1.2.4) folgt

(2) $|V| = 1$ und $|\bar{V}| = 2$.

Die Restriktion $\mathrm{int}(S) \longrightarrow \mathrm{int}(T)$ von f ist bijektiv. Weiterhin gilt $f^{-1}(\mathrm{int}(T)) = \mathrm{int}(S)$, $f^{-1}(T) = S$, $f^{-1}(G) = Y$. Aus (a), (b) und (2) folgt $|S\setminus \mathrm{int}(S)| = 1$, $|Y\setminus S| = 1$, $|T\setminus \mathrm{int}(T)| = 1$, $|G\setminus T| = 1$. Hieraus ergibt sich , daß $f : Y \longrightarrow G$ bijektiv ist. Nach (3.3.20) ist $f\colon Y \to G$ ein Homöomorphismus.

Mit (ii.a) erhalten wir das angekündigte Gegenbeispiel. Die Abbildung $g : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ ist topologisch von endlichem Typ (nach (2.3.23)), aber unter Cont(g) wird $\mathrm{Max}_v\mathcal{O}(U)$ nicht nach $\mathrm{Max}_v\mathcal{O}(Y)$ abgebildet. Es ist $U \cap \mathrm{Max}_v\mathcal{O}(Y) = \emptyset$.

Bemerkung 3.5.11. Sei A ein vollständiger Tate-Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der analytischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Für jede rationale Teilmenge U von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ betrachten wir $\mathrm{Max}_v\mathcal{O}(U)$ als Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ via $\mathrm{Max}_v\mathcal{O}(U) \subseteq \mathrm{Spa}(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U)) = U \subseteq \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Wir setzen

$$M := \bigcup_U \mathrm{Max}_v\mathcal{O}(U),$$

wobei U alle rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ durchläuft. Dann gilt

$$M \subseteq \mathrm{Cont}(A)_d.$$

Nach (3.5.5) ist $\mathrm{Cont}(A)_d$ c-dicht in $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Es gilt sogar stärker

(1) M ist c-dicht in $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$.

Begründung: Sei Q eine nichtleere konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Nach (3.5.7) enthält Q eine nichtleere rationale Teilmenge U. Da $\mathcal{O}(U) \neq 0$, ist $\mathrm{Max}_v \mathcal{O}(U) \neq \emptyset$ und deshalb $Q \cap M \neq \emptyset$.

Mit (3.4.9) kann man (1) verschärfen zu

(2) Ist Q eine nichtleere v-konstruierbare Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$, so ist $Q \cap M \neq \emptyset$.

Ist A topologisch von endlichem Typ über einem vollständigen topologischen Körper, dessen Topologie durch eine diskrete Rang 1 Bewertung gegeben ist, so gilt $M = \mathrm{Max}_v A$ und deshalb ist nach (1) $\mathrm{Max}_v A$ c-dicht in $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Dies ist ein zweiter Beweis von (3.4.6) für den Fall, daß die Topologie von k durch eine diskrete Bewertung definiert ist.

3.6. Adische Räume

Unter einem Definitionsring eines affinoiden Rings A verstehen wir einen Definitionsring des f-adischen Rings $\tilde{A}$. In (3.3) haben wir gesehen, daß die Prägarbe der adischen Funktionen auf $\operatorname{Spa} A$ eine Garbe ist, wenn A ein tatescher affinoider Ring ist, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß dies richtig ist auch ohne die Voraussetzung, daß A tatesch ist.

Satz 3.6.1. Sei A ein affinoider Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Dann ist die Prägarbe $\mathcal{O}$ der adischen Funktionen auf $\operatorname{Spa} A$ eine Garbe mit Werten in der Kategorie der vollständigen nat-Ringe und $H^i(\operatorname{Spa} A, \mathcal{O}) = 0$ für jedes $i > 0$.

Wir werden (3.6.1) gleich etwas allgemeiner für eine gewisse Klasse von Prägarben auf $\operatorname{Spa} A$ beweisen. Seien A ein affinoider Ring und $\mathcal{O}$ die Prägarbe der adischen Funktionen auf $\operatorname{Spa} A$. Wir definieren zu jedem endlich erzeugten $\tilde{A}$-Modul M eine Prägarbe auf $\operatorname{Spa} A$. Dazu sei $\mathcal{F}(U) := M \otimes_{\tilde{A}} \mathcal{O}(U)$ für jede rationale Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$. Wir versehen den $\mathcal{O}(U)$-Modul $\mathcal{F}(U)$ mit der f-adischen Topologie (bezüglich $\mathcal{O}(U)$). Dann ist für jedes Paar von rationalen Teilmengen U, V von $\operatorname{Spa} A$ mit $U \subseteq V$ die kanonische Abbildung $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ stetig. Für eine offene Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A$ betrachten wir in der Kategorie der abelschen vollständigen topologischen Gruppen den projektiven Limes $\mathcal{F}(U) = \varprojlim_{V} \mathcal{F}(V)$, wobei V alle rationalen Teilmengen von $\operatorname{Spa} A$ durchläuft, die in U enthalten sind. Auf diese Weise erhalten wir eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf $\operatorname{Spa} A$ mit Werten in der Kategorie der abelschen vollständigen topologischen Gruppen. $\mathcal{F}$ ist eine $\mathcal{O}$-Modulprägarbe. Wir bezeichnen sie mit $M \otimes \mathcal{O}$.

Satz 3.6.2. Sei A ein affinoider Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Sei $\mathcal{O}$ die Prägarbe der adischen Funktionen auf $\operatorname{Spa} A$. Dann ist für jeden endlich erzeugten $\tilde{A}$-Modul M die Prägarbe $M \otimes \mathcal{O}$ eine Garbe auf $\operatorname{Spa} A$ mit Werten in der Kategorie abelschen vollständigen topologischen Gruppen und $H^i(\operatorname{Spa} A, M \otimes \mathcal{O}) = 0$ für jedes $i > 0$.

Zum Beweis von (3.6.2) benutzen wir eine Idee von Raynaud aus der Arbeit [R], in der er rationale Überdeckungen affinoider analytischer Varietäten mit Aufblasungen in Verbindung bringt.

Zunächst beschreiben wir die „Aufblasungen", die bei uns hier eine Rolle spielen. Seien $\varphi : B \to A$ ein Ringhomomorphismus und J ein B-Untermodul von A. Sei I das von J erzeugte Ideal von A. Im Gegensatz zur Definition in (2.1) setzen wir hier $J^0 = \varphi(B)$ und $I^0 = A$. Die direkten Summen $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} J^n$ und $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} I^n$ sind auf kanonische Weise graduierte Ringe. Die Inklusion $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} J^n \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} I^n$ definiert einen Morphismus von Schemata s: $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} I^n) \to \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} J^n)$. Wir haben das kommutative Diagramm

(1)
$$\begin{array}{ccc} X := \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} I^n) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\, A \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow \\ Y := \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} J^n) & \xrightarrow[g]{} & \mathrm{Spec}\, B \end{array}$$

Einfache Rechnungen mit graduierten Ringen ergeben

(2) i) Der Morphismus s ist affin. Sei F ein Erzeugendensystem des B-Moduls J. Seien S eine nichtleere endliche Teilmenge von F und $t \in J^{|S|}$ das Produkt der Elemente von S. Sei U die affine offene Teilmenge $D_+(t)$ von Y. Man kann die Ringe $\mathcal{O}_X(s^{-1}(U))$ und $\mathcal{O}_Y(U)$ als Unterringe von A_t auffassen und es gilt dann $\mathcal{O}_X(s^{-1}(U)) = A[\frac{f}{s} \mid f \in F, s \in S]$ und $\mathcal{O}_Y(U) = B[\frac{f}{s} \mid f \in F, s \in S]$.

ii) Sei H ein Ideal von B, so daß $\mathrm{Spec}\,(\varphi)\colon \mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Spec}\, B$ einen Isomorphismus von $\mathrm{Spec}\, A \setminus V(H\cdot A)$ nach $\mathrm{Spec}\, B \setminus V(H)$ induziert und $V(I) \subseteq V(H\cdot A)$. Dann induziert g einen Isomorphismus von $Y \setminus g^{-1}(V(H))$ nach $\mathrm{Spec}\, B \setminus V(H)$.

Seien A ein f-adischer Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, A^+ ein Ganzheitsring von A und M ein endlich erzeugter A-Modul. Sei $\mathcal{O}$ die Prägarbe der adischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}\,(A, A^+)$. Der wesentliche Schritt im Beweis von (3.6.2) ist der folgende Punkt.

(3) Seien $f_0, \ldots, f_n$ Elemente von A mit $A = (f_0, \ldots, f_n)$. Für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ sei U_i die rationale Teilmenge $R(\frac{f_0,\ldots,f_n}{f_i})$ von $Z := \mathrm{Spa}\,(A, A^+)$. Dann ist der augmentierte Cech-Komplex von $M \otimes \mathcal{O}$ zu der Überdeckung $\{U_0, \ldots, U_n\}$ von Z

$$(*) \quad 0 \to (M \otimes \mathcal{O})(Z) \to \prod_{i_0} (M \otimes \mathcal{O})(U_{i_0}) \to \prod_{i_0,i_1} (M \otimes \mathcal{O})(U_{i_0} \cap U_{i_1}) \to \ldots$$

exakt. Den $\mathcal{O}(Z)$-Modul $(M \otimes \mathcal{O})(Z)$ versehen wir mit der f-adischen Topologie (bezüglich $\mathcal{O}(Z)$), ebenso versehen wir die $\mathcal{O}(U_i)$-Moduln $(M \otimes \mathcal{O})(U_i)$ mit der f-adischen Topologie (bezüglich $\mathcal{O}(U_i)$). Auf den Komponenten des Komplexes $(*)$

betrachten wir die Produkttopologie. Dann ist jedes Differential des Komplexes $(*)$ strikt.

Beweis: Sei $\tilde{M}$ die durch M definierte quasikohärente Garbe auf $\operatorname{Spec} A$. Wir betrachten den augmentierten Cech-Komplex von $\tilde{M}$ zu der Überdeckung $\{D(f_0), \ldots, D(f_n)\}$ von $X := \operatorname{Spec} A$

$$(**) \qquad 0 \to \tilde{M}(X) \to \prod_{i_0} \tilde{M}(D(f_{i_0})) \to \prod_{i_0, i_1} \tilde{M}(D(f_{i_0}) \cap D(f_{i_1})) \to \ldots$$

Sei F die Menge $\{f_0, \ldots, f_n\}$. Nach (2.3.15) ist $A(\frac{F}{f_{i_0}}, \ldots, \frac{F}{f_{i_k}})$ die Lokalisation von A nach $f_{i_0} \cdot \ldots \cdot f_{i_k}$. Auf dem Modul $\tilde{M}(D(f_{i_0}) \cap \ldots \cap D(f_{i_k})) = M \otimes_A A(\frac{F}{f_{i_0}}, \ldots, \frac{F}{f_{i_k}})$ betrachten wir die f-adische Topologie bezüglich $A(\frac{F}{f_{i_0}}, \ldots, \frac{F}{f_{i_k}})$.

Den Modul $\tilde{M}(X) = M$ versehen wir mit der f-adischen Topologie (bezüglich A) und die anderen Komponenten des Komplexes $(**)$ versehen wir mit der Produkttopologie. Dann sind die Differentiale des Komplexes $(**)$ stetig. Angenommen, wir wissen

(4) Die Differentiale des Komplexes $(**)$ sind strikt.

Dann sind wir mit dem Beweis von (3) fertig, denn: Sei $(**)^\wedge$ der Komplex, der aus dem Komplex $(**)$ durch Vervollständigung entsteht. Da der Komplex $(**)$ exakt ist, folgt aus (4) und [B], III.2.12 Lemma 2, daß der Komplex $(**)^\wedge$ exakt ist und strikte Differentiale hat. Nach (2.3.33 iv) gilt $(*) = (**)^\wedge$.

Wir zeigen also (4). Seien B ein noetherscher Definitionsring von A und N ein endlich erzeugter B-Untermodul von M, der den A-Modul M erzeugt. Sei J der von F erzeugte B-Untermodul von A. Da J in A das Einheitsideal erzeugt, erhalten wir aus (1) das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X = \operatorname{Spec} A \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "h"] \\ Y := \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n) \arrow[r, "g"'] & \operatorname{Spec} B \end{tikzcd}$$

Sei $\tilde{N}$ die durch N gegebene kohärente Garbe auf $\operatorname{Spec} B$. Die Inklusion $N \hookrightarrow M$ definiert einen h-Garbenmorphismus $\tilde{N} \to \tilde{M}$. Dieser induziert einen s-Garbenmorphismus $g^*(\tilde{N}) \to \tilde{M}$. d. h. einen Garbenmorphismus $\sigma: g^*(\tilde{N}) \to s_*(\tilde{M})$. Mit $\mathcal{G}$ bezeichnen wir das Bild von σ und mit ψ die Inklusion $\mathcal{G} \to s_*(\tilde{M})$. Da $g^*(\tilde{N})$ kohärent und $s_*(\tilde{M})$ quasikohärent ist, ist $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf Y.

Sei $\mathfrak{m}$ ein Definitionsideal von B. Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ sei $K_\ell^\cdot$ der augmentierte Cech-Komplex zu der Garbe $\mathfrak{m}^\ell \mathcal{G}$ und der Überdeckung $\{D_+(f_0), \ldots, D_+(f_n)\}$ von Y (also

$K_\ell^{-1} = (\mathfrak{m}^\ell \mathcal{G})(Y))$. Es ist $(K_\ell^\cdot)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Komplexen, $K_\ell^\cdot \supseteq K_{\ell+1}^\cdot$. Seien $d_\ell^p\colon K_\ell^p \to K_\ell^{p+1}$ die Differentiale des Komplexes $K_\ell^\cdot$. Nach Konstruktion des Komplexes $K_\ell^\cdot$ ist $H^p(K_\ell^\cdot) = H^p(Y, \mathfrak{m}^\ell\mathcal{G})$ für jedes $p > 0$.

Es gilt

(5) Zu jedem $p \in \mathbb{Z}$ und jedem $u \in \mathbb{N}$ gibt es ein $v \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{im}(d_u^p) \supseteq \ker(d_v^{p+1})$.

Beweis: Für $p < 0$ ist die Behauptung klar. Wir fixieren ein $p \geq 0$. Nach [EGA], III.3.3.2 gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

(6) $H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^{u+r}\mathcal{G}) = \mathfrak{m}^r \odot H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^u\mathcal{G})$ für jedes $u \geq k$ und jedes $r \geq 0$.

Dabei bezeichnet für ein $x \in \mathfrak{m}^r$ und ein $y \in H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^u\mathcal{G})$ das Produkt $x \odot y$ das Bild von y unter der Kohomologieabbildung $H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^u\mathcal{G}) \to H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^{u+r}\mathcal{G})$, die durch die x-Multiplikation $\mathfrak{m}^u\mathcal{G} \to \mathfrak{m}^{u+r}\mathcal{G}$ induziert wird.

Es genügt, (5) für $u \geq k$ zu zeigen. Wir fixieren ein $u \geq k$. Nach (3.1.11) und dem Punkt (ii) in (2) ist $g\colon Y \setminus g^{-1}(V(\mathfrak{m})) \to \operatorname{Spec} B \setminus V(\mathfrak{m})$ ein Isomorphismus. Deshalb ist $H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^u\mathcal{G})^\sim \mid \operatorname{Spec} B \setminus V(\mathfrak{m}) = R^{p+1}g_*(\mathfrak{m}^u\mathcal{G}) \mid \operatorname{Spec} B \setminus V(\mathfrak{m}) = 0$. Da $H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^u\mathcal{G})$ ein endlich erzeugter B-Modul ist, gibt es somit nach [EGA*], I.6.8.4 ein $t \in \mathbb{N}$ mit

(7) $\mathfrak{m}^t H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^u\mathcal{G}) = 0$

Wir zeigen $\operatorname{im}(d_u^p) \supseteq \ker(d_{u+t}^{p+1})$. Sei dazu ein $a \in \ker(d_{u+t}^{p+1})$ gegeben. Nach (6) gibt es $x_1, \ldots, x_w \in \mathfrak{m}^t$ und $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_w \in H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^u\mathcal{G})$ mit $\bar{a} = x_1 \odot \bar{y}_1 + \ldots + x_u \odot \bar{y}_w$, wobei $\bar{a}$ das durch a gegebene Element von $H^{p+1}(Y, \mathfrak{m}^{u+t}\mathcal{G})$ ist. Seien $y_1, \ldots, y_w$ Elemente von $\ker(d_u^{p+1})$, die die Kohomologieklassen $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_w$ repräsentieren. Dann ist $a - (x_1y_1 + \ldots + x_wy_w) \in \operatorname{im}(d_{u+t}^p) \subseteq \operatorname{im}(d_u^p)$. Nach (7) gilt $x_iy_i \in \operatorname{im}(d_u^p)$ für $i = 1, \ldots, w$. Deshalb ist $a \in \operatorname{im}(d_u^p)$. Damit ist (5) gezeigt.

Sei $K^\cdot$ der Komplex (**) (mit $K^{-1} = \tilde{M}(X)$). Es ist $s^{-1}(D_+(f_i)) = D(f_i)$ für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$. Deshalb induziert der injektive Garbenmorphismus $\psi\colon \mathcal{G} \to s_*(\tilde{M})$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ einen injektiven Komplexmorphismus $\psi_\ell = (\psi_\ell^p)_{p\in\mathbb{Z}}\colon K_\ell^\cdot \to K^\cdot$.

Es gilt

(8) Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ ist $\{\psi_\ell^p(K_\ell^p) \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von K^p.

Beweis: Sei zunächst $p \geq 0$. Sei $S = \{f_{i_0}, \ldots, f_{i_k}\}$ eine nichtleere Teilmenge von F. Nach (2.3.15) ist $B\left[\frac{f}{s} \mid s \in S, f \in F\right]$ ein Definitionsring von $A\left(\frac{F}{s} \mid s \in S\right)$ und $\mathfrak{n} := \mathfrak{m} \cdot B\left[\frac{f}{s} \mid s \in S, f \in F\right]$ ein Definitionsideal von $B\left[\frac{f}{s} \mid s \in S, f \in F\right]$. Sei G das Bild von $N \otimes_B B\left[\frac{f}{s} \mid s \in S, f \in F\right]$ in $M \otimes_A A\left(\frac{F}{s} \mid s \in S\right) = \tilde{M}\left(\bigcap_{s\in S} D(s)\right)$. Dann ist

$\{\mathfrak{n}^\ell G \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von $\tilde{M}(\bigcap_{s\in S} D(s))$.Nach dem Punkt (i) in (2) ist $\mathcal{O}_Y(\bigcap_{s\in S} D_+(s)) = \mathcal{O}_Y(D_+(\prod_{s\in S} s)) = B[\frac{f}{s} \mid s \in S, f \in F]$. Deshalb folgt (8) unmittelbar aus der Konstruktion der Garbe $\mathcal{G}$.

Sei nun $p = -1$. Direkt aus der Konstruktion von $\mathcal{G}$ folgt $\mathfrak{m}^\ell N \subseteq \psi((\mathfrak{m}^\ell\mathcal{G})(Y))$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Sei ein $i \in \mathbb{N}$ fixiert. Zu zeigen ist, daß es ein $\ell \in \mathbb{N}$ gibt mit $\psi((\mathfrak{m}^\ell\mathcal{G})(Y)) \subseteq \mathfrak{m}^i N$. Nach [EGA], III.3.3.2 gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt $H^0(Y, \mathfrak{m}^{k+r}\mathcal{G}) = \mathfrak{m}^r \odot H^0(Y, \mathfrak{m}^k\mathcal{G}) = \mathfrak{m}^r H^0(Y, \mathfrak{m}^k\mathcal{G})$. Es ist $\psi((\mathfrak{m}^k\mathcal{G})(Y))$ ein endlich erzeugter B-Untermodul von M. Da $\mathfrak{m}^i N$ offen in M ist, gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^t\psi((\mathfrak{m}^k\mathcal{G})(Y)) \subseteq \mathfrak{m}^i N$. Dann ist $\psi((\mathfrak{m}^{k+t}\mathcal{G})(Y)) \subseteq \mathfrak{m}^i N$. Damit ist (8) bewiesen.

Nun können wir (4) zeigen. Mit d^p bezeichnen wir die Differentiale des Komplexes $K^\cdot$. Sei ein $p \in \mathbb{Z}$ fixiert. Wir wollen zeigen, daß d^p strikt ist. Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^p & \xrightarrow{d^p} & \ker(d^{p+1}) \\ \psi_\ell^p \uparrow & & \uparrow \psi_\ell^{p+1} \\ K_\ell^p & \xrightarrow[d_\ell^p]{} & \ker(d_\ell^{p+1}) \end{array}$$

Sei U eine Nullumgebung von K^p. Wir müssen zeigen, daß $d^p(U)$ eine Nullumgebung von $\mathrm{im}(d^p)$ ist. Es ist $\mathrm{im}(d^p) = \ker(d^{p+1})$, da der Komplex $K^\cdot$ exakt ist. Da die Komplexhomomorphismen ψ_ℓ injektiv sind, gilt $\psi_\ell^{p+1}(\ker(d_\ell^{p+1})) = \psi_\ell^{p+1}(K_\ell^{p+1}) \cap \ker(d^{p+1})$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Deshalb ist nach (8) $\psi_\ell^{p+1}(\ker(d_\ell^{p+1}))$ eine Nullumgebung von $\ker(d^{p+1})$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Mit (5) erhalten wir, daß $d^p(\psi_\ell^p(K_\ell^p)) = \psi_\ell^{p+1}(d_\ell^p(K_\ell^p))$ eine Nullumgebung von ker (d^{p+1}) ist für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Nach (8) gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit $\psi_t^p(K_t^p) \subseteq U$. Deshalb ist $d^p(U)$ eine Nullumgebung von $\ker(d^{p+1})$. Also gilt (4) und damit ist (3) bewiesen.

Aus (3.2.7) und (3.2.8) folgt

(9) Sei U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. Der f-adische Ring $\mathcal{O}(U)$ hat einen noetherschen Definitionsring. Sei $\mathcal{P}$ die Prägarbe der adischen Funktionen auf $V := \mathrm{Spa}(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U))$. Dann sind $(U, \mathcal{O} \mid U)$ und $(V, \mathcal{P})$ kanonisch isomorph. Unter diesem Isomorphismus entsprechen den rationalen Teilmengen von $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, die in U enthalten sind, die rationalen Teilmengen von V, und der Prägarbe $(M \otimes \mathcal{O}) \mid U$ entspricht die Prägarbe $M(U) \otimes \mathcal{P}$.

Wir zeigen nun, daß $M \otimes \mathcal{O}$ eine Garbe topologischer Gruppen ist. Nach [EGA*],0.3.2.2 muß man das Garbenaxiom nur für eine offene Überdeckung einer rationalen Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ verifizieren. Man überlegt sich leicht, daß es sogar reicht, das folgende zu zeigen:

(10) Sind U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von U, so gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_i)$ von U durch rationale Teilmengen von $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, so daß $\mathfrak{V}$ die Überdeckung $\mathfrak{U}$ verfeinert, die Sequenz

$$0 \to (M \otimes \mathcal{O})(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_i (M \otimes \mathcal{O})(V_i) \to \prod_{i,j} (M \otimes \mathcal{O})(V_i \cap V_j)$$

exakt ist und die Abbildung α strikt ist.

Zum Beweis von (10) können wir nach (9) annehmen, daß U ganz $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ ist und A vollständig ist. Dann folgt (10) aus (3) und dem nachfolgenden Lemma (3.6.3 iv).

Aus (3), (9), (3.6.3 iv) und [Gr],3.8 Cor. 4 folgt $H^i(\mathrm{Spa}(A, A^+), M \otimes \mathcal{O}) = 0$ für $i > 0$. Damit ist (3.6.2) bewiesen.

Lemma 3.6.3. Sei A ein affinoider Ring.

i) Sind ℓ ein Element von $\tilde{A}$ und L eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} = L \cdot \tilde{A}$, so ist die rationale Teilmenge $R(\frac{L}{\ell})$ von $\mathrm{Spa}\, A$ abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in $\mathrm{Spa}\, A$.

ii) Ein Punkt von $\mathrm{Spa}\, A$ hat genau dann keine echte Primärspezialisierung in $\mathrm{Spa}\, A$, wenn er ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Form $R(\frac{L}{\ell})$ hat, wobei ℓ ein Element von $\tilde{A}$ und L eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}$ mit $1 \in L$ ist.

iii) Sei U eine quasikompakte offene Teilmenge von $\mathrm{Spa}\, A$, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in $\mathrm{Spa}\, A$ ist, und sei $\mathfrak{V}$ eine offene Überdeckung von U. Dann gibt es eine endliche Teilmenge L von $\tilde{A}$ mit $1 \in L$ und eine endliche Teilmenge T von L, so daß $\{R(\frac{L}{\ell}) \mid \ell \in T\}$ eine Überdeckung von U ist, die $\mathfrak{V}$ verfeinert.

iv) Ist A vollständig, so gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{V}$ von $\mathrm{Spa}\, A$ eine endliche Teilmenge L von $\tilde{A}$, so daß $L \cdot \tilde{A} = \tilde{A}$ und $\{R(\frac{L}{\ell}) \mid \ell \in L\}$ die Überdeckung $\mathfrak{V}$ verfeinert.

Beweis: i) folgt aus (1.3.7).

ii) Sei v ein Punkt von $\mathrm{Spa}\, A$. Hat v ein Fundamentalsystem von Umgebungen der angegebenen Form, so hat v keine echte Primärspezialisierung nach (i). Setzen wir umgekehrt voraus, daß v keine echte Primärspezialisierung in $\mathrm{Spa}\, A$ hat, so gilt

$\Gamma_v = c\Gamma_v$, und deshalb hat v ein Fundamentalsystem von Umgebungen der geforderten Form nach Fall 1 im Beweis von (1.3.8).

iii) Sei U eine quasikompakte offene Teilmenge von Spa A, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in Spa A ist, und sei $\mathfrak{V}$ eine offene Überdeckung von U. Sei S die Menge aller Punkte von U, die keine echte Primärspezialisierung in Spa A haben (d. h. $S = \{u \in U \mid \Gamma_u = c\Gamma_u\}$). Nach (ii) gibt es zu jedem $s \in S$ eine endliche Teilmenge L_s von $\tilde{A}$ und ein Element ℓ_s von $\tilde{A}$, so daß $\{1, \ell_s\} \subseteq L_s$ und $R(\frac{L_s}{\ell_s})$ eine Umgebung von s ist, die in einem Element von $\mathfrak{V}$ enthalten ist. Da U abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in Spa A ist, spezialisiert jeder Punkt von U in einen Punkt von S. Deshalb ist $\{R(\frac{L_s}{\ell_s}) \mid s \in S\}$ eine Überdeckung von U, die $\mathfrak{V}$ verfeinert. Da U quasikompakt ist, wird U von endlich vielen dieser $R(\frac{L_s}{\ell_s})$ überdeckt, etwa von $R(\frac{L_{s1}}{\ell_{s1}}), \dots, R(\frac{L_{sn}}{\ell_{sn}})$. Nun können wir den Beweis aus [FP], III.2.5 übernehmen.

Wir setzen $L_i := L_{si}$ und $\ell_i := \ell_{si}$ für $i = 1, \dots, n, L := \{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \mid a_i \in L_i$ für $i = 1, \dots, n\}$ und $T := \{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \mid a_i \in L_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $a_i = \ell_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}\}$. Es ist $1 \in L$. Wir notieren die folgenden beiden einfachen Eigenschaften:

(1) Für jedes $a_1 \in L_1, \dots, a_n \in L_n$ gilt

$$R(\frac{L}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}) = R(\frac{L_1}{a_1}) \cap \ldots \cap R(\frac{L_n}{a_n})$$

(2) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $\{R(\frac{L_i}{a}) \mid a \in L_i\}$ eine Überdeckung Spa A.

Aus (1) und (2) folgt $U = \bigcup_{i=1}^{n} R(\frac{L_i}{\ell_i}) \subseteq \bigcup_{\ell \in T} R(\frac{L}{\ell})$, und aus (1) folgt, daß jedes $R(\frac{L}{\ell}), \ell \in T$, in einem $R(\frac{L_i}{\ell_i})$ enthalten ist. Damit ist (iii) gezeigt.

Wir nehmen nun an, daß U ganz Spa A ist. Dann gilt also

(3) $\operatorname{Spa} A = \bigcup_{\ell \in T} R(\frac{L}{\ell})$

Sei A vollständig. Aus (3) und (3.2.5) folgt $T \cdot \tilde{A} = \tilde{A}$. Weiterhin folgt aus (3), daß für jedes $\ell \in T$ gilt $R(\frac{L}{\ell}) = R(\frac{T}{\ell})$. Also gilt (iv).

Bemerkung. Ist A tatesch, so kann L in (3.6.3 iv) so gewählt werden, daß $1 \in L$. Wie man am Beispiel von diskreten Ringen sieht, gilt dies für allgemeine affinoide Ringe nicht.

Nach (3.2.9.i) und (3.6.1) haben wir zu einem affinoiden Ring A, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, ein Objekt $(\operatorname{Spa} A, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in \operatorname{Spa} A))$ der Kategorie $(VL)_{top}$. Dieses Objekt nennen wir den adischen Raum zu dem affinoiden Ring A.

Definition 3.6.4. i) Ein affinoider adischer Raum ist ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$, das isomorph ist zu dem adischen Raum eines affinoiden Rings, der einen noetherschen Definitionsring besitzt.

ii) Ein adischer Raum ist ein Objekt $(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ der Kategorie $(VL)_{top}$, so daß es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x in X gibt, so daß $(U, \mathcal{O} \mid U, (v_x \mid x \in U))$ ein affinoider adischer Raum ist.

iii) Für zwei adische Räume X und Y sind die Morphismen (adischer Räume) von X nach Y die Morphismen $X \to Y$ der Kategorie $(VL)_{top}$.

Nach (3.2.9.ii) ist die Kategorie der affinoiden adischen Räume dual zu der Kategorie, die die vollständigen affinoiden Ringe mit noetherschem Definitionsring als Objekte und die stetigen Ringhomomorphismen affinoider Ringe als Morphismen hat.

Sind X der adischer Raum zu einem affinoiden Ring A und U eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$, so ist der offene Teilraum U von X ein affinoider adischer Raum (siehe (9) im Beweis von (3.6.2)). Also ist jeder offene Teilraum eines adischen Raums ein adischer Raum.

Ist X ein adischer Raum, so heißt eine offene Teilmenge U von X affinoid, wenn der durch U gegebene offene Teilraum von X ein affinoider adischer Raum ist.

Sei A ein diskreter affinoider Ring. A hat einen noetherschen Definitionsring und deshalb haben wir einen adischen Raum zu A. In (1.5) haben wir zu dem Paar von Ringen $A = (\tilde{A}, A^+)$ ein Objekt $(X, \mathcal{A}, (v_x \mid x \in X))$ der Kategorie (VL) konstruiert. Versehen wir für jede offene Teilmenge U von X den Ring $\mathcal{A}(U)$ mit der diskreten Topologie, so wird $\mathcal{A}$ zu einer Prägarbe vollständiger nat-Ringe. Nach [EGA*, O.3.9] existiert die zu $\mathcal{A}$ assoziierte Garbe $\mathcal{O}$ vollständiger nat-Ringe. Für jede offene Teilmenge U von X haben wir eine Gleichheit von Ringen $\mathcal{A}(U) = \mathcal{O}(U)$. Ist U quasikompakt, so ist die Topologie von $\mathcal{O}(U)$ diskret, aber für beliebiges U ist dies im allgemeinen nicht der Fall. Es ist $(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ ein Objekt der Kategorie $(VL)_{top}$. Nach (1.5.7) und (3.2.9 ii) ist $(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ der adische Raum zu dem affinoiden Ring A.

Proposition 3.6.5. Sei X ein affinoider adischer Raum mit Strukturgarbe $\mathcal{O}$.

i) Für jede rationale Teilmenge U von X und jedes $x \in X$ sind die Ringhomomorphismen $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(U)$ und $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}_x$ flach.

ii) Hat $\mathcal{O}(X)$ einen noetherschen Definitionsring, über dem $\mathcal{O}(X)$ endlich erzeugt ist, so ist für jede rationale Teilmenge U von X der Ring $\mathcal{O}(U)$ noethersch.

Beweis: Die Behauptungen folgen aus (ii) und (iii) in (2.3.31).

Bemerkung 3.6.6. Ist X der adische Raum zu einem affinoiden Ring A, so daß $\tilde{A}$ endlich erzeugt ist über einem noetherschen Definitionsring von $\tilde{A}$, so ist nach (2.3.9 ii) die Voraussetzung von (3.6.5 ii) erfüllt.

Proposition 3.6.7. Seien A ein vollständiger f-adischer Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, A^+ ein Ganzheitsring von A und $\mathcal{O}$ die Garbe der adischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. Dann gilt für jedes $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, dessen Träger $\mathrm{supp}(x) =: \mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von A oder offen ist.

i) $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_x$ ist das maximale Ideal von $\mathcal{O}_x$.

ii) Die Vervollständigungen der lokalen Ringe $A_\mathfrak{p}$ und $\mathcal{O}_x$ nach ihren maximalen Idealen sind isomorph.

iii) Hat A einen noetherschen Definitionsring, über dem A endlich erzeugt ist, so ist $\mathcal{O}_x$ noethersch.

Beweis: Wir fixieren ein $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Sei zunächst $\mathfrak{p} = \mathrm{supp}(x)$ offen. Für jede rationale Teilmenge U von $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ mit $x \in U$ setzen wir $\mathfrak{p}_U = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(x) = 0\}$. Man kann sich dann leicht überlegen

(1) Es ist $\mathfrak{p}_U = \mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}(U)$ und der lokale Ringhomomorphismus $A_\mathfrak{p} \to \mathcal{O}(U)_{\mathfrak{p}_U}$ induziert ein Isomorphismus zwischen den Residuenkörpern.

Mit (1) läßt sich (3.6.7) genauso beweisen wie (3.3.16).

Sei nun $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von A und nicht offen. Nach (4) in (2.3.2) ist $A/\mathfrak{p}$ tatesch. Aus (2.2.10) folgt, daß sich die Topologie von $A/\mathfrak{p}$ durch eine Bewertung von $A/\mathfrak{p}$ definieren läßt. Damit läßt sich auch in diesem Fall (3.6.7) genauso beweisen wie (3.3.16).

Bemerkung. Ist in (3.6.7) $\mathrm{supp}(x) = \mathfrak{p}$ ein Primideal, das weder maximal noch offen ist, so ist (ii) im allgemeinen nicht richtig, da schon die Residuenkörper von $A_\mathfrak{p}$ und $\mathcal{O}_x$ im allgemeinen nicht isomorph sind; ich weiß nicht, ob (i) und (iii) richtig sind.

Definition 3.6.8. Sei X ein adischer Raum. Ein Punkt x von X heißt analytisch, wenn es eine offene Umgebung U von x in X gibt, so daß der offene Teilraum U von

X ein analytischer Raum ist. Die Menge der analytischen Punkte von X wird mit X_a bezeichnet, die Menge der nichtanalytischen Punkte vom X wird mit X_{na} bezeichnet.

Lemma 3.6.9. Ist X ein affinoider adischer Raum, so stimmt Definition (3.6.8) überein mit der in (3.1.15) angegebenen Definition eines analytischen Punktes von X.

Beweis: Sei X der adische Raum zu einem affinoiden Ring (A, A^+). Sei v ein Punkt von $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$, der analytisch im Sinne von (3.1.15) ist. Wir wählen $f_0, \ldots, f_n \in A^{\circ\circ}$, so daß das Ideal $(f_0, \ldots, f_n)$ von A offen ist. Ohne Einschränkung gilt $v(f_0) = \min\{v(f_i) \mid i = 0, \ldots, n\}$. Da $\mathrm{supp}(v)$ nicht offen ist, gilt $v(f_0) \neq \infty$. Sei U die rationale Teilmenge $R(\frac{f_0, \ldots, f_n}{f_0})$ von X. Es ist $v \in U$. Da f_0 eine topologisch nilpotente Einheit in $\mathcal{O}(U)$ ist, ist $\mathcal{O}(U)$ ein Tate-Ring. Deshalb ist der offene Teilraum U von X ein analytischer Raum und somit v ein analytischer Punkt von X im Sinne von (3.6.8).

Sei nun umgekehrt v ein Punkt von X, der analytisch im Sinne von (3.6.8) ist. Sei U eine offene Umgebung von v in X, so daß der offene Teilraum U von X ein affinoider analytischer Raum ist. Sei V eine rationale Teilmenge von X, die eine Umgebung von v in U ist. Der f-adische Ring $\mathcal{O}(V)$ besitzt eine topologisch nilpotente Einheit (denn die Einschränkung einer jeden topologisch nilpotenten Einheit des Tate-Rings $\mathcal{O}(U)$ auf V ist eine topologisch nilpotente Einheit in $\mathcal{O}(V)$). Deshalb ist jeder Punkt von $V = \mathrm{Spa}(\mathcal{O}(V), \mathcal{O}^+(V))$ ein analytischer Punkt von $\mathrm{Spa}(\mathcal{O}(V), \mathcal{O}^+(V))$ im Sinne von (3.1.15), insbesondere gilt dies für v. Da der Ringhomomorphismus $A \to \mathcal{O}(V)$ adisch ist, folgt aus (3.1.9 ii), daß v ein analytischer Punkt von X im Sinne von (3.1.15) ist.

Korollar 3.6.10. Für jeden adischen Raum X ist X_a offen und konstruierbar in X.

Beweis: Es genügt, (3.6.10) für affinoide adische Räume zu zeigen. In diesem Fall folgt die Behauptung aus (3.1.16).

Sei X ein adischer Raum. Es gibt zwei Extremfälle, nämlich $X_a = X$ und $X_a = \emptyset$. Der erste Fall $X_a = X$ bedeutet, daß X ein analytischer Raum ist. Ist X affinoid, so bedeutet $X_a = \emptyset$, daß X der adische Raum zu einem diskreten affinoiden Ring ist.

Denn: Sei X der adische Raum zu dem vollständigen affinoiden Ring A. Ist $\tilde{A}$ diskret, so ist klar, daß $X_a = \emptyset$. Sei nun umgekehrt $X_a = \emptyset$. Ist $\mathrm{Cont}(\tilde{A})_a = \emptyset$, so folgt aus (3.1.13 ii), daß $\tilde{A}$ diskret ist. Angenommen, es sei $\mathrm{Cont}(\tilde{A})_a \neq \emptyset$. Wir wählen ein Element v von $\mathrm{Cont}(\tilde{A})_a$. Nach (3.1.14 i) ist v mikrobial. Deshalb gibt es eine konvexe

Untergruppe H von Γ_v, so daß Γ_v/H Rang 1 hat. Die Bewertung $w := v/H$ von $\tilde{A}$ ist stetig und somit analytisch. Nach (3.1.14 ii) ist $w \in X_a$, Widerspruch.

Ist X ein affinoider adischer Raum, der zugleich ein analytischer Raum ist, so ist X im allgemeinen noch kein affinoider analytischer Raum. Ebenso ist ein affinoider analytischer Raum, der zugleich ein adischer Raum ist, im allgemeinen kein affinoider adischer Raum.

Beispiel. i) Seien B ein lokaler noetherscher Ring und I ein Ideal von B, so daß gilt: I enthält einen Nichtnullteiler von B, $\mathrm{Spec}B\backslash V(I)$ ist affin, aber es gibt kein $f \in B$ mit $\mathrm{Spec}B\backslash V(I) = D(f)$. Wir setzen $A = \Gamma(\mathrm{Spec}B\backslash V(I), \mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von $\mathrm{Spec}B$ ist. B ist ein Unterring von A. Wir versehen A mit der Gruppentopologie, so daß $\{I^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Damit ist A ein f-adischer Ring. Seien A^+ ein beliebiger Ganzheitsring von A und X der affinoide adische Raum zu (A, A^+). Dann ist X ein analytischer Raum, da $X_{na} = \emptyset$. Aber X ist kein affinoider analytischer Raum, da $\mathcal{O}_X(X) = \hat{A}$ kein Tate-Ring ist.

ii) Wir betrachten nochmals (3.4.24). Sei k ein vollständiger diskret (Rang 1) bewerteter Körper und sei X eine separierte analytische Varietät über k, die steinsch, aber nicht affinoid ist. Wir setzen $A := \mathcal{O}_X(X)$. Sei Y der affinoide analytische Raum zu (A, A°). Nach (1) und (2) in (3.4.24) gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{U}$ von Y durch rationale Teilmengen, so daß der Tate-Ring $\mathcal{O}_Y(U)$ einen noetherschen Definitionsring besitzt für jedes $U \in \mathfrak{U}$. Deshalb ist Y ein adischer Raum. Y ist jedoch kein affinoider adischer Raum, da $\mathcal{O}_Y(Y) = A$ keinen noetherschen Definitionsring hat.

Proposition 3.6.11. Seien A ein vollständiger affinoider Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\tilde{A}$. Dann gibt es ein $v \in \mathrm{Spa}A$ mit $\mathfrak{p} = \mathrm{supp}(v)$. Ist $\mathfrak{p}$ nicht offen, so kann man v als diskret vom Rang 1 wählen.

Beweis: Ist $\mathfrak{p}$ offen, so ist die triviale Bewertung von $\tilde{A}$ mit Träger $\mathfrak{p}$ ein Element von $\mathrm{Spa}\,A$. Sei nun $\mathfrak{p}$ nicht offen. Seien B ein noetherscher Definitionsring von $\tilde{A}$ und I ein Definitionsideal von B. Wir wählen ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von B mit $\mathfrak{p} \cap B \subseteq \mathfrak{m}$. Da B vollständig ist, ist $I \subseteq \mathfrak{m}$([B], III.2.13 Lemma 3). Da $\mathfrak{p}$ nicht offen ist, ist $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ und somit $\mathfrak{p} \cap B \neq \mathfrak{m}$. Nach [EGA*, O.6.5.8] gibt es einen diskreten Bewertungsring D von $\mathrm{Quot}(B/\mathfrak{p} \cap B)$, der den lokalen Ring $(B/\mathfrak{p} \cap B)_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}\cap B}$ dominiert. Sei w die Bewertung von B mit $\mathrm{supp}(w) = \mathfrak{p} \cap B$ und $B(w) = D$. Die Bewertung w ist stetig.

Nach (3.1.11) gibt es genau eine Bewertung v von $\tilde{A}$ mit $v \mid B = w$. Es ist $\mathrm{supp}(v) = \mathfrak{p}$ und nach (3.1.14 ii) gilt $v \in \operatorname{Spa} A$.

Korollar 3.6.12. Sei A ein vollständiger affinoider Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Ein Ideal I von $\tilde{A}$ ist genau dann offen, wenn $\{v \in \operatorname{Spa} A \mid v(I) = \{\infty\}\} \subseteq (\operatorname{Spa} A)_{na}$.

Beweis: Sei I ein Ideal von $\tilde{A}$ mit $\{v \in \operatorname{Spa} A \mid v(I) = \{\infty\}\} \subseteq (\operatorname{Spa} A)_{na}$. Sei J ein Definitionsideal eines Definitionsrings von $\tilde{A}$. Es gilt $\{v \in \operatorname{Spa} A \mid v(J) = \{\infty\}\} = (\operatorname{Spa} A)_{na}$. Aus (3.6.11) folgt $J \subseteq \sqrt{I}$. Hieraus ergibt sich, daß I offen ist.

Bemerkung. (3.6.12) gilt auch ohne die Voraussetzung, daß A einen noetherschen Definitionsring hat, denn für jeden vollständigen affinoiden Ring A gilt: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\tilde{A}$, das nicht offen ist, so gibt es ein $v \in (\operatorname{Spa} A)_a$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{supp}(v)$. (Siehe Beweis von (3.1.13 ii).)

Korollar 3.6.13. Eine Teilmenge U eines affinoiden adischen Raums X ist genau dann rational, wenn es $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ gibt, so daß $U = \{x \in X \mid v_x((f_i)_x) \geq v_x((f_0)_x) \neq \infty$ für $i = 1, \ldots, n\}$ und $\{x \in X \mid f_0(x) = \ldots = f_n(x) = 0\} \subseteq X_{na}$.

Lemma 3.6.14. Sei A ein affinoider Ring mit noetherschem Definitionsring und sei $(\operatorname{Spa} A, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in \operatorname{Spa} A))$ der adische Raum zu A. Seien x und y Punkte von $\operatorname{Spa} A$ und sei y eine Spezialisierung von x. Sei $g \colon \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ die kanonische Abbildung. Dann gilt

i) Es gibt ein $z \in \operatorname{Spa} A$, so daß z eine Sekundärspezialisierung von x in $\operatorname{Spv} \tilde{A}$ und y eine Primärspezialisierung von z in $\operatorname{Spv} \tilde{A}$ ist.

ii) v_y ist eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ in $\operatorname{Spv} \mathcal{O}_y$ genau dann, wenn y eine Primärspezialiserung (bzw. Sekundärspezialisierung) von x in $\operatorname{Spv} \tilde{A}$ ist.

Beweis: i) Nach (1.1.17) gibt es ein $z \in \operatorname{Spv} \tilde{A}$, das eine Sekundärspezialisierung von x und eine Primärgeneralisierung von y in $\operatorname{Spv} \tilde{A}$ ist. Als Sekundärspezialisierung einer stetigen Bewertung ist z stetig. Es gilt $z(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^+$, da z eine Generalisierung von y ist und $y(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^+$. Also ist $z \in \operatorname{Spa} A$.

ii) Sei v_y eine Primärspezialisierung von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ in $\operatorname{Spv} \mathcal{O}_y$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x & \xleftarrow{g} & \mathcal{O}_y \\ \varphi \nwarrow & & \nearrow \psi \\ & \tilde{A} & \end{array}$$

zeigt, daß $y = \operatorname{Spv}(\psi)(v_y)$ eine Primärspezialisierung von $x = \operatorname{Spv}(\psi)(v_x)$ in $\operatorname{Spv}\tilde{A}$ ist. Sei nun umgekehrt y eine Primärspezialisierung von x in $\operatorname{Spv}\tilde{A}$, also $y = x \mid H$, wobei H eine konvexe Untergruppe von Γ_x ist mit $c\Gamma_x \subseteq H$. Sei $U = R(\frac{T}{s})$ eine rationale Teilmenge von $\operatorname{Spa} A$, die y enthält. Sei $f: \tilde{A} \to \mathcal{O}(U)$ die kanonische Abbildung und seien x' und y' die stetigen Bewertungen von $\mathcal{O}(U)$ mit $\operatorname{Spv}(f)(x') = x$ und $\operatorname{Spv}(f)(y') = y$. Sei $t: \Gamma_x \to \Gamma_{x'}$ der kanonische Isomorphismus. Da $y(s) \neq \infty$, ist $x(s) \in H$ und deshalb $\{x'(a) \mid x'(a) \leq 0 \text{ und } a \in \tilde{A}[s^{-1}]\} \subseteq t(H)$. Da $\tilde{A}[s^{-1}]$ dicht in $\mathcal{O}(U)$ ist, folgt $c\Gamma_{x'} \subseteq t(H)$. Deshalb haben wir die stetige Bewertung $z := x' \mid t(H)$ von $\mathcal{O}(U)$. Da $\operatorname{Spv}(f)(z) = y = \operatorname{Spv}(f)(y')$, gilt $z = y'$. Daraus ergibt sich, daß v_y eine Primärspezialisierung von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ in $\operatorname{Spv}\mathcal{O}_y$ ist.

Die Behauptung über die Sekundärspezialiserung beweist man entsprechend.

Aufgrund von (3.6.14 ii) definieren wir

Definition 3.6.15. Sei $(X, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ ein adischer Raum. Seien x und y Punkte von X und sei y eine Spezialisierung von x. Sei $g: \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ die kanonische Abbildung. Nach (1.5.6) ist v_y eine Spezialisierung von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ in $\operatorname{Spv}\mathcal{O}_y$. Wir nennen y eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von x, wenn v_y eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von $\operatorname{Spv}(g)(v_x)$ in $\operatorname{Spv}\mathcal{O}_y$ ist.

Proposition 3.6.16. Seien X ein adischer Raum und x ein Punkt von X.

i) Jede Spezialisierung von x ist eine Primärspezialisierung einer Sekundärspezialisierung von x.

ii) Die Menge L der Sekundärgeneralisierungen von x ist eine Kette (d.h. sind y und z Sekundärgeneralisierungen von x, so ist y eine Sekundärgeneralisierung von z oder z eine Sekundärgeneralisierung von y.) L ist ein spektraler Raum. Sei y das kleinste Elemente von L. Ist x analytisch, so hat v_y den Rang 1, und ist x nichtanalytisch, so hat v_y den Rang 0 (d.h. v_y ist trivial).

iii) Sei x analytisch. Jede Generalisierung von x ist eine Sekundärgeneralisierung. Jeder Sekundärspezialisierung von x ist ein analytischer Punkt und jede echte Primärspezialisierung von x ist ein nichtanalytischer Punkt.

iv) Seien y eine Spezialisierung von x und $g: \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ die kanonische Abbildung. g ist flach. g ist genau dann ein lokaler Ringhomomorphismus, wenn y eine

Sekundärspezialisierung von x ist. Ist dies der Fall, so ist g treuflach und damit injektiv.

Beweis: Wir können annehmen, daß X der adische Raum zu einem affinoiden Ring A ist.

i) folgt aus (3.6.14 i).

ii) Sei zunächst x analytisch. Nach (3.3.9 iii) ist jede Generalisierung von x eine Sekundärgeneralisierung von x. Deshalb folgt die Behauptung aus (i) und (ii) in (3.3.9). Sei nun x nichtanalytisch. Sei v das durch x gegebene Element von $\operatorname{Spv} K$ mit $K = \operatorname{Quot}(\tilde{A}/\operatorname{supp}(x))$. Dann ist L kanonisch homöomorph zu der Menge aller Generalisierungen von v in $\operatorname{Spv} K$. Hieraus folgt die Behauptung.

iii) Ist y eine Sekundärspezialisierung von x, so ist $\operatorname{supp}(y) = \operatorname{supp}(x)$ und deshalb ist y analytisch. Sei nun y eine echte Primärspezialisierung von x, also $y = x \mid H$, wobei H eine konvexe Untergruppe von Γ_x ist mit $H \neq \Gamma_x$. Es ist $x(a) > H$ für jedes $a \in \tilde{A}^{oo}$, da $x(a)$ kofinal in $(\Gamma_x)_\infty$ für jedes $a \in \tilde{A}^{oo}$. Also ist $y(a) = \infty$ für jedes $a \in \tilde{A}^{oo}$ und deshalb ist y nichtanalytisch.

iv) Nach (3.6.5 i) ist $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_x$ flach für jede rationale Teilmenge U von X, die y enthält. Deshalb ist $\mathcal{O}_y = \varinjlim \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_x$ flach. Nach (1.1.11) ist g genau dann ein lokaler Ringhomomorphismus, wenn y eine Sekundärspezialisierung von x ist.

Sei $x \succ y$ eine Sekundärspezialisierung auf einem adischen Raum X. Nach (3.6.16 iv) ist der lokale Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ injektiv. Wir haben schon in (3.4.4) gesehen, daß $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ im allgemeinen nicht surjektiv ist, wenn x und y analytische Punkte sind. (In (3.4.4) wurde zwar vorausgesetzt, daß k algebraisch abgeschlossen ist, aber das Beispiel gilt analog, wenn α eine diskrete Bewertung ist.) Wir werden später an einem Beispiel zeigen, daß $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ auch dann im allgemeinen kein Isomorphismus ist, wenn x und y nichtanalytische Punkte sind (siehe (3.7.3 vi)). Ist jedoch X der adische Raum zu einem diskreten affinoiden Ring, so folgt aus der Konstruktion von $\mathcal{O}$ in (1.5), daß $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 3.6.17. i) Sei A ein f-adischer Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt. Seien A_1 und A_2 zwei Ganzheitsringe von A mit $A_1 \subseteq A_2$. Seien Y und X die adischen Räume zu den affinoiden Ringen (A, A_1) und (A, A_2). Sei $(\varphi, \psi): X \to Y$ der Morhpismus, der durch die Inklusion $(A, A_1) \to (A, A_2)$ induziert wird. Für diesen Morphismus (φ, ψ) gilt dann entsprechend (3.3.13), wobei jedoch in (iii) das Wort „Generalisierungen" durch das Wort „Sekundärgeneralisierungen" zu ersetzen ist.

ii) In der Situation von (i) gelten auch analog die Beispiele aus (3.3.15), wobei der Abschluß $\overline{U}$ von U zu ersetzen ist durch die Menge aller Sekundärspezialisierungen aller Punkte von U.

Beweis: i) Die Punkte (i) und (ii) aus (3.3.13) lassen sich in unserer Situation vollkommen analog beweisen. Zum Punkt (iii) in (3.3.13). Wir übernehmen die Notationen des dortigen Beweises. Sei G die Menge aller Sekundärgeneralisierungen von y in Y. Das kleinste Element von G liegt in $\varphi(X)$. Deshalb ist L nicht leer. Nach der Darstellung von G im Beweis von (3.6.16 ii) ist sofort zu sehen, daß $L = \varphi(X) \cap G$ eine konstruierbare Teilmenge des spektralen Raums G ist. Deshalb hat L ein größtes Element. Man kann den Beweis von (3.3.13 iii) übernehmen, der wesentliche Punkt ist die Gleichung

(1) $D \cap \varphi(X) = E$

Wir zeigen (1). Die Relation $E \subseteq D \cap \varphi(X)$ ist klar. Sei nun v ein Element von $D \cap \varphi(X)$. Wir arbeiten in $\operatorname{Spv} A$. Da v nach y spezialisiert, gibt es nach (1.1.14) einen Punkt u von $\operatorname{Spa} A$, für den gilt

(2) u ist eine verallgemeinerte Primärspezialisierung von v.

(3) y ist eine Sekundärspezialisierung von u

Aus (2) folgt, daß mit $v \in \varphi(X)$ auch $u \in \varphi(X)$. Damit erhalten wir mit (3), daß $u \in L$. Da x das größte Element von L ist, spezialisiert u nach x. Wir haben also $v \succ u \succ x$ und deshalb ist $v \in E$. Damit ist (i) bewiesen.

Der Beweis von (ii) sei dem Leser überlassen.

Bemerkung 3.6.18. Sei X ein affinoider adischer Raum. Nach (3.6.16 ii) ist die Menge G aller Sekundärgeneralisierungen eines Punktes von X ein spektraler Raum. G ist sogar eine prokonstruierbare Teilmenge von X. Weiterhin ist nach (3.6.17 ii) die Menge aller Sekundärspezialisierungen aller Punkte einer rationalen Teilmenge von X prokonstruierbar (da Bild einer spektralen Abbildung). Dies legt folgende Vermutung nahe, die auch richtig ist:

Es gibt (genau) eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß $(X, \mathcal{T})$ ein spektraler Raum ist, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie X hat und dessen Spezialisierungen die Sekundärspezialisierungen von X sind. (Da auf X_a gilt Spezialisierung = Sekundärspezialisierung, ist $\mathcal{T} \mid X_a$ die gegebene Topologie von X_a.) (vgl. (3.11.29)).

Sei X ein affinoider adischer Raum. Sei M ein $\mathcal{O}(X)$-Modul und sei $(M_i \mid i \in I)$ die Familie der endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Untermoduln von M. Nach (3.6.2) haben wir zu jedem M_i die Garbe $M_i \otimes \mathcal{O}$. Wir definieren

$$M \otimes \mathcal{O} := \varinjlim_{i \in I} M_i \otimes \mathcal{O},$$

wobei $\varinjlim$ der induktive Limes in der Kategorie der $\mathcal{O}$-Modulgarben ist. (N.B. Betrachten wir X nur als lokal geringten Raum, so definiert die Identität $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ einen Morphismus lokal geringter Räume $\varphi: X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$. Ist $\tilde{M}$ die durch M gegebene quasikohärente Garbe auf $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$, so gilt $M \otimes \mathcal{O} = \varphi^* \tilde{M}$).

Proposition 3.6.19. i) Für jede rationale Teilmenge U von X ist $(M \otimes \mathcal{O})(U) = M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(U)$ und $H^p(U, M \otimes \mathcal{O}) = 0$ für jedes $p > 0$.

ii) Für jede $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X hat man eine Bijektion $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(M, \mathcal{F}(X)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M \otimes \mathcal{O}, \mathcal{F})$.

iii) Der Funktor $M \mapsto M \otimes \mathcal{O}$ von der Kategorie der $\mathcal{O}(X)$-Moduln in die Kategorie der $\mathcal{O}$-Modulgarben ist exakt und volltreu.

iv) Sind $f: X \to Y$ ein Morphismus affinoider adischer Räume und N ein $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul, so ist $f^*(N \otimes \mathcal{O}_Y) = (N \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X)) \otimes \mathcal{O}_X$.

v) Sind $f: X \to Y$ ein Morphismus affinoider adischer Räume, so daß die Abbildung $f^*: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ offen ist, und M ein $\mathcal{O}_X(X)$-Modul, so gilt $f_*(M \otimes \mathcal{O}_X) = M \otimes \mathcal{O}_Y$.

Beweis: i) Für jede rationale Teilmenge U von X und jedes $p \geq 0$ gilt $H^p(U, \varinjlim_{i \in I} M_i \otimes \mathcal{O}) = \varinjlim_{i \in I} H^p(U, M_i \otimes \mathcal{O})$. Deshalb folgt (i) aus (3.6.2).

ii) und iv) sind klar.

iii) Die Exaktheit des Funktors folgt aus (3.6.5 i), die Volltreuheit folgt aus (i) und (ii).

iv) Sei B ein Definitionsring von $\mathcal{O}_Y(Y)$. Dann ist $f^*(B)$ ein Definitionsring von $\mathcal{O}_X(X)$. Sei $U = R(\frac{H}{s})$ eine rationale Teilmenge von Y. Da $f^*: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ adisch ist, ist $f^{-1}(U)$ eine rationale Teilmenge von X ((3.1.18)). In der Lokalisation $\mathcal{O}_Y(Y)_s$ haben wir den Unterring $C := B[\frac{h}{s} \mid h \in H]$. Mit (2.3.8 ii) und (2.3.15) erhalten wir

$$\mathcal{O}_Y(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X) = (\mathcal{O}_Y(Y)_s \otimes_C \hat{C}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X) =$$

$$(\mathcal{O}_Y(Y)_s \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X)) \otimes_C \hat{C} = \mathcal{O}_X(X)_s \otimes_C \hat{C} = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$

Deshalb gilt

$$f_*(M \otimes \mathcal{O}_X)(U) = (M \otimes \mathcal{O}_X)(f^{-1}(U)) = M \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}(f^{-1}(U))$$

$$= M \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_Y(U) = (M \otimes \mathcal{O}_Y)(U).$$

Eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X ist quasikohärent (bzw. quasikohärent und von endlichem Typ) ([EGA*], 0.5.1.3 und 0.5.2.1) genau dann, wenn es zu jedem $x \in X$ eine rationale Teilmenge U von X und einen $\mathcal{O}(U)$-Modul M (bzw. endlich erzeugten $\mathcal{O}(U)$-Modul M) gibt, so daß $x \in U$ und $\mathcal{F} \mid U \cong M \otimes (\mathcal{O} \mid U)$.

Aus (3.6.5 ii) folgt: Hat $\mathcal{O}(X)$ einen noetherschen Definitionsring, über dem $\mathcal{O}(X)$ endlich erzeugt ist, so ist eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X genau dann kohärent, wenn $\mathcal{F}$ quasikohärent und von endlichem Typ ist.

Satz 3.6.20. Seien X ein affinoider adischer Raum und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe von endlichem Typ. Dann ist $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(X)$-Modul und $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}$.

Satz 3.6.21. Seien X ein affinoider adischer Raum, M ein $\mathcal{O}(X)$-Modul und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Untergarbe von $M \otimes \mathcal{O}$. Dann gibt es einen Untermodul N von M mit $\mathcal{F} = N \otimes \mathcal{O}$.

Korollar 3.6.22. Jede quasikohärente Idealgarbe auf einem affinoiden adischen Raum X ist von der Form $I \otimes \mathcal{O}$, wobei I ein Ideal von $\mathcal{O}(X)$ ist.

Wir beweisen (3.6.20) und (3.6.21) im Abschnitt (3.9). Bis dahin werden wir (3.6.22) schon zum Beweis einiger Sätze verwenden. Natürlich ist der Beweis von (3.6.21) unabhängig von diesen Sätzen.

Definition 3.6.23. Seien X ein adischer Raum und $\mathcal{I}$ eine quasikohärente Idealgarbe auf X. Ein Morphismus adischer Räume $g: Y \to X$ heißt abgeschlossene Einbettung zur Idealgarbe $\mathcal{I}$, wenn er folgende Eigenschaft hat: Es ist $\operatorname{im}(g^*(\mathcal{I}) \to \mathcal{O}_Y) = 0$ und ist $f: Z \to X$ ein Morphismus in $(VL)_{top}$ mit $\operatorname{im}(f^*(\mathcal{I}) \to \mathcal{O}_Z) = 0$, so gibt es genau einen Morphismus $h: Z \to Y$ in $(VL)_{top}$ mit $f = g \circ h$.

Ein Morphismus adischer Räume $Y \to X$ heißt abgeschlossene Einbettung, wenn er eine abgeschlossene Einbettung zu einer quasikohärenten Idealgarbe von X ist.

Lemma 3.6.24. Seien X der adische Raum zu einem vollständigen affinoiden Ring A, I ein Ideal von $\tilde{A}$ und Y der adische Raum zu dem affinoiden Ring A/I. Dann ist der Morphismus $Y \to X$, induziert durch die kanonische Abbildung $A \to A/I$, eine abgeschlossene Einbettung zu der Idealgarbe $I \otimes \mathcal{O}_X$.

Beweis: (3.2.9 ii) und (3.2.10).

Ist $f: Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung zu einer quasikohärenten Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X und ist U eine offene Teilmenge von X, so ist $f: f^{-1}(U) \to U$ eine abgeschlossene Einbettung zu der Idealgarbe $\mathcal{I} \mid U$. Deshalb folgt mit (3.6.24), daß zu jeder quasikohärenten Idealgarbe auf einem adischen Raum eine abgeschlossene Einbettung existiert. Ebenso erhalten wir mit (2.3.33 iii) und (3.6.24): Ist $f: Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung zu einer quasikohärenten Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X, so ist $\mathcal{I}$ durch f eindeutig bestimmt, nämlich $\mathcal{I} = \ker(\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y)$. Somit gilt

Lemma 3.6.25. Sei $f: Y \to X$ ein Morphismus adischer Räume. Gibt es eine offene Überdeckung $(U_i \mid i \in I)$ von X, so daß $f: f^{-1}(U_i) \to U_i$ eine abgeschlossene Einbettung ist für jedes $i \in I$, so ist f eine abgeschlossene Einbettung.

Seien X ein adischer Raum und $\mathcal{I}$ eine quasikohärente Idealgarbe auf X. Eine abgeschlossene Einbettung zu $\mathcal{I}$ kann man folgendermaßen konstruieren. Sei Y die abgeschlossene Teilmenge $\{x \in X \mid \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$ von X. Auf Y betrachten wir die Garbe von Ringen $\mathcal{O}_Y := (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \mid Y$. Für jedes $x \in Y$ induziert die Bewertung v_x von $\mathcal{O}_{X,x}$ eine Bewertung w_x von $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{Y,x}$. Man kann $\mathcal{O}_Y$ auf genau eine Weise zu einer Garbe topologischer Ringe machen, so daß für jede offene affinoide Teilmenge U von X mit $\mathcal{I} \mid U = \mathcal{I}(U) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U)$ (nach (3.6.22) ist dies für jede offene affinoide Teilmenge von X der Fall, was wir hier aber nicht benötigen) die surjektive Abbildung $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$ eine Quotientenabbildung ist. Damit erhalten wir ein Objekt $Y = (Y, \mathcal{O}_Y, (w_x \mid x \in Y))$ der Kategorie $(VL)_{top}$. Es ist Y ein adischer Raum. Der kanonische Morphismus $Y \to X$ ist eine abgeschlossene Einbettung zu $\mathcal{I}$. Y heißt der abgeschlossene Teilraum von X zu der Idealgarbe $\mathcal{I}$.

Lemma 3.6.26. Seien A ein affinoider Ring und I ein Ideal von $\tilde{A}$. Sei $f: \operatorname{Spa} A/I \to \operatorname{Spa} A$ die kanonische Abbildung. Dann gibt es zu jeder rationalen Teilmenge U von $\operatorname{Spa} A/I$ eine rationale Teilmenge V von $\operatorname{Spa} A$ mit $U = f^{-1}(V)$.

Beweis: Seien s ein Element von $\tilde{A}/I$ und T eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}/I$ mit $U = R(\frac{T}{s})$. Seien g ein Element von $\tilde{A}$ und H eine endliche Teilmenge $\tilde{A}$ mit $r(g) = s$

und $r(H) = T$, wobei r der Ringhomomorphismus $\tilde{A} \to \tilde{A}/I$ ist. Nach (3.1.20) gibt es eine endliche Teilmenge L von $\tilde{A}$, so daß $L \cdot \tilde{A}$ offen ist und $v(\ell) \geq v(g)$ für jedes $v \in f(U)$. Dann gilt $f^{-1}(R(\frac{H \cup L}{g})) = U$.

Proposition 3.6.27. Seien X ein affinoider adischer Raum und $f\colon Y \to X$ ein Morphismus adischer Räume. f ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn Y affinoid und $(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)) \to (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y))$ eine Quotientenabbildung affinoider Ringe ist.

Beweis: (3.6.22) und (3.6.24)

Ein Morphismus adischer Räume $f\colon Y \to X$ heißt lokal abgeschlossene Einbettung, wenn es eine offene Teilmenge U von X mit $f(Y) \subseteq U$ gibt, so daß die Restriktion $Y \to U$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Die folgenden beiden Lemmata folgen unmittelbar aus (3.6.25).

Lemma 3.6.28. Sei $f\colon Y \to X$ ein Morphismus adischer Räume. f ist eine lokal abgeschlossene Einbettung, wenn es zu jedem $x \in f(Y)$ eine offene Umgebung U von x in X gibt, so daß $f\colon f^{-1}(U) \to U$ eine lokal abgeschlossene Einbettung ist.

Lemma 3.6.29. Sei $f\colon Y \to X$ eine lokal abgeschlossene Einbettung. Ist $f(Y)$ abgeschlossen in X, so ist f eine abgeschlossene Einbettung.

Entsprechend zu (3.6.23) definiert man (lokal) abgeschlossene Einbettungen für analytische Räume. (3.6.24) - (3.6.29) gelten dann analog für analytische Räume.

3.7. Einfache Beispiele adischer Räume

(3.7.1) Seien A ein noetherscher adischer Ring und X der adische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A). Sei $Y := \{x \in X \mid v_x$ ist eine triviale Bewertung $\}$. Es ist $Y \subseteq X_{na}$ und X_{na} ist die Menge aller Sekundärspezialisierungen aller Punkte von Y((3.6.16 ii)). Nach (1.3.14 ii) ist Y prokonstruierbar in X. Die Retraktion $r: X \to Y, x \mapsto x \mid c\Gamma_x$ ist spektral. Y zusammen mit der Garbe topologischer Ringe $r_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X \mid Y$ ist das formale Schema zu dem vollständigen adischen Ring $\hat{A}$, $(Y, \mathcal{O}_X \mid Y) = \operatorname{Spf} \hat{A}$.
Sei nun A ein f-adischer Ring, der endlich erzeugt ist über einem noetherschen Definitionsring D von A. Seien X der adische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A^+), wobei A^+ ein Ganzheitsring von A ist mit $D \subseteq A^+$. Wir setzen $Y := \{x \in X \mid v_x$ ist eine triviale Bewertung $\}$ und $Z := \{x \in X \mid x$ hat eine Primärspezialisierung in $Y\} = \{x \in X \mid x$ hat eine Spezialisierung in $Y\}$. Z ist eine offene Teilmenge von X. Denn ist T ein endliches Erzeugendensystem von A über D, so gilt $Z = \{x \in X \mid v_x(t) \geq 0$ für jedes $t \in T\}$. Dies zeigt auch, daß der offene Teilraum Z von X der adische Raum zu dem affinoiden Ring (B, B) ist, wobei B der Ring A versehen mit der $(A^{oo} \cdot A)$-adischen Topologie ist. Nach obigem ist $(Y, \mathcal{O}_X \mid Y)$ das formale Schema zu dem vollständigen adischen Ring $\hat{B}$. X ist genau dann ein analytischer Raum, wenn $Y = \emptyset$.

Beispiel 3.7.2. Sei A ein diskreter Bewertungsring (vom Rang 1). Wir versehen A mit seiner Bewertungstopologie, d.h. mit der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A ist. Sei X der adische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A). Der X zugrundeliegende topologische Raum besteht aus einem offenen (analytischen) Punkt x und einem abgeschlossenen (nichtanalytischen) Punkt y. Die topologischen Ringe $\mathcal{O}_X(X)$ und $\mathcal{O}_X(\{x\})$ sind die Vervollständigungen von A und $\operatorname{Quot}(A)$ nach der Bewertungstopologie von A.

Beispiel 3.7.3. Seien A ein diskreter Bewertungsring, s ein erzeugendes Element des maximalen Ideals von A, K der Quotientenkörper von A und l der Residuenkörper von A. Wir versehen den Polynomring in einer Variablen $A[T]$ mit der $s \cdot A[T]$-adischen Topologie. Sei X der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(A[T], A[T])$.
X_a ist die rationale Teilmenge $R(\frac{s}{s})$. In der Notation von (3.4.2) ist X_a der 1-dimensionale Einheitspolyzylinder über K.
Wir identifizieren X_{na} (als topologischen Raum) mit $\operatorname{Spv}^+(A[T]/s \cdot A[T]) = \operatorname{Spv}^+(l[T])$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $l[T]$ sei $v(\mathfrak{p})$ die triviale Bewertung von $l[T]$

mit Träger $\mathfrak{p}$ und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{p}$ von $l[T]$ sei $w(\mathfrak{p})$ die durch den Bewertungsring $l[T]_\mathfrak{p}$ gegebene Bewertung von $l[T]$. Dann gilt $\operatorname{Spv}^+(l[T]) = \{v(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} l[T]\} \cup \{w(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]\}$, und $v(0) \overset{s}{\succ} w(\mathfrak{p}) \overset{p}{\succ} v(\mathfrak{p})(\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T])$ sind sämtliche nichttrivialen Spezialisierungen in $\operatorname{Spv}^+(l[T])$. (Dabei bedeutet $\overset{s}{\succ}$ Sekundärspezialisierung und $\overset{p}{\succ}$ Primärspezialisierung.)
Sei $z \in X$ die Bewertung $A[T] \to \mathbb{Z}_\infty, a_0 + a_1T + \ldots + a_nT^n \mapsto \min\{\alpha(a_i) \mid i = 0, \ldots, n\}$, wobei $\alpha: A \to \mathbb{Z}_\infty$ die Bewertung zu A ist. Sei $r: X_a \to Y = \{v(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} l[T]\}$ die Restriktion der Abbildung aus (3.7.1) auf X_a. Dann gilt

i) $r^{-1}(v(0)) = \{z\}$.

ii) Ist p ein Element von $A[T]$, so daß das Bild von p in $l[T]$ ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ von $l[T]$ erzeugt, so gilt

$$r^{-1}(v(\mathfrak{p})) = \{x \in X_a \mid v_x(p) > 0\},$$

und die Menge $\{x \in X_a \mid v_x(p) > 0\}$ ist abgeschlossen und konstruierbar in X_a. Ist l algebraisch abgeschlossen, so ist also $\{r^{-1}(v(\mathfrak{p})) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]\}$ die Menge von abgeschlossenen Kreisen $\{C(d;1) \mid d \in A\}$ mit $C(d;1) = \{x \in X_a \mid v_x(T-d) > 0\}$.

iii) Zu jedem $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]$ gibt es genau einen Punkt $u(\mathfrak{p}) \in r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$, der eine Spezialisierung von z ist. $u(\mathfrak{p})$ ist der einzige Punkt von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$, der eine Generalisierung in $X_a \backslash r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ hat. Also ist $r^{-1}(v(\mathfrak{p})) \backslash \{u(\mathfrak{p})\}$ das Innere von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$.

iv) Die Primärspezialisierungen der analytischen Punkte von X sind die folgenden: Jeder Punkt $x \in X_a \backslash \{u(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]\}$ hat genau eine echte Primärspezialisierung, nämlich $x \succ r(x)$, und jedes $u(\mathfrak{p})(\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T])$ hat zwei echte Primärspezialisierungen, nämlich $u(\mathfrak{p}) \succ w(\mathfrak{p}) \succ v(\mathfrak{p})$.

v) Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]$ gilt $\mathcal{O}_{X,u(\mathfrak{p})} = (\mathcal{O}_{X,w(\mathfrak{p})})_s$, ebenso $\mathcal{O}_{X,z} = (\mathcal{O}_{X,v(0)})_s$.

vi) Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]$ ist die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{X,w(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{X,v(0)}$ nicht surjektiv.

Beweis: i) Für jedes $x \in X_a$ ist $\operatorname{supp}(x) \subsetneqq \operatorname{supp}(r(x)) = \{p \in A[T] \mid x(p) > 0\}$ und dominiert der zu x gehörige Bewertungsring den lokalen Ring $A[T]_{\operatorname{supp}(r(x))}$. Der Träger von $v(0)$ ist das Primideal $s \cdot A[T]$ und die Lokalisation $A[T]_{s \cdot A[T]}$ ist der Bewertungsring zu z. Hieraus folgt $r^{-1}(v(0)) = z$.

ii) klar.

iii) Die Spezialisierungen von z in X_a entsprechen eineindeutig den Bewertungsringen des Residuenkörpers $l(T)$ von $A[T]_{s\cdot A[T]}$, die $l[T]$ umfassen, d.h. den Lokalisationen $l[T]_\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]$. Die durch $l[T]_\mathfrak{p}$ gegebene Spezialisierung $u(\mathfrak{p})$ von z wird unter r auf $v(\mathfrak{p})$ abgebildet.
Sei x ein Element von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$, das eine Generalisierung y in $X_a \backslash r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ hat. Da r stetig ist, ist $r(x) \in Y$ eine Spezialisierung von $r(y) \in Y$. Da $x \in r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ und $y \notin r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$, ist $r(x) \neq r(y)$. Deshalb $r(y) = v(0)$. Aus (i) folgt $y = z$ und somit $x = u(\mathfrak{p})$.

iv) Aus der Definition von $u(\mathfrak{p})$ im Beweis von (iii) folgt $u(\mathfrak{p}) \succ w(\mathfrak{p}) \succ v(\mathfrak{p})$. Sei x ein Punkt von X_a, der zwei echte Primärspezialisierungen hat, $x \succ w \succ v$. Da $w, v \in X_{na}$, gibt es ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} l[T]$ mit $w = w(\mathfrak{p})$ und $v = v(\mathfrak{p})$. Da $v(0)$ eine Sekundärgeneralisierung von $w(\mathfrak{p})$ ist, gibt es nach (1.1.15 iv) eine Sekundärgeneralisierung y von x in $\operatorname{Spv} A[T]$, so daß $v(0)$ eine Primärspezialisierung von y ist. Da $y \neq v(0)$, ist y keine triviale Bewertung von $A[T]$. Deshalb ist y ein Element von X_a. Nach (i) gilt $y = z$ und aus (iii) folgt dann $x = u(\mathfrak{p})$.

v) Für jedes $x \in X$ bezeichne $G(x)$ die Menge aller Generalisierungen von x in X. Nach (1.1.17) ist jede Generalisierung von x eine Sekundärgeneralisierung einer Primärgeneralisierung von x. Nach (i) und (iv) ist $u(\mathfrak{p})$ die einzige Primärgeneralisierung von $w(\mathfrak{p})$ in X_a und ist z die einzige Primärgeneralisierung von $v(0)$ in X_a. Also gilt $G(w(\mathfrak{p})) \cap X_a \subseteq G(u(\mathfrak{p}))$ und $G(v(0)) \cap X_a \subseteq G(z)$. Deshalb gibt es zu jeder Umgebung U von $u(\mathfrak{p})$ (bzw. z) in X eine Umgebung V von $w(\mathfrak{p})$ (bzw. $v(0)$) mit $V \cap X_a \subseteq U$. Da für jede rationale Teilmenge U von X gilt $\mathcal{O}_X(U \cap X_a) = \mathcal{O}_X(U \cap R(\frac{s}{s})) = \mathcal{O}_X(U)_s$, folgt die Behauptung.

vi) Das Spezialisierungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} z & \succ & u(\mathfrak{p}) \\ & & \\ v(0) & \succ & w(\mathfrak{p}) \end{array}$$

liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,z} & \xleftarrow{\psi} & \mathcal{O}_{X,u(\mathfrak{p})} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{X,v(0)} & \xleftarrow[\varphi]{} & \mathcal{O}_{X,w(\mathfrak{p})}. \end{array}$$

Wäre φ surjektiv, so wäre nach (v) auch ψ surjektiv. Aber ähnlich wie für (7) in (3.4.4) kann man zeigen, daß ψ nicht surjektiv ist.

Beispiel 3.7.4. Sei A ein Dedekind-Ring. Auf dem Ring $A[T]$ betrachten wir die $T \cdot A[T]$-adische Topologie. Sei X der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(A[T], A[T])$.
Dann ist X_a die rationale Teilmenge $R(\frac{T}{T})$.
Den topologischen Raum X_{na} können wir mit $\operatorname{Spv}^+(A[T]/T \cdot A[T]) = \operatorname{Spv}^+(A)$ identifizieren. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A sei $v(\mathfrak{p})$ die triviale Bewertung von A mit Träger $\mathfrak{p}$ und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{p}$ von A sei $w(\mathfrak{p})$ die Bewertung von A mit Träger (0) und zugehörigem Bewertungsring $A_{\mathfrak{p}}$. Dann gilt $\operatorname{Spv}^+(A) = \{v(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\} \cup \{w(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A\}$, und $v(0) \overset{s}{\succ} w(\mathfrak{p}) \overset{p}{\succ} v(\mathfrak{p})(\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A)$ sind sämtliche nichttrivialen Spezialisierungen in $\operatorname{Spv}^+(A)$.
Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A haben wir die Bewertung $t(\mathfrak{p})\colon A[T] \to \mathbb{Z}_\infty, p = a_0 + a_1T + \ldots + a_nT^n \mapsto \min\{i \mid a_i \notin \mathfrak{p}\}$, wenn $p \notin \mathfrak{p}[T]$, und $p \mapsto \infty$, wenn $p \in \mathfrak{p}[T]$. Für $t(0)$ schreiben wir auch z. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{p}$ von A sei $u(\mathfrak{p})$ die Bewertung $A[T] \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_\infty$ mit $p = a_mT^m + a_{m+1}T^{m+1} + \ldots + a_nT^n \mapsto (m, w(\mathfrak{p})(a_m))$, wenn $a_m \neq 0$, und $p \mapsto \infty$, wenn $p = 0$. Dabei trägt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die lexikographische Anordnung. Es ist $t(\mathfrak{p}) \in X_a$ für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und $u(\mathfrak{p}) \in X_a$ für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A$.
Sei $r\colon X_a \to Y = \{v(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\}$ die Einschränkung der Abbildung aus (3.7.1) auf X_a. Es gilt

i) $r^{-1}(v(0)) = \{z\}$.

ii) Sei L eine Teilmenge von A, so daß $\mathfrak{p} := L \cdot A$ ein maximales Ideal von A ist. Dann gilt

$$r^{-1}(v(\mathfrak{p})) = \{x \in X_a \mid v_x(l) > 0 \quad \text{für} \quad l \in L\},$$

und die Menge $\{x \in X_a \mid v_x(l) > 0 \text{ für jedes } l \in L\}$ ist abgeschlossen und konstruierbar in X_a.

iii) Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A$ ist $u(\mathfrak{p})$ ein Element von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ und $u(\mathfrak{p})$ ist das einzige Element von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$, das eine Generalisierung in $X_a \backslash r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ hat. Der Punkt z ist die einzige echte Generalisierung von $u(\mathfrak{p})$.

iv) Die Primärspezialisierungen der analytischen Punkte von X sind die folgenden: Jedes $x \in X_a \backslash \{u(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A\}$ hat genau eine echte Primärspezialisierung, nämlich $x \succ r(x)$, und jedes $u(\mathfrak{p})(\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A)$ hat genau zwei echte Primärspezialisierungen, nämlich $u(\mathfrak{p}) \succ w(\mathfrak{p}) \succ v(\mathfrak{p})$.

v) Es gilt $\mathcal{O}_{X,z} = (\mathcal{O}_{X,v(0)})_T$ und $\mathcal{O}_{X,u(\mathfrak{p})} = (\mathcal{O}_{X,w(\mathfrak{p})})_T$ für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A$.

vi) Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von A. Wir versehen den Quotientenkörper K von A mit der Bewertungstopologie von $w(\mathfrak{p})$. In dem 1-dimensionalen Einheitspolyzylinder über K $E_K^1 = \mathrm{Spa}\,(K[S]_{\{1\}}, K[S]^\circ_{\{1\}})$ (siehe (3.4.2)) betrachten wir den abgeschlossenen Kreis $Z := \{x \in E_K^1 \mid v_x(S) > 0\}$. Sei t die Bewertung $K[S] \to \mathbb{Z}_\infty$ mit $a_0 + a_1 S + \ldots + a_n S^n \mapsto w(\mathfrak{p})(a_0)$, und sei u die Bewertung $K[S] \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_\infty$ mit $a_0 + a_1 S + \ldots + a_n S^n \mapsto \min\{(w(\mathfrak{p})(a_i), i) \mid i = 0, \ldots, n\}$, wobei $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die lexikographische Anordnung trägt.

Nach (iii) ist $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))\backslash\{u(\mathfrak{p})\}$ das Innere von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$. Da $t(\mathfrak{p})$ ein abgeschlossener Punkt von X_a ist, ist die Menge $F := r^{-1}(v(\mathfrak{p}))\backslash\{u(\mathfrak{p}), t(\mathfrak{p})\}$ offen in X. Ebenso ist $Z\backslash\{u\}$ das Innere von Z (denn in der Notation von (3.7.3 iii) gilt $u = u(S)$) und ist t ein abgeschlossener Punkt von E_K^1. Deshalb ist $G := Z\backslash\{u, t\}$ offen in E_K^1. Es gilt:

Es gibt einen analytischen Isomorphismus

$$h: G \to F$$

zwischen den offenen Teilräumen G und F von E_K^1 und X. Die h zugrundeliegende stetige Abbildung setzt sich fort zu einem Homöomorphismus

$$f: Z \to r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$$

mit $f(u) = t(\mathfrak{p})$ und $f(t) = u(\mathfrak{p})$.

Beweis: Die Punkte (i) - (v) kann man genauso wie die entsprechenden Punkte (i) - (v) in (3.7.3) beweisen. Wir zeigen (vi). Sie L eine endliche Teilmenge von A mit $\mathfrak{p} = L \cdot A$ und sei a ein von 0 verschiedenes Element von $\mathfrak{p}$. Es gilt

(1) $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))\backslash\{u(\mathfrak{p})\} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} R_X(\dfrac{L^i \cup \{T\}}{T})$.

(2) $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))\backslash\{t(\mathfrak{p})\} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} (r^{-1}(v(\mathfrak{p})) \cap R_X(\dfrac{T^i}{a}))$.

Begründung von (1): Wir wenden (3.4.11 i) an auf die konstruierbare Teilmenge $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ des affinoiden analytischen Raums $X_a = R(\frac{T}{T})$. Da $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))\backslash\{u(\mathfrak{p})\}$ das Innere von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ ist, folgt (1) aus (ii).

Begründung von (2): Direkt aus der Definition von $t(\mathfrak{p})$ folgt $a \in \mathrm{supp}\,(t(\mathfrak{p}))$. Sei x ein Element von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ mit $a \in \mathrm{supp}\,(x)$. Da $\mathrm{supp}\,(x) \subseteq \mathrm{supp}\,(r(x)) = \mathrm{supp}\,(v(\mathfrak{p}))$, ist $\mathrm{supp}\,(x) \cap A \subseteq \mathrm{supp}\,(v(\mathfrak{p})) \cap A = \mathfrak{p}$. Also $\mathrm{supp}\,(x) \cap A = (0)$ oder $\mathrm{supp}\,(x) \cap A = \mathfrak{p}$. Da $a \neq 0$, folgt $\mathrm{supp}\,(x) \cap A = \mathfrak{p}$ und somit $\mathfrak{p}[T] \subseteq \mathrm{supp}\,(x)$. Sei B der zu x gehörige Bewertungsring von $Q := \mathrm{Quot}\,(A[T]/\mathrm{supp}\,(x))$. Das Bild von $A[T]$ in Q ist in B

enthalten. Ist $\mathfrak{p}[T] \subsetneqq \operatorname{supp}(x)$, so ist $\operatorname{supp}(x)$ ein maximales Ideal von $A[T]$ und deshalb $B = Q$, was jedoch nicht möglich ist. Also gilt $\mathfrak{p}[T] = \operatorname{supp}(x)$. Das Bild $\bar{T}$ von T in $Q = (A/\mathfrak{p})(\bar{T})$ liegt im maximalen Ideal von B. Also dominiert B den Bewertungsring $(A/\mathfrak{p})[\bar{T}]_{\bar{T}\cdot(A/\mathfrak{p})[\bar{T}]}$ und stimmt deshalb mit ihm überein. Damit ist gezeigt $x = t(\mathfrak{p})$. Also $\{t(\mathfrak{p})\} = \{x \in r^{-1}(v(\mathfrak{p})) \mid a(x) = 0\}$. Hieraus folgt (2).

Analog zu (1) und (2) gilt

(3) $Z\backslash\{u\} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} R_{E_K^1}(\frac{S^i, a}{a})$.

(4) $Z\backslash\{t\} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} (Z \cap R_{E_K^1}(\frac{L^i}{S}))$.

((3) folgt aus (3.4.11 i) und (4) folgt aus $\{t\} = \{x \in Z \mid x(S) = 0\}$.) Als nächstes zeigen wir

(5) Sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Unterringe $A[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$ und $A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$ von $A[T]_T$ und $A_\mathfrak{p}[T]_T$ versehen wir jeweils mit der T-adischen Topologie. Dann ist $A[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$ ein dichter topologischer Unterring von $A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$.

Denn: Sei $\mathfrak{q} := L^i \cdot A$ und $\mathfrak{m} := L^i \cdot A_\mathfrak{p}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $T^n \cdot A[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i] = \{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k \in A[T, T^{-1}] \mid a_k \in \mathfrak{q}^{n-k}$ für jedes $k < n\}$ und $T^n \cdot A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i] = \{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k \in A_\mathfrak{p}[T, T^{-1}] \mid a_k \in \mathfrak{m}^{n-k}$ für jedes $k < n\}$. Da $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von A ist, gilt $\mathfrak{m}^n \cap A = \mathfrak{q}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Deshalb ist $A[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$ ein topologischer Unterring von $A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$. Die Teilraumtopologie von $A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$ auf $A_\mathfrak{p}$ ist die $\mathfrak{m}$-adische Topologie. Da A dicht in $A_\mathfrak{p}$ bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie ist, ist $A[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$ dicht in $A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]$.

Aus (5) folgt

(6) Für $Y := R_X(\frac{L^i\cup\{T\}}{T})$ gilt: $(\mathcal{O}_X(Y), \mathcal{O}_X^+(Y))$ ist die Vervollständigung des affinoiden Rings $(A_\mathfrak{p}[T]_T, A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i]^c)$, wobei $A_\mathfrak{p}[T]_T$ mit der Topologie versehen ist, so daß $\{T^n \cdot A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$X_i := R_X(\frac{L^i \cup \{T\}}{T}) \cap R_X(\frac{T^i}{a})$$
$$Z_i := R_{E_K^1}(\frac{S^i, a}{a}) \cap R_{E_K^1}(\frac{L^i}{S}).$$

Nach (6) ist $(\mathcal{O}_X(X_i), \mathcal{O}_X^+(X_i))$ die Vervollständigung des affinoiden Rings $(K[T]_T, A_\mathfrak{p}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i][\frac{T^i}{a}]^c)$, wobei $K[T]_T$ die Topologie trägt, so daß $\{T^n \cdot$

$A_{\mathfrak{p}}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i][\frac{T^i}{a}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. $(\mathcal{O}_{E_K^1}(Z_i), \mathcal{O}^+_{E_K^1}(Z_i))$ ist die Vervollständigung des affinoiden Rings $(K[S]_S, A_{\mathfrak{p}}[S][\frac{l}{S} \mid l \in L^i][\frac{S^i}{a}]^c)$, wobei $K[S]_S$ die Topologie trägt, so daß $\{a^n \cdot A_{\mathfrak{p}}[S][\frac{l}{S} \mid l \in L^i][\frac{S^i}{a}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Da die T-adische und die a-adische Topologie auf $A_{\mathfrak{p}}[T][\frac{l}{T} \mid l \in L^i][\frac{T^i}{a}]$ übereinstimmen, gibt es genau einen Isomorphismus affinoider Ringe

$$\varphi_i: (\mathcal{O}_X(X_i), \mathcal{O}^+_X(X_i)) \to (\mathcal{O}_{E_K^1}(Z_i), \mathcal{O}^+_{E_K^1}(Z_i))$$

mit $\varphi_i(b) = b$ für jedes $b \in A$ und $\varphi_i(T) = S$. φ_i induziert einen Isomorphismus analytischer Räume

$$h_i: Z_i \to X_i.$$

Es ist $X_i \subseteq X_{i+1}$ und $Z_i \subseteq Z_{i+1}$ und die Restriktion von h_{i+1} auf Z_{i+1} stimmt mit h_i überein. Deshalb definieren die h_i einen Isomorphismus

$$h: \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i.$$

Aus (3) und (4) folgt $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i$ und aus (1) und (2) folgt $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Sei $f: Z \to r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ die bijektive Fortsetzung von h mit $f(u) = t(\mathfrak{p})$ und $f(t) = u(\mathfrak{p})$. Für $i, j \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$X_{ij} := R_X(\frac{L^i \cup \{T\}}{T}) \cap R(\frac{T^j}{a})$$
$$Z_{ij} := R_{E_K^1}(\frac{L^i}{S}) \cap R_{E_K^1}(\frac{S^j, a}{a})$$

Nach Konstruktion von h gilt $h(Z_{ij}) = X_{ij}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Aus (2) folgt $R_X(\frac{L^n \cup \{T\}}{T}) \backslash \{t(\mathfrak{p})\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_{nj}$, und aus (3) folgt $(Z \cap R_{E_K^1}(\frac{L^n}{S})) \backslash \{u\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z_{nj}$.

Da $t(\mathfrak{p}) \in R_X(\frac{L^n \cup \{T\}}{T})$ und $u \in Z \cap R_{E_K^1}(\frac{L^n}{S})$, gilt

(7) $f(Z \cap R_{E_K^1}(\frac{L^n}{S})) = R_X(\frac{L^n \cup \{T\}}{T})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wir schreiben (1) und (4) um in

(8) $\{u(\mathfrak{p})\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (r^{-1}(v(\mathfrak{p})) \backslash R_X(\dfrac{L^n \cup \{T\}}{T}))$

(9) $\{t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z \backslash (Z \cap R_{E_K^1}(\dfrac{L^n}{S})))$

Da $u(\mathfrak{p})$ ein minimaler Punkt von $r^{-1}(v(\mathfrak{p}))$ ist (nach (iii)) und t ein minimaler Punkt von Z ist, folgt aus (7), (8), (9) und dem nachfolgenden Punkt (10), daß f stetig in t und f^{-1} stetig in $u(\mathfrak{p})$ ist. Genauso zeigt man, daß f stetig in u und f^{-1} stetig in $t(\mathfrak{p})$ ist.

(10) Sind Y ein spektraler Raum, y ein minimaler Punkt von Y und $\mathfrak{U}$ eine Menge von konstruierbaren Teilmengen von Y mit $\{y\} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$, so ist $\mathfrak{U}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen von y.

Beispiel 3.7.5. Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Wir versehen A mit der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie, und nehmen an, daß A vollständig in dieser Topologie ist. Sei X der adische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A).
Die triviale Bewertung t von A mit Träger $\mathfrak{m}$ ist der einzige nichtanalytische Punkt von X. Jeder Punkt von X ist eine Primärgeneralisierung von t.
Wir wollen $X_a = X \backslash \{t\}$ näher untersuchen.

(A.1) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A mit $\dim A/\mathfrak{p} = 1$. Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $\operatorname{supp}(x) = \mathfrak{p}$. Der zu x gehörige Bewertungsring $A(x) \subseteq \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ ist endlich über $A/\mathfrak{p}$ und diskret. Versieht man $\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ mit der Bewertungstopologie von $A(x)$, so ist $\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ vollständig und die kanonische Abbildung $A \to \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ offen.

Beweis: Indem wir von A zu $A/\mathfrak{p}$ übergehen, können wir annehmen $\dim A = 1$. Wir wählen ein $s \in A \backslash \{0\}$. Dann ist sA ein Definitionsideal von A. Deshalb ist $\operatorname{Quot}(A) = A_s$ ein vollständiger Tate-Ring, wenn wir $\operatorname{Quot}(A)$ mit der Gruppentopologie versehen, so daß $\{\mathfrak{m}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Die Behauptung folgt nun aus (2.2.10).

Wir setzen

$$Z = \{x \in X \mid \dim A/\operatorname{supp}(x) = 1\}.$$

Nach (A.1) gilt $Z \subseteq (X_a)_{\min}$, $Z \subseteq (X_a)_{\max}$ und $Z \subseteq (X_a)_d := \{x \in X \mid v_x \text{ ist diskret vom Rang 1 }\}$. Nach (3.5.5) ist $(X_a)_d$ c-dicht in X_a. Wir können diese Aussage verschärfen zu

(A.2) Die Menge Z ist c-dicht in X_a. Es gilt sogar: Ist Q eine v-konstruierbare Teilmenge von X mit $Q \cap X_a \neq \emptyset$, so ist $Q \cap Z \neq \emptyset$.

Nach (3.4.9) sind die beiden Aussagen von (A.2) äquivalent.

Beweis: Sei Q eine v-konstruierbare Teilmenge von X mit $Q \cap X_a \neq \emptyset$. Um zu zeigen, daß $Q \cap Z \neq \emptyset$, können wir annehmen

$$Q = \{x \in X \mid x(a_i) \geq x(b_i) \quad \text{und} \quad x(c_i) > x(d_i) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

mit $a_i, b_i, c_i, d_i \in A$. Sei $v \in Q$ mit $ht(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v)) \geq 2$. Wir zeigen: Es gibt ein $w \in Q$ mit $\operatorname{supp}(v) \subseteq \operatorname{supp}(w)$ und $ht(\operatorname{supp}(w)/\operatorname{supp}(v)) = 1$. Da $ht(\mathfrak{m})$ endlich ist, ist damit (A.2) bewiesen.
Es ist $v(d_i) \neq \infty$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist i ein Element von $\{1, \ldots, n\}$ mit $v(b_i) = \infty$, so ist auch $v(a_i) = \infty$, und da wir w so konstruieren werden, daß $\operatorname{supp}(v) \subseteq \operatorname{supp}(w)$, ist dann $w(a_i) = \infty$ und deshalb $w(a_i) \geq w(b_i)$. Wir können also ohne Einschränkung annehmen $v(b_i) \neq \infty$ für $i = 1, \ldots, n$.
Dann können wir in $\operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v))$ die Quotienten $\frac{a_i}{b_i}, \frac{c_i}{d_i}$ bilden. Sei B der Unterring $A/\operatorname{supp}(v)[\frac{a_i}{b_i}, \frac{c_i}{d_i} \mid i = 1, \ldots, n]$ von $\operatorname{Quot}(A/\operatorname{supp}(v))$. Es gilt

(1) Es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}$ von B, so daß $ht(\mathfrak{p}) \geq 2, \frac{c_i}{d_i} \in \mathfrak{p}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v) \subseteq \mathfrak{p}$.

Denn: Sei $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal des Bewertungsrings $A(v)$ von v. Da $B \subseteq A(v)$, ist $\mathfrak{n} \cap B$ ein Primideal von B. Es ist $\frac{c_i}{d_i} \in \mathfrak{n} \cap B$ für $i = 1, \ldots, n$. Weiterhin ist $\mathfrak{n} \cap B \in f^{-1}(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v))$, wobei $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A/\operatorname{supp}(v)$ die kanonische Abbildung ist. Wir unterscheiden drei Fälle.
1. Fall: $\mathfrak{n} \cap B$ hat eine echte Spezialisierung $\mathfrak{p}$ in $f^{-1}(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v))$. Dann ist $(0) \subsetneqq \mathfrak{n} \cap B \subsetneqq \mathfrak{p}$ und deshalb gilt (1).
2. Fall: $\mathfrak{n} \cap B$ hat eine echte Generalisierung $\mathfrak{q}$ in $f^{-1}(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v))$. Dann gilt $(0) \subsetneqq \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{n} \cap B$ und deshalb ist (1) mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cap B$ erfüllt.
3. Fall: $\mathfrak{n} \cap B$ hat keine echte Spezialisierung und keine echte Generalisierung in $f^{-1}(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v))$.
Da der spektrale Raum $f^{-1}(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v))$ nur endlich viele minimale Punkte hat, ist dann $\mathfrak{n} \cap B$ isoliert in $f^{-1}(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v))$. Da A vollständig ist, folgt aus [EGA], II. 6.2.5, daß $B_{\mathfrak{n} \cap B}$ endlich über $A/\operatorname{supp}(v)$ ist. Dann ist $ht(\mathfrak{n} \cap B) \geq 2$, da $ht(\mathfrak{m}/\operatorname{supp}(v)) \geq 2$. Also ist (1) mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cap B$ erfüllt.

(2) Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von B mit $ht(\mathfrak{p}) \geq 2$ gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$ und $ht(\mathfrak{q} \cap A/\operatorname{supp}(v)) = 1$.

Denn: Da nach (2.2.11) $B_{\mathfrak{p}}$ unendlich viele Primideale der Höhe 1 hat, gibt es unendlich viele Primideale $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ und $ht(\mathfrak{q}) = 1$. Sei h das Bild von

$\prod_{i=1}^{n} b_i d_i$ in $A/\mathrm{supp}\,(v)$. Da $h \neq 0$, gibt es nur endlich viele Primideale $\mathfrak{q}$ von B mit $h \in \mathfrak{q}$ und $ht(\mathfrak{q}) = 1$. (Denn ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal von B mit $h \in \mathfrak{q}$ und $ht(\mathfrak{q}) = 1$, so ist $\mathfrak{q}/hB$ ein minimales Primideal von B/hB.) Also gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}, ht(\mathfrak{q}) = 1$ und $h \notin \mathfrak{q}$. Nach Definition von B gilt $B_h = (A/\mathrm{supp}\,(v))_h$. Deshalb hat $\mathfrak{q} \cap (A/\mathrm{supp}\,(v))$ die Höhe 1.

Wir wählen nun gemäß (1) und (2) Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ von B, so daß $\frac{c_i}{d_i} \in \mathfrak{p}$ für $i = 1, \ldots, n, \mathfrak{m}/\mathrm{supp}\,(v) \subseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ und $ht(\mathfrak{q} \cap A/\mathrm{supp}\,(v)) = 1$. Sei u eine diskrete Rang 1 Bewertung von B, so daß $\mathrm{supp}\,(u) = \mathfrak{q}$ und der Bewertungsring von u den lokalen Ring $(B/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ dominiert ([EGA*], 0.6.5.8). Für $w := u \mid A$ gilt $w \in Q, \mathrm{supp}\,(v) \subseteq \mathrm{supp}\,(w)$ und $ht(\mathrm{supp}\,(w)/\mathrm{supp}\,(v)) = 1$.

(A.3) Seien x ein Element von Z und U eine rationale Teilmenge von X mit $x \in U \subseteq X_a$. Dann ist $\{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{O}_X(U)$.

Beweis: Sei $U = R(\frac{T}{s})$ mit $T \subseteq A$ und $s \in A$. Den Körper $K := \mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(x))$ versehen wir mit der Bewertungstopologie von $A(x)$. Die kanonische Abbildung $\varphi: A(\frac{T}{s}) = A_s \to K$ ist stetig. Nach (A.1) ist K vollständig. Deshalb setzt sich φ fort zu einem Morphismus $\hat{\varphi}: \mathcal{O}_X(U) = A(\frac{T}{s})^\wedge \to K$. Da $U \subseteq X_a$, ist $s \in \mathfrak{m}$ und daher $\mathrm{supp}\,(x) \cdot A_s$ ein maximales Ideal von A_s. Also ist φ und damit erst recht $\hat{\varphi}$ surjektiv.

Bemerkung. i) Ist A von gleicher Charakteristik, so gilt auch die Umkehrung von (A.3): Sind x ein Element von X und U eine rationale Teilmenge von X, so daß $x \in U \subseteq X_a$ und $\{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{O}_X(U)$ ist, so ist x ein Element von Z.
Ich weiß nicht, ob dies allgemein gilt.
ii) Der Beweis von (A.3) zeigt, daß $\mathrm{Quot}\,(A/\mathrm{supp}\,(x))$ der Residuenkörper von $\mathcal{O}_{X,x}$ ist für jedes $x \in Z$.

In den folgenden beiden Punkten (A.4) und (A.5) bringen wir X_a mit bekannten analytischen Räumen in Verbindung.

(A.4) i) Seien R ein vollständiger diskreter Rang 1 Bewertungsring und $a \neq 0$ ein Element des maximalen Ideals von R. Den Quotientenkörper K von R versehen wir mit der Bewertungstopologie von R. Sei E_K^n der n-dimensionale Einheitspolyzylinder über K, also $E_K^n = \mathrm{Spa}\,(K\langle U\rangle, K\langle U\rangle^\circ)$ mit $U = (U_1, \ldots, U_n)$. In E_K^n

betrachten wir den abgeschlossenen Polyzylinder $Y = \{x \in E_K^n \mid x(U_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n\}$.
Wir nehmen an

$$A = R[[X_1, \ldots, X_n]].$$

Dann gibt es einen Isomorphismus analytischer Räume

$$X \backslash V(a) \cong \mathrm{int}(Y),$$

wobei $V(a) = \{x \in X \mid a(x) = 0\}$ und $\mathrm{int}(Y)$ das Innere von Y in E_K^n ist.

Beweis: Sei W der analytische Raum zu dem affinoiden Ring $(K\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$, $K\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle^\circ)$. Sei L die Menge $\{a, X_1, \ldots, X_n\}$. Da die (a)-adische und die (L)-adische Topologie des Rings $R[[X_1, \ldots, X_n]][\frac{l}{a} \mid l \in L^i]$ übereinstimmen, erhält man unmittelbar kanonische Isomorphismen

$$\varphi_i \colon R_X(\frac{L^i}{a}) \to R_W(\frac{L^i}{a})$$

$(i \in \mathbb{N})$. Wir haben $R_X(\frac{L^i}{a}) \subseteq R_X(\frac{L^{i+1}}{a})$ und $R_W(\frac{L^i}{a}) \subseteq R_W(\frac{L^{i+1}}{a})$ und φ_{i+1} ist die Restriktion von φ_i. Deshalb definieren die φ_i einen Isomorphismus

$$\varphi \colon \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_X(\frac{L^i}{a}) \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_W(\frac{L^i}{a}).$$

Es gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_X(\frac{L^i}{a}) = X \backslash V(a)$, und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_W(\frac{L^i}{a})$ ist das Innere von $\{w \in W \mid w(X_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n\}$ in W (nach (3.4.11 i)). Die Behauptung folgt nun aus (3.5.10 i).

Bemerkung. Sei $\varphi \colon X \backslash V(a) \to \mathrm{int}(Y)$ der Isomorphismus aus (A.4). Aus (A.3) folgt $\varphi(Z \backslash V(a)) \subseteq \mathrm{int}(Y) \cap \mathrm{Max}_v K\langle U\rangle$. Es gilt aber sogar $\varphi(Z \backslash V(a)) = \mathrm{int}(Y) \cap \mathrm{Max}_v K\langle U\rangle$ (vgl. Bemerkung im Anschluß von (A.3)).

(A.5) Sei k ein Körper. Wir nehmen an

$$A = k[[X_1, \ldots, X_n]].$$

In X haben wir die rationalen Teilmengen $R(\frac{X_1, \ldots, X_n}{X_i}), i = 1, \ldots, n$, die X_a überdecken. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es einen Isomorphismus analytischer Räume

$$R(\frac{X_1,\ldots,X_n}{X_i}) \cong E^{n-1}_{k((T))},$$

wobei der Laurentreihenkörper $k((T))$ mit der Topologie der kanonischen Bewertung von $k((T))$ versehen ist.

Beweis: Wir schreiben $k[[X_1,\ldots,X_n]] = k[[X_1]][[X_2,\ldots,X_n]]$. Nach dem Beweis von (A.4) ist $R(\frac{X_1,\ldots,X_n}{X_1})$ isomorph zu der rationalen Teilmenge $R_E(\frac{X_1,U_2,\ldots,U_n}{X_1})$ von E, wobei $E = E^{n-1}_{k((X_1))}$ und $U_2,\ldots,U_n$ die Koordinatenfunktionen von E sind. Die Räume E und $R_E(\frac{X_1,U_2,\ldots,U_n}{X_1})$ sind isomorph.

Ist A in Potenzreihenring über einem Körper, so hat nach (A.5) jeder Punkt von X_a eine offene Umgebung, die ein geometrischer Raum ist. Im allgemeinen ist jedoch X_a kein geometrischer Raum, wie die folgende Rechnung zeigt.

(A.6) Ist $A = k[[S,T]]$ der Potenzreihenring in zwei Variablen über einem Körper, so gilt

i) Die kanonische Abbildung $A \to \mathcal{O}_X(X_a)$ ist ein Isomorphismus topologischer Ringe. Also hat $\mathcal{O}_X(X_a)$ keine topologisch nilpotente Einheit und deshalb ist X_a kein geometrischer Raum.

ii) Es ist $H^1(X_a,\mathcal{O}_X) \neq 0$. Deshalb ist X_a nicht affinoid.

Beweis: Wir betrachten die topologischen Ringe $A(\frac{S,T}{S}), A(\frac{S,T}{T}), A(\frac{S,T}{S},\frac{S,T}{T})$. Für die Lokalisationen A_S, A_T, A_{ST} können wir schreiben

$$A_S = \{\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}S^iT^j \mid a_{ij}\in k \quad \text{und es gibt ein} \quad n\in\mathbb{Z},$$
$$\text{so daß} \quad a_{ij}=0 \quad \text{für} \quad (i,j)\notin [n,\infty[\times[0,\infty[\}$$
$$A_T = \{\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}S^iT^j \mid a_{ij}\in k \quad \text{und es gibt ein} \quad n\in\mathbb{Z},$$
$$\text{so daß} \quad a_{ij}=0 \quad \text{für} \quad (i,j)\notin [0,\infty[\times[n,\infty[\}$$
$$A_{ST} = \{\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}S^iT^j \mid a_{ij}\in k \quad \text{und es gibt ein} \quad n\in\mathbb{Z},$$
$$\text{so daß} \quad a_{ij}=0 \quad \text{für} \quad (i,j)\notin [n,\infty[\times[n,\infty[\}.$$

Die Mengen $\{\mathfrak{m}^nA[\frac{T}{S}] \mid n\in\mathbb{N}\}, \{\mathfrak{m}^nA[\frac{S}{T}] \mid n\in\mathbb{N}\}, \{\mathfrak{m}^nA[\frac{T}{S},\frac{S}{T}] \mid n\in\mathbb{N}\}$ bilden jeweils ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von $A(\frac{S,T}{S}), A(\frac{S,T}{T}), A(\frac{S,T}{S},\frac{S,T}{T})$. Es gilt

$$\mathfrak{m}^nA[\tfrac{T}{S}] = \{\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}S^iT^j \in A_S \mid a_{ij}=0 \quad \text{für} \quad i+j<n\}$$

$$\mathfrak{m}^n A[\tfrac{S}{T}] = \{ \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij} S^i T^j \in A_T \mid a_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i+j<n \}$$

$$\mathfrak{m}^n A[\tfrac{T}{S}, \tfrac{S}{T}] = \{ \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij} S^i T^j \in A_{ST} \mid a_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i+j<n \}$$

Wir betrachten die Sequenz stetiger A-Modulhomomorphismen

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A(\frac{S,T}{S}) \times A(\frac{S,T}{T}) \xrightarrow{\beta} A(\frac{S,T}{S}, \frac{S,T}{T})$$

mit $\alpha(a) = (a,a)$ und $\beta(a,b) = a - b$. Es gilt

(1) Die Sequenz $(*)$ ist exakt, und α und β sind strikt.

(2) $\mathrm{im}\,(\beta)$ ist nicht dicht in $A(\frac{S,T}{S}, \frac{S,T}{T})$.

Begründung: Die Exaktheit von $(*)$ ist klar. Aus $\mathfrak{m}^n = \alpha^{-1}(\mathfrak{m}^n A[\frac{T}{S}] \times \mathfrak{m}^n A[\frac{S}{T}])$ folgt die Striktheit von α. Da $\beta(\mathfrak{m}^n A[\frac{T}{S}] \times \mathfrak{m}^n A[\frac{S}{T}]) = \mathfrak{m}^n A[\frac{T}{S}, \frac{S}{T}]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist β offen. Insbesondere ist $\mathrm{im}\,(\beta)$ abgeschlossen, aber es ist $S^{-1}T^{-1} \notin \mathrm{im}\,(\beta)$.

Wir betrachten nun die Überdeckung $\{R(\frac{S,T}{S}), R(\frac{S,T}{T})\}$ von X_a. Es gilt $\mathcal{O}_X(R(\frac{S,T}{S})) = A(\frac{S,T}{S})^\wedge$, $\mathcal{O}_X(R(\frac{S,T}{T})) = A(\frac{S,T}{T})^\wedge$ und $\mathcal{O}_X(R(\frac{S,T}{S}) \cap R(\frac{S,T}{T})) = A(\frac{S,T}{S}, \frac{S,T}{T})^\wedge$. Aus (1) und [B], III.2.12 Lemma 2 folgt, daß die Vervollständigung von $(*)$ eine exakte Sequenz mit strikten Differentialen ist. Hieraus folgt (i). Da nach (2) $\hat{\beta}$ nicht surjektiv ist, gilt $H^1(X_a, \mathcal{O}_X) \neq 0$.

(A.7) Sei a ein Element von A, so daß es einen diskreten Rang 1 Bewertungsring $(R, \mathfrak{n})$ und einen lokalen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to A$ gibt, so daß $a \in \varphi(\mathfrak{n})$ und $A/\mathfrak{m}$ separabel über $R/\mathfrak{n}$ ist. Dann ist $X \backslash V(a)$ ein geometrischer Raum.

Beweis: Nach [M], Theorem 83 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S & \to & S/\mathfrak{n}S & \xrightarrow{\sim} & A/\mathfrak{m} \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ R & & \xrightarrow[\varphi]{} & & A, \end{array}$$

wobei S ein diskreter Rang 1 Bewertungsring ist. Da $S/\mathfrak{n}S$ separabel über $R/\mathfrak{n}$ und damit glatt über $R/\mathfrak{n}$ ist ([M], 28. I), ist S formal glatt über R in der $\mathfrak{n}S$-adischen Topologie ([M], Theorem 82). Deshalb gibt es einen Ringhomomorphismus $\psi\colon S \to A$, der das obige Diagramm kommutativ ergänzt. Indem wir $\varphi\colon R \to A$ durch $\psi\colon S \to A$ ersetzen, können wir annehmen $R/\mathfrak{n} = A/\mathfrak{m}$.

Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$. Sei $\sigma\colon R[[X_1, \dots, X_n]] \to A$ der stetige R-Algebrenhomomorphismus mit $\sigma(X_i) = x_i$ für $i = 1, \dots, n.\sigma$ ist surjektiv.

Sei Y der adische Raum zu dem affinoiden Ring (B, B), wobei $B\colon = R[[X_1, \dots, X_n]]$

und B mit der $(\mathfrak{n}, X_1, \ldots, X_n)$-adischen Topologie versehen ist. Sei b ein Element von $\mathfrak{n}$ mit $\varphi(b) = a$. Nach (A.4) ist $Y \backslash V(b)$ ein geometrischer Raum. σ induziert eine abgeschlossene Einbettung $f: X \to Y$. Da $f^{-1}(V(b)) = V(a)$, ist $X \backslash V(a)$ ein abgeschlossener Teilraum von $Y \backslash V(b)$. Hieraus folgt, daß $X \backslash V(a)$ ein geometrischer Raum ist.

(A.8) i) Ist A von gleicher Charakteristik, so ist $X \backslash V(f)$ ein geometrischer Raum für jedes $f \in \mathfrak{m}$; insbesondere hat jeder Punkt von X_a eine offene Umgebung, die ein geometrischer Raum ist.

ii) Ist p die Charakteristik von $A/\mathfrak{m}$, so ist $X \backslash V(p)$ ein geometrischer Raum.

iii) Ist $p := \mathrm{char}(A/\mathfrak{m}) > 0$ und $\mathrm{char}(A/\mathfrak{p}) = 0$ für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von A, so hat kein Punkt von $V(p)$ eine offene Umgebung in X, die ein geometrischer Raum ist.

Beweis: i) A ist eine k-Algebra mit $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p$. Zu jedem $f \in \mathfrak{m}$ haben wir den k-Algebrenhomomorphismus $\varphi: k[[T]] \to A$ mit $\varphi(T) = f$. Die Behauptung folgt nun aus (A.7).

ii) Wir können annehmen $p > 0$. Wir haben dann den lokalen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}} \to A$. Mit (A.7) erhalten wir die Behauptung.

iii) Sei $x \in V(p)$ gegeben. Sei U eine rationale Umgebung von x in X. Da $\mathcal{O}_X(U)$ flach über A ist ((3.6.5)), hat $\mathcal{O}_X(U)$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{char}(\mathcal{O}_X(U)/\mathfrak{p}) = 0$. Da $x \in U$, hat $\mathcal{O}_X(U)$ auch ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{char}(\mathcal{O}_X(U)/\mathfrak{p}) > 0$. Deshalb kann $\mathcal{O}_X(U)$ keine Algebra über einem Körper sein und daher ist U kein geometrischer Raum.

Definition 3.8.1. Ein Morphismus $f: X \to Y$ zwischen adischen Räumen heißt adisch, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene affinoide Umgebung U von x in X und eine offene affinoide Umgebung V von $f(x)$ in Y mit $f(U) \subseteq V$ gibt, so daß der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ adisch ist.

Entsprechend wie in (3.3.22) beweist man

Proposition 3.8.2. Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Morphismen zwischen adischen Räumen.
i) Sind f und g adisch, so ist $g \circ f$ adisch.
ii) Ist $g \circ f$ adisch, so ist f adisch.
iii) Sind U und V offene Teilmengen von X und Y mit $f(U) \subseteq V$ und ist f adisch, so ist die Restriktion $U \to V$ adisch.

Proposition 3.8.3. Sei $f: X \to Y$ ein adischer Morphismus zwischen affinoiden adischen Räumen. Dann ist $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ adisch.

Beweis: Da der Ringhomomorphismus $g := f^*: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ stetig ist, gibt es Definitionstupel (A, I) und (B, J) von $\mathcal{O}_Y(Y)$ und $\mathcal{O}_X(X)$ mit $g(A) \subseteq B$ und $g(I) \subseteq J$. Zu zeigen ist, daß $I \cdot B$ und J dasselbe Radikalideal in B haben. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von B mit $I \cdot B \subseteq \mathfrak{p}$ und $J \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Seien $(U_k \mid k \in K)$ und $(V_k \mid k \in K)$ Familien offener affinoider Teilräume von X und Y, so daß $X = \bigcup_{k \in K} U_k, f(U_k) \subseteq V_k$ und $\mathcal{O}_Y(V_k) \to \mathcal{O}_X(U_k)$ adisch ist für jedes $k \in K$. Wir wählen endliche Familien $(R_l \mid l \in L)$ und $(S_l \mid l \in L)$ offener rationaler Teilmengen von X und Y und eine Abbildung $\varphi: L \to K$, so daß $R_l \subseteq U_{\varphi(l)}, S_l \subseteq V_{\varphi(l)}$ und $f(R_l) \subseteq S_l$ für jedes $l \in L$ und $X = \bigcup_{l \in L} R_l$. Da $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(R_l)$ adisch ist für jedes $l \in L$, folgt aus (2.3.30 ii), daß $\mathcal{O}_X(U_{\varphi(l)}) \to \mathcal{O}_X(R_l)$ adisch ist für jedes $l \in L$. Nach (2.3.21 ii) ist $\mathcal{O}_Y(V_{\varphi(l)}) \to \mathcal{O}_X(R_l)$ adisch und somit ist nach (2.3.30 ii) $\mathcal{O}_Y(S_l) \to \mathcal{O}_X(R_l)$ adisch. Wieder mit (2.3.21 ii) erhalten wir, daß $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(R_l)$ adisch ist für jedes $l \in L$.

Nach (3.1.11) gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von $\mathcal{O}_X(X)$ mit $\mathfrak{q} \cap B = \mathfrak{p}$. Nach (3.6.5 i) und (3.2.5) ist $\mathcal{O}_X(X) \to \prod_{l \in L} \mathcal{O}_X(R_l)$ treuflach. Deshalb gibt es ein $i \in L$ und ein Primideal $\mathfrak{r}$ von $\mathcal{O}_X(R_i)$ mit $h^{-1}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{q}$, wobei h die Abbildung $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(R_i)$

ist. Nach (ii) und (i) aus (2.3.20) gibt es einen Definitionsring C von $\mathcal{O}_X(R_i)$, so daß $h(B) \subseteq C$ und $J \cdot C$ ein Definitionsideal von C ist. $\mathfrak{t} := \mathfrak{r} \cap C$ ist ein Primideal von C, das über $\mathfrak{p}$ liegt. Da $I \cdot B \subseteq \mathfrak{p}$ und $J \not\subseteq \mathfrak{p}$, ist $I \cdot C \subseteq \mathfrak{t}$ und $J \cdot C \not\subseteq \mathfrak{t}$. Da aber $J \cdot C$ ein Definitionsideal von C ist und nach (2.3.20 i) $I \cdot C$ ebenfalls ein Definitionsideal von C ist, stehen $I \cdot C \subseteq \mathfrak{t}$ und $J \cdot C \not\subseteq \mathfrak{t}$ im Widerspruch.

Korollar 3.8.4. Seien X ein affinoider adischer Raum und Y eine offene affinoide Teilmenge von X. Dann gilt
i) $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(Y)$ ist adisch.
ii) Für jede rationale Teilmenge U von X ist $U \cap Y$ eine rationale Teilmenge von Y.

Beweis: Nach (3.8.2 iii) ist die Inklusion $Y \to X$ adisch. (i) folgt somit aus (3.8.3). (ii) folgt aus (i) und (3.1.18).

Korollar 3.8.5. Seien X ein affinoider adischer Raum und U eine offene affinoide Teilmenge von X. Dann gilt
i) $\mathcal{O}_X(U)$ ist flach über $\mathcal{O}_X(X)$.
ii) Hat $\mathcal{O}_X(X)$ einen noetherschen Definitionsring, über dem $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt ist, so ist $\mathcal{O}_X(U)$ noethersch.

Beweis: Sei $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine Überdeckung von U durch rationale Teilmengen von X. Nach (3.8.4 ii) ist jedes U_i auch eine rationale Teilmenge von U. Wir haben die Ringhomomorphismen $\mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(U_i)$. Nach (3.6.11) ist $\operatorname{Spec}(\psi)$ surjektiv. Deshalb folgen (i) und (ii) aus (3.6.5).

Proposition 3.8.6. Sei X ein adischer Raum, der einen adischen Morphismus in einen affinoiden adischen Raum besitzt. Dann ist $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)^\circ$ eine Garbe auf X.

Beweis: Nach (i) und (ii) aus (3.2.2) genügt es zu zeigen

(1) Sind V eine offene Teilmenge von X und U eine offene affinoide Teilmenge von V, so ist die Restriktionsabbildung $\varphi: \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ beschränkt.

Wir zeigen (1). Sei $f: X \to Y$ ein adischer Morphismus von X in einen affinoiden adischen Raum Y und seien $\psi: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(V)$ und $\sigma: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(U)$ die durch f induzierten Ringhomomorphismen. Seien B eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{O}_X(V)$ und E eine Nullumgebung von $\mathcal{O}_X(U)$, die additiv und multiplikativ abgeschlossen ist. Zu zeigen ist, daß es eine Nullumgebung F von $\mathcal{O}_X(U)$ gibt mit $F \cdot \varphi(B) \subseteq E$. Wir wählen Nullumgebungen G und H von $\mathcal{O}_X(V)$ mit $\varphi(G) \subseteq E$ und $H \cdot B \subseteq G$. Sei

I eine Nullumgebung von $\mathcal{O}_Y(Y)$ mit $\psi(I) \subseteq H$. Es ist dann $\sigma(I) \cdot \varphi(B) \subseteq E$. Da σ adisch ist, ist $F := E \cdot \sigma(I)$ eine Nullumgebung von $\mathcal{O}_X(U)$. Es ist $F \cdot \varphi(B) \subseteq E \cdot E \subseteq E$.

Beispiel. i) Die Kategorie der adischen Räume hat ein finales Objekt, nämlich $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, wobei $\mathbb{Z}$ die diskrete Topologie trägt. Sei X ein adischer Raum. Der Morphismus $X \to \mathrm{Spa}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ ist genau dann adisch, wenn für jede offene affinoide Teilmenge U von X die Topologie auf $\mathcal{O}_X(U)$ diskret ist. Wie in (3.6) festgestellt, bedeutet dies, daß jeder Punkt von X nichtanalytisch ist.
ii) Sei X der in (3.3.24) konstruierte adische Raum. Nach (3.8.6) gibt es keinen adischen Morphismus von X in einen affinoiden adischen Raum.

Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der adischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}^\circ)$, wobei $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie versehen ist. Dann ist $\mathcal{O}^+ \neq \mathcal{O}^\circ$. Man vergleiche jedoch mit (iii) aus der nachfolgenden Proposition.

Proposition 3.8.7. i) Seien A ein f-adischer Ring und B ein noetherscher Definitonsring von A. Hat A einen topologisch nilpotenten Nichtnullteiler, so gilt $A^\circ = B^c$.
ii) Sei $f: A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen vollständigen f-adischen Ringen, der topologisch von endlichem Typ ist. A habe einen noetherschen Definitionsring und B habe einen topologisch nilpotenten Nichtnullteiler. Dann gibt es genau einen Ganzheitsring B^+ von B, so daß $f: (A, A^\circ) \to (B, B^+)$ ein Ringhomomorphismus affinoider Ringe ist, der topologisch von endlichem Typ ist, nämlich $B^+ = B^\circ$.
iii) Seien A ein f-adischer Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, und $\mathcal{O}$ die Garbe der adischen Funktionen auf $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$. Hat A einen topologisch nilpotenten Nichtnullteiler, so gilt $\mathcal{O}^+ = \mathcal{O}^\circ$.

Beweis: Analog zu den entsprechenden Aussagen für Tate-Ringe in (2.4.16), (2.4.17), (3.5.9).

Für jeden Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ gilt $f(X_{na}) \subseteq Y_{na}$.

Proposition 3.8.8. Ein Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ ist genau dann adisch, wenn $f(X_a) \subseteq Y_a$.

Beweis: Ohne Einschränkung sind X und Y affinoid. Ist f adisch, so gilt $f(X_a) \subseteq Y_a$ nach (3.1.9 ii). Es gelte nun $f(X_a) \subseteq Y_a$. Sei $g: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ der durch f induzierte Ringhomomorphismus. Seien (A, I) und (B, J) Definitionstupel von $\mathcal{O}_Y(Y)$ und $\mathcal{O}_X(X)$ mit $g(A) \subseteq B$ und $g(I) \subseteq J$. Zu zeigen ist, daß $I \cdot B$ und

J dasselbe Radikal in B haben. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von B mit $I \cdot B \subseteq \mathfrak{p}$ und $J \not\subseteq \mathfrak{p}$. Nach (3.1.11) und (3.6.11) gibt es ein $x \in X$ mit $\mathfrak{p} = \{b \in B \mid b(x) = 0\}$. Es ist $x \in X_a$ und $f(x) \in Y_{na}$, Widerspruch.

Proposition 3.8.9. Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus adischer Räume und x ein Punkt von X. Ist f adisch, so bildet f die Menge der Sekundärgeneralisierungen von x surjektiv ab auf die Menge der Sekundärgeneralisierungen von $f(x)$.

Beweis: Ist $x \in X_a$, so ist $f(x) \in Y_a$ und die Behauptung folgt aus (3.3.11). Ist $x \in X_{na}$, so ist die Behauptung klar.

Seien X ein analytischer Raum und Y ein adischer Raum. Unter einem Morphismus $f: X \to Y$ verstehen wir einen Morphismus der Kategorie $(VL)_{top}$. f heißt adisch, wenn (3.8.1) entsprechend erfüllt ist. Die Propositionen (3.8.2), (3.8.3), (3.8.8) und (3.8.9) gelten dann analog. (Den Beweis von (3.8.3) kann man wörtlich übernehmen. Zum Beweis von (3.8.8) benutze man (3.8.3) und (2.2.8).)

Seien X ein analytischer oder adischer Raum und x ein Punkt von X. Den Residuenkörper von $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichnen wir mit $k(x)$ und den durch v_x gegebenen Bewertungsring von $k(x)$ bezeichnen wir mit $k(x)^+$.

Lemma 3.8.10. Man kann $k(x)$ auf genau eine Weise zu einem f-adischen Körper (siehe (2.3.2.(5))) machen, so daß für jede offene affinoide Umgebung U von x in X die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_X(U) \to k(x)$ adisch ist. Ist $x \in X_a$, so ist die Topologie auf $k(x)$ die Bewertungstopologie von $k(x)^+$, und ist $x \in X_{na}$, so ist die Topologie auf $k(x)$ diskret.

Beweis: Es ist klar, daß für die angegebenen Topologien auf $k(x)$ die Behauptung gilt. Es ist noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $k(x)$ mit einer Topologie versehen, so daß (3.8.10) gilt. Für jede offene affinoide Umgebung U von x sei φ_U die Abbildung $\mathcal{O}_X(U) \to k(x)$. Ist $x \in X_{na}$, so ist die Topologie auf $k(x)$ diskret, denn für jede Nullumgebung H von $\mathcal{O}_X(U)$ ist $H \cdot k(x)$ eine Nullumgebung von $k(x)$. Sei nun $x \in X_a$. Die Topologie auf $k(x)$ ist nicht diskret, denn sonst ist φ_U nicht stetig. Also wird die Topologie auf $k(x)$ durch einen Rang 1 Bewertungsring A gegeben. Da $\mathcal{O}_X^+(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U)^\circ$, gilt $\varphi_U(\mathcal{O}_X^+(U)) \subseteq k(x)^\circ = A$. Es ist $k(x)^+ = \bigcup_U \varphi_U(\mathcal{O}_X^+(U))$, wobei U alle offenen affinoiden Umgebungen von x durchläuft. Also gilt $k(x)^+ \subseteq A$.

Im folgenden versehen wir $k(x)$ immer mit der Topologie aus (3.8.10). Es ist

$$\kappa(x) := (k(x); k(x)^+)$$

ein affinoider Ring. Zu $\kappa(x)$ haben wir den analytischen bzw. adischen Raum $\operatorname{Spa}\kappa(x)$, dessen zugrundeliegender topologische Raum eine Kette ist. Wir haben einen kanonischen Morphismus $\psi\colon \operatorname{Spa}\kappa(x) \to X$, der adisch ist. ψ bildet den abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spa}\kappa(x)$ auf x ab, das Bild von ψ ist die Menge der Sekundärgeneralisierungen von x und ψ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild. (Nach (3.8.9) ist im(ψ) das kleinst mögliche Bild eines adischen Morphismus, das x enthält.)

Lemma 3.8.11. Seien X ein adischer Raum und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe von endlichem Typ auf X. Man kann $\mathcal{F}$ auf genau eine Weise zu einer Garbe mit Werten in der Kategorie der topologischen Gruppen machen, so daß für jede offene affinoide Teilmenge U von X, für die $\mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$ und $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(U)$-Modul ist, die Topologie auf $\mathcal{F}(U)$ die f-adische Topologie bezüglich $\mathcal{O}(U)$ ist.

Beweis: Wir benutzen (3.6.2). Sei $\mathfrak{U}$ die Menge aller offenen affinoiden Teilmengen von X, so daß $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(U)$-Modul ist und $\mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$. Da $\mathfrak{U}$ eine Basis der Topologie von X ist, gilt die Eindeutigkeitsaussage in (3.8.11). Für jedes $U \in \mathfrak{U}$ sei T_U die Topologie auf $\mathcal{F} \mid U$, so daß $T_U(V)$ die f-adische Topologie auf $\mathcal{F}(V)$ bezüglich $\mathcal{O}(V)$ ist für jede rationale Teilmenge V von U. Es gilt

(1) Sind U und V Elemente von $\mathfrak{U}$ mit $U \subseteq V$, so ist $T_V \mid U = T_U$.

Denn: Nach (3.8.4 ii) ist jede rationale Teilmenge von V, die in U liegt, auch eine rationale Teilmenge von U.

(2) Für beliebige Elemente U und V von $\mathfrak{U}$ gilt $T_U \mid U \cap V = T_V \mid U \cap V$.

Denn: Es ist $\{W \in \mathfrak{U} \mid W \subseteq U \cap V\}$ eine Überdeckung von $U \cap V$. Deshalb folgt (2) aus (1).

Aus (2) folgt die Existenzaussage von (3.8.11).

Ein adischer Raum X heißt quasisepariert, wenn der Durchschnitt zwei offener quasikompakter Teilmengen von X quasikompakt ist. Ist $\mathfrak{U}$ eine offene affinode Überdeckung von X, so ist X genau dann quasisepariert, wenn $U \cap V$ quasikompakt ist für alle $U, V \in \mathfrak{U}$.

Ein Morphismus adischer Räume $f\colon X \to Y$ heißt quasikompakt, wenn $f^{-1}(U)$ quasikompakt ist für jede offene quasikompakte Teilmenge U von Y.

Bemerkung 3.8.12. i) Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus affinoider adischer Räume und U eine offene quasikompakte Teilmenge von Y. Im allgemeinen ist $f^{-1}(U)$ nicht quasikompakt. Ist jedoch U abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen, so ist $f^{-1}(U)$ quasikompakt nach (3.6.3 iii).
ii) Nach (3.1.9) ist ein adischer Morphismus zwischen affinoiden Räumen quasikompakt.
iii) Für einen adischen Morphismus $f: X \to Y$ zwischen adischen X und Y gilt wegen (ii)

a) Ist $\mathfrak{U}$ eine offene affinoide Überdeckung von Y, so daß $f^{-1}(U)$ quasikompakt ist für jedes $U \in \mathfrak{U}$, so ist f quasikompakt.
b) Ist Y quasisepariert, so ist $V \cap f^{-1}(U)$ quasikompakt für beliebige offene quasikompakte Teilmenge V und U von X und Y. Also ist f quasikompakt, wenn X quasikompakt und Y quasisepariert ist.

Definition 3.8.13. i) Ein Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ heißt lokal von endlichem Typ, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene affinoide Umgebung U von x in X und eine offene affinoide Umgebung V von $f(x)$ in Y mit $f(U) \subseteq V$ gibt, so daß der Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)) \to (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ topologisch von endlichem Typ ist.
ii) Ein Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ heißt von endlichem Typ, wenn er lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

Es gilt wieder

Proposition 3.8.14. Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Morphismen adischer Räume

i) Sind f und g lokal von endlichem Typ, so ist $g \circ f$ lokal von endlichem Typ.
ii) Ist $g \circ f$ lokal von endlichem Typ, so ist f lokal von endlichem Typ.
iii) Sind U und V offene Teilmengen von X und Y mit $f(U) \subseteq V$ und ist f lokal von endlichem Typ, so ist die Restriktion $U \to V$ lokal von endlichem Typ.

Satz 3.8.15. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus affinoider adischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist. Dann ist $(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))$ topologisch von endlichem Typ.

Wir beweisen (3.3.23) und (3.8.15) gemeinsam. Ähnlich wie im Beweis von (3.8.3) zeigt man, daß es eine Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X gibt, so daß jedes $V \in \mathfrak{V}$ rational ist und $(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\mathcal{O}_X(V), \mathcal{O}_X^+(V))$ topologisch von endlichem Typ ist für jedes $V \in \mathfrak{V}$. Gemäß (3.6.3) gibt es $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $\mathcal{O}_X(X) = (f_0, \ldots, f_n)$

und die Überdeckung $\{U_0,\ldots,U_n\}$ von X die Überdeckung $\mathfrak{V}$ verfeinert, wobei $U_i = R(\frac{f_0,\ldots,f_n}{f_i})$ für $i = 0,\ldots,n$. Dann ist $(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\mathcal{O}_X(U_i),\mathcal{O}_X^+(U_i))$ topologisch von endlichem Typ für jedes $i \in \{0,\ldots,n\}$.

Wir setzen $A = (\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_Y^+(Y)), B = (\mathcal{O}_X(X),\mathcal{O}_X^+(X))$ und $B_i = (\mathcal{O}_X(U_i), \mathcal{O}_X^+(U_i))$ für $i = 0,\ldots,n$. Nach (2.4.13) faktorisiert für jedes $i \in \{0,\ldots,n\}$ die Abbildung $A \to B_i$ über eine Quotientenabbildung

$$\varphi_i\colon A\langle X_{i1},\ldots,X_{im}\rangle_{T_i} \to B_i,$$

wobei $T_i = (T_{i1},\ldots,T_{im})$ und jedes T_{ik} eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}$ ist, so daß $T_{ik}\cdot\tilde{A}$ offen ist. (Wählen wir m groß genug, so können wir m unabhängig von i wählen.) Es ist B_i die Vervollständigung des affinoiden Rings $B(\frac{f_0,\ldots,f_n}{f_i})$. Aufgrund des nachfolgenden Lemmas (3.8.16) können wir annehmen, daß $\varphi_i(X_{ik})$ im Bild $\tilde{B}[\frac{1}{f_i}]$ von $B(\frac{f_0,\ldots,f_n}{f_i})^\sim$ in $\tilde{B}_i$ liegt ($i = 0,\ldots,n, k = 1,\ldots,m$). Wir schreiben

$$\varphi_i(X_{ik}) = \frac{v_{ik}}{f_i^l} \quad \text{mit} \quad v_{ik} \in \tilde{B} \tag{1}$$

(Auch hier wählen wir l unabhängig von i,k.) Für den ganzen Abschluß $B^+[\frac{f_0}{f_i},\ldots,\frac{f_n}{f_i}]^c$ von $B^+[\frac{f_0}{f_i},\ldots,\frac{f_n}{f_i}]$ in $\tilde{B}[\frac{1}{f_i}]$ gilt $B_i^+ \cap \tilde{B}[\frac{1}{f_i}] = B^+[\frac{f_0}{f_i},\ldots,\frac{f_n}{f_i}]^c$ (nach (2.4.3)). Für jedes $t \in T_{ik}$ ist $t\cdot\varphi_i(X_{ik}) \in B_i^+$ (nach (2.4.6 iv)). Deshalb ist $a := t\cdot\varphi_i(X_{ik})$ in $B^+[\frac{f_0}{f_i},\ldots,\frac{f_n}{f_i}]^c$ enthalten und wir haben eine ganze Gleichung

$$a^r + b_1a^{r-1} + \ldots + b_r = 0 \in \tilde{B}_i \tag{2}$$

mit $b_1,\ldots,b_r \in B^+[\frac{f_0}{f_i},\ldots,\frac{f_n}{f_i}]$. (Wieder wählen wir r unabhängig von i,k,t.) Für jedes $j \in \{1,\ldots,r\}$ schreiben wir

$$b_j = p_\gamma(\frac{f_0}{f_i},\ldots,\frac{f_n}{f_i}), \tag{3}$$

wobei p_γ ein Polynom in $(n+1)$ Variablen über B^+ ist und $\gamma = (i,k,t,j) \in \{0,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}\times T_{ik}\times\{1,\ldots,r\}$. Die Koeffizienten von p_γ bezeichnen wir mit $p_{\gamma1},\ldots,p_{\gamma s}$ (s unabhängig von γ), also

$$p_{\gamma u} \in B^+ \quad \text{für} \quad u = 1,\ldots,s. \tag{4}$$

Wir wählen $g_0, \ldots, g_n \in \tilde{B}$ mit $g_0 f_0 + \ldots + g_n f_n = 1$. Weiterhin wählen wir endliche Teilmengen $T(v_{ik}), T(p_{\gamma u}), T(f_d), T(g_e)$ von $\tilde{A}$, die jeweils ein offenes Ideal von $\tilde{A}$ erzeugen, und so daß $v_{ik} \cdot T(v_{ik}) \subseteq B^+, T(p_{\gamma u}) = \{1\}, f_d \cdot T(f_d) \subseteq B^+, g_e \cdot T(g_e) \subseteq B^+$, wobei $(i,k) \in \{0,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}, d \in \{0,\ldots,n\}, e \in \{0,\ldots,n\}, \gamma = (i,k,t,j) \in \{0,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\} \times T_{ik} \times \{1,\ldots,r\}$ und $u \in \{1,\ldots,s\}$. Nach (2.4.6 iv) und (4) haben wir einen stetigen Ringhomomorphismus über A

$$\psi: A\langle V_{ik}, P_{\gamma u}, F_d, G_e \rangle_T \to B$$

($V_{ik}, P_{\gamma u}, F_d, G_e$ sind Variablen) mit $\psi(V_{ik}) = v_{ik}, \psi(P_{\gamma u}) = p_{\gamma u}, \psi(F_d) = f_d$, $\psi(G_e) = g_e, T = (T(v_{ik}), T(p_{\gamma u}), T(f_d), T(g_e))$ und $(i,k), (\gamma, u), d, e$ die eben beschriebenen Mengen durchlaufen. Mit D bezeichnen wir den affinoiden Ring $A\langle V_{ik}, P_{\gamma u}, F_d, G_e \rangle_T / \ker(\psi)$. Die Abbildung ψ faktorisiert über den stetigen Ringhomomorphismus

$$\sigma: D \to B$$

Sei Z der adische Raum zu dem affinoiden Ring D. Sei

$$h: X \to Z$$

der durch σ gegebene Morphismus. Mit $\bar{v}_{ik}, \bar{p}_{\gamma u}, \bar{f}_d, \bar{g}_e$ bezeichnen wir die Bilder von $V_{ik}, P_{\gamma u}, F_d, G_e$ in $\tilde{D}$. Da $1 - \sum_{i=0}^{n} F_i \cdot G_i$ in $\ker(\psi)$ liegt, erzeugen $\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_n$ das Einheitsideal von $\tilde{D}$. Deshalb haben wir die rationalen Teilmengen

$$W_i = R(\frac{\bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_n}{\bar{f}_i})$$

von Z $(i = 0, \ldots, n)$, die Z überdecken. Wir setzen $D_i = (\mathcal{O}_Z(W_i), \mathcal{O}_Z^+(W_i))$ für $i = 0, \ldots, n$. Es ist $h^{-1}(W_i) = U_i$. Wir werden zeigen, daß für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ der durch h induzierte Ringhomomorphismus

$$\sigma_i: D_i \to B_i$$

eine Quotientenabbildung ist. Nach (3.6.25) und (3.6.27) ist dann σ eine Quotientenabbildung und damit ist (3.8.15) bewiesen. (N.B. Da σ injektiv ist, erhalten wir, daß σ ein Isomorphismus ist.)

Wir fixieren ein $i \in \{0, \ldots, n\}$. Seien E der affinoide Ring $D_i / \ker(\sigma_i)$ und $\lambda: D_i \to E$ die kanonische Abbildung.

Zunächst zeigen wir

(5) Für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ und jedes $t \in T_{ik}$ gilt

$$t \cdot \lambda\left(\frac{\bar{v}_{ik}}{\bar{f}_i^l}\right) \in E^+$$

Beweis von (5): Wir fixieren ein $k \in \{1, \dots, m\}$ und ein $t \in T_{ik}$. Wir setzen

$$\text{(6)} \qquad \bar{a} := t \cdot \frac{\bar{v}_{ik}}{\bar{f}_i^l} \in D_i$$

Für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ haben wir oben das Polynom p_γ (mit $\gamma = (i, k, t, j)$) in $(n+1)$ Variablen über dem Ring B^+ definiert. Sei $\bar{p}_\gamma$ das Polynom über dem Ring D_i, das aus p_γ dadurch entsteht, indem man die Koeffizienten $p_{\gamma 1}, \dots, p_{\gamma s}$ von p_γ durch die Elemente $\bar{p}_{\gamma 1}, \dots, \bar{p}_{\gamma s}$ von D_i ersetzt. Für die Variablen von $\bar{p}_\gamma$ setzen wir die Elemente $\frac{\bar{f}_0}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_i}$ von D_i ein und erhalten dadurch ein Element $\bar{b}_j$ von D_i,

$$\text{(7)} \qquad \bar{b}_j = \bar{p}_\gamma\left(\frac{\bar{f}_0}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_i}\right) \in D_i$$

Nach (1), (2), (3) liegt $\bar{a}^r + \bar{b}_1 \bar{a}^{r-1} + \ldots + \bar{b}_r$ im Kern von σ_i, also gilt

$$\text{(8)} \qquad \lambda(\bar{a})^r + \lambda(\bar{b}_1)\lambda(\bar{a})^{r-1} + \ldots + \lambda(\bar{b}_r) = 0$$

Es ist $\frac{\bar{f}_0}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_i} \in D_i^+$. Da $T(p_{\gamma u}) = \{1\}$, ist $\bar{p}_{\gamma u} \in D_i^+$ für jedes $u \in \{1, \dots, s\}$. Nach (7) ist dann $\bar{b}_j \in D_i^+$ für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$. Also ist $\lambda(\bar{b}_j) \in E^+$ und somit folgt aus (8) $\lambda(\bar{a}) \in E^+$. Mit (6) ist dadurch (5) bewiesen.

Nach (2.4.6 iv) und (5) haben wir einen stetigen Ringhomomorphismus über A

$$\mu: A\langle X_{i1}, \dots, X_{im}\rangle_{T_i} \to E$$

mit $\mu(X_{ik}) = \lambda(\frac{\bar{v}_{ik}}{\bar{f}_i^l})$ für $k = 1, \dots, m$. Der Ringhomomorphismus $\sigma_i: D_i \to B_i$ faktorisiert über einen stetigen Ringhomomorphismus $\tau: E \to B_i$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ B_i & & E \arrow[ll, "\tau"'] \\ & A\langle X_{i1}, \dots, X_{im}\rangle_{T_i} \arrow[ul, "\varphi_i"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Nach (1) ist dieses Diagramm kommutativ. Da φ_i eine Quotientenabbildung ist, ist auch τ und damit auch σ_i eine Quotientenabbildung. Der Beweis von (3.8.15) ist beendet.

Lemma 3.8.16. Seien A ein vollständiger affinoider Ring und $T = (T_1, \dots, T_n)$ ein n-Tupel von endlichen Teilmengen von $\tilde{A}$, so daß $T_i \cdot \tilde{A}$ offen ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es eine Nullumgebung U von $\tilde{A}\langle X_1, \dots, X_n\rangle_T$, so daß es zu jedem n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in X_i + U$ für $i = 1, \dots, n$ eine Quotientenabbildung über A

$$f: A\langle X_1, \dots, X_n\rangle_T \to A\langle X_1, \dots, X_n\rangle_T$$

mit $f(X_i) = x_i$ für $i = 1, \dots, n$ gibt.

Beweis: Sei (B, I) ein Definitionstupel von A^+. Wir setzen $U = \{x \in \tilde{A}\langle X_1, \dots, X_n\rangle_T \mid t \cdot x \in I_{\langle X\rangle}$ für jedes $t \in \bigcup_{i=1}^{n} T_i\} \cap B_{\langle X\rangle}$. Sei ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in X_i + U$ für $i = 1, \dots, n$ gegeben. Nach (2.4.6 iv) gibt es einen stetigen Ringhomomorphismus $f: A\langle X\rangle_T \to A\langle X\rangle_T$ über A mit $f(X_i) = x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir zeigen, daß f eine Quotientenabbildung ist.
Sei $G_0 := B_{\langle X\rangle}$ und $G_k := (I^k)_{\langle X\rangle}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Man rechnet nach, daß für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $x \in G_k$ gilt $x - f(x) \in G_{k+1}$. Nach [B], III.2.8 Cor. 2 gilt dann $f(G_k) = G_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Also ist f eine offene Abbildung. Als A^+-Algebra wird $(A^+)_{\langle X\rangle}$ von G_0 erzeugt. Da $(A\langle X\rangle_T)^+ = ((A^+)_{\langle X\rangle})^c$, erhalten wir $f(A\langle X\rangle_T^+)^c = A\langle X\rangle_T^+$. Es ist noch zu zeigen, daß f surjektiv ist. Als $\tilde{A}$-Algebra wird $\tilde{A}\langle X\rangle_T$ von G_0 und $X_1, \dots, X_n$ erzeugt. Da $X_i - f(X_i) \in G_0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $y_i \in G_0$ mit $f(y_i) = X_i - f(X_i)$. Dann ist $f(y_i + X_i) = X_i$. Also ist f surjektiv.

Beispiel 3.8.17. Seien X ein affinoider adischer Raum und U eine offene affinoide Teilmenge von X. Dann ist $(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)) \to (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ topologisch von endlichem Typ.

Ein Morphismus $f: X \to Y$ zwischen einem analytischen Raum X und einem adischen Raum Y heißt (lokal) von endlichem Typ, wenn (3.8.13) entsprechend erfüllt ist. Der Satz (3.8.15) gilt dann analog. (Man kann den Beweis direkt übernehmen.)

Bemerkung 3.8.18. i) Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus affinoider adischer Räume oder affinoider analytischer Räume. Zu jedem $x \in X$ gebe es eine offene affinoide

Umgebung U von x in X, so daß der Ringhomomorphismus f-adischer Ringe $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(U)$ topologisch von endlichem Typ ist. Man kann die Frage stellen, ob dann auch $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ topologisch von endlichem Typ ist. Wie das Beispiel (3.4.24) zeigt, ist dies im allgemeinen nicht der Fall.

ii) Eine nützliche Modifikation des Begriffs „topologisch von endlichem Typ" ist die folgende: Ein Ringhomomorphismus vollständiger affinoider Ringe $f\colon A \to B$ heißt topologisch von endlichem Typ (I) (bzw. topologisch von endlichem Typ (II)), wenn es einen offenen Unterring D von B^+ gibt, so daß $f(A^+) \subseteq D$, die Restriktion $f\colon A^+ \to D$ topologisch von endlichem Typ ist und $B^+ = D^c$ (bzw. $f(A^+) \subseteq D$ und die Restriktion $f\colon A^+ \to D$ topologisch von endlichem Typ ist).

Man hat dann die Relation

f ist topologisch von endlichem Typ $\Longrightarrow$ f ist topologisch von endlichem Typ (I) $\Longrightarrow$ f ist topologisch von endlichem Typ (II) $\Longrightarrow$ f ist adisch.

Ist A tatesch, so fallen die Begriffe „f topologisch von endlichem Typ" und „f topologisch von endlichem Typ (I)" zusammen. Sind A und B diskret, so ist f immer topologisch von endlichem Typ (II).

Ähnlich wie (3.8.15) beweist man: Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen Räumen oder affinoiden adischen Räumen. Zu jedem $x \in X$ gebe es eine offene affinoide Umgebung U von x in X und eine offene affinode Umgebung V von $f(x)$ in Y, so daß $f(U) \subseteq V$ und $(\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)) \to (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ topologisch von endlichem Typ (I) (bzw. topologisch von endlichem Typ (II)) ist. Dann ist $(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))$ topologisch von endlichem Typ (I) (bzw. topologisch von endlichem Typ (II)).

In vielen Situationen ist es natürlicher mit Morphismen von endlichem Typ (I) oder (II) zu arbeiten statt mit Morphismen von endlichem Typ. Auch gelten die meisten Sätze dieser Arbeit, in denen Morphismen als von endlichem Typ vorausgesetzt werden, schon unter der schwächeren Voraussetzung, daß die Morphismen von endlichem Typ (I) oder (II) sind (oder noch schwächeren Voraussetzungen). Aber einfachheitshalber benutzen wir in dieser Arbeit nur den Begriff „von endlichem Typ".

3.9. Formale Schemata und adische Räume

Vorlage für diesen Abschnitt ist die in [R] und [Me] dargestellte Beziehung zwischen formalen Schemata und analytischen Varietäten.

Zunächst notieren wir einige Eigenschaften quasikohärenter Garben auf lokal noetherschen formalen Schemata.

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein noethersches affines formales Schema. Für jeden $\mathcal{O}(X)$-Modul M setzen wir

$$M \otimes \mathcal{O} := M^{\Delta} := \varinjlim_{I} M_i^{\Delta},$$

wobei $(M_i \mid i \in I)$ die Familie der endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Untermoduln von M und $\varinjlim_{I}$ der induktive Limes in der Kategorie der $\mathcal{O}$-Modulgarben ist. (N.B. Ist $i: X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$ der kanonische Morphismus lokal geringter Räume, so gilt $M^{\Delta} = i^*(\tilde{M})$).

Für jede offene affine Teilmenge U von X gilt $H^0(U, M^{\Delta}) = M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(U)$ und $H^p(U, M^{\Delta}) = 0$ für $p > 0$. Für jede $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ hat man eine kanonische Bijektion $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M^{\Delta}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(M, \mathcal{F}(X))$. Der Funktor $M \mapsto M^{\Delta}$ von der Kategorie der $\mathcal{O}(X)$-Moduln in die Kategorie der $\mathcal{O}$-Modulgarben ist exakt und volltreu.

Die Garbe M^{Δ} ist quasikohärent. Ist $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe auf X, so gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene affine Umgebung U von x in X, so daß $\mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$. Ist $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}$-Untermodulgarbe von M^{Δ}, so gibt es einen Untermodul N von M mit $\mathcal{F} = N^{\Delta}$.

Sei $\mathcal{A}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}$-Algebrengarbe auf X (d.h. $\mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{O}$-Algebrengarbe, die als $\mathcal{O}$-Modulgarbe quasikohärent ist). Für jede offene affine Teilmenge U von X ist der kanonische $(\mathcal{O} \mid U)$-Modulgarbenmorphismus $\mathcal{A}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U) \to \mathcal{A} \mid U$ ein $(\mathcal{O} \mid U)$-Algebrengarbenmorphismus, wobei $\mathcal{A}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$ mit der kanonischen $(\mathcal{O} \mid U)$-Algebrengarbenstruktur versehen ist. Sei $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{A}$-Modulgarbe. $\mathcal{F}$ ist eine quasikohärente $\mathcal{A}$-Modulgarbe genau dann, wenn $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe ist. $\mathcal{F}$ ist genau dann eine quasikohärente $\mathcal{A}$-Modulgarbe von endlichem Typ, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene affine Umgebung U von x in X gibt, so daß $\mathcal{A} \mid U = \mathcal{A}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U), \mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$ und $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(U)$-Modul ist. Sei nun $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{A}$-Algebrengarbe. $\mathcal{F}$ heißt von endlichem Typ über $\mathcal{A}$ (als Algebrengarbe), wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene affine

Umgebung U von x in X gibt, so daß $\mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(U)\otimes(\mathcal{O} \mid U), \mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U)\otimes(\mathcal{O} \mid U)$ und $\mathcal{F}(U)$ eine endlich erzeugte $\mathcal{A}(U)$-Algebra ist:

Sei X ein lokal noethersches formales Schema. Jede kohärente Garbe auf X ist auf kanonische Weise eine Garbe topologischer Gruppen. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben topologischer Gruppen auf X und $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus, so heißt f eine offene Einbettung, wenn $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ eine offene Einbettung ist für jede quasikompakte offene Teilmenge U von X. (N.B. Es ist dann $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ eine topologische Einbettung für jede offene Teilmenge U von X.)

Definition 3.9.1. Seien $(X, \mathcal{O})$ ein lokal noethersches formales Schema und $\mathcal{A}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}$-Algebrengarbe auf X. Für jede offene Teilmenge U von X sei $\mathcal{A}(U)$ mit einer Topologie versehen, so daß $\mathcal{A}$ eine Garbe mit Werten in der Kategorie topologischen Ringe ist. Dann heißt $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf $(X, \mathcal{O})$ wenn der Strukturmorphismus $\mathcal{O} \to \mathcal{A}$ eine offene Einbettung ist.

Beispiel 3.9.2. Seien A ein vollständiger f-adischer Ring und B ein noetherscher Definitionsring von A. Auf dem affinen formalen Schema $X = \operatorname{Spf} B$ haben wir die $\mathcal{O}$-Algebrengarbe $\mathcal{A} := A^{\Delta}$. Der Morphismus $\mathcal{O} \to \mathcal{A}$ ist injektiv. Für jede offene Teilmenge U von X versehen wir $\mathcal{A}(U)$ mit der Gruppentopologie, so daß $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{A}(U)$ eine offene Einbettung ist. Dadurch wird $\mathcal{A}$ zu einer Garbe mit Werten in der Kategorie der topologischen Gruppen (denn jede offene Teilmenge von X ist quasikompakt). Für jedes $f \in B$ ist $\mathcal{A}(\mathcal{D}(f))$ ein topologischer Ring, nämlich der Ring $A\langle\frac{1}{f}\rangle$. Deshalb ist $\mathcal{A}$ eine Garbe mit Werten in der Kategorie der topologischen Ringe. Also ist $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf X.

Lemma 3.9.3. Seien X ein lokal noethersches formales Schema, $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf X und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{A}$-Modulgarbe von endlichem Typ. Man kann $\mathcal{F}$ auf genau eine Weise zu einer Garbe mit Werten in der Kategorie der topologischen Gruppen machen, so daß für jede offene affine Teilmenge U von X, für die $\mathcal{A} \mid U = \mathcal{A}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U), \mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$ und $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(U)$-Modul ist, die Topologie auf $\mathcal{F}(U)$ die f-adische Topologie bezüglich $\mathcal{A}(U)$ ist.

Beweis: Zunächst zeigen wir

(1) Sei U eine offene affine Teilmenge von X, so daß $\mathcal{A} \mid U = \mathcal{A}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$, $\mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O} \mid U)$ und $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(U)$-Modul ist. Man kann $\mathcal{F} \mid U$ zu einer Garbe mit Werten in der Kategorie der topologischen

Gruppen machen, so daß für jede offene affine Teilmenge V von U die Topologie auf $\mathcal{F}(V)$ die f-adische Topologie von $\mathcal{F}(V)$ bezüglich $\mathcal{A}(V)$ ist.

Denn: Sei G ein endlich erzeugter $\mathcal{O}(U)$-Untermodul von $\mathcal{F}(U)$, der den $\mathcal{A}(U)$-Modul $\mathcal{F}(U)$ erzeugt. Die Garbe $\mathcal{G} := G \otimes (\mathcal{O} \mid U)$ ist auf kanonische Weise eine Garbe mit Werten in der Kategorie der topologischen Gruppen. Für jede offene Teilmenge V von U versehen wir $\mathcal{F}(V)$ mit der Gruppentopologie, so daß die Injektion $\mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(V)$ eine offene Einbettung ist. Dann ist (1) erfüllt.

Mit (1) kann man (3.9.3) genauso beweisen wie (3.8.11).

Seien $X, \mathcal{A}, \mathcal{F}$ wie in (3.9.3). Im folgenden versehen wir $\mathcal{F}$ immer mit der Topologie aus (3.9.3). (Ist $\mathcal{A} = \mathcal{O}$, so stimmt diese Topologie überein mit der üblichen Topologie einer kohärenten Garbe auf X.) Sei $\mathcal{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}$-Untermodul von $\mathcal{F}$. Die Inklusion $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ist genau dann eine offene Einbettung, wenn $\mathcal{G}(U)$ offen in $\mathcal{F}(U)$ ist für jede quasikompakte offene Teilmenge U von X.

Lemma 3.9.4. Seien X ein lokal noethersches formales Schema, $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf X und $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{A}$-Modul von endlichem Typ. Weiterhin seien U eine offene Teilmenge von X und $\mathcal{G}$ ein kohärenter $(\mathcal{O} \mid U)$-Untermodul von $\mathcal{F} \mid U$, so daß die Inklusion $\mathcal{G} \to \mathcal{F} \mid U$ eine offene Einbettung ist. Dann gibt es einen kohärenten $\mathcal{O}$-Untermodul $\mathcal{H}$ von $\mathcal{F}$, so daß $\mathcal{G} = \mathcal{H} \mid U$ und die Inklusion $\mathcal{H} \to \mathcal{F}$ eine offene Einbettung ist.

Beweis: Zunächst zeigen wir

(1) Seien Y ein noethersches affines formales Schema, $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf Y mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Y) \otimes \mathcal{O}$ und $\mathcal{M}$ eine quasikohärente $\mathcal{A}$-Modulgarbe, so daß $\mathcal{M} = \mathcal{M}(Y) \otimes \mathcal{O}$ und $\mathcal{M}(Y)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(Y)$-Modul ist. Sei $\mathcal{L}$ eine $\mathcal{O}$-kohärente Untergarbe von $\mathcal{M}$, so daß die Inklusion $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$ eine offene Einbettung ist, und sei $s \in \mathcal{O}(Y)$. Dann gibt es zu jedem $g \in \mathcal{M}(Y)$ mit $g \mid \mathcal{D}(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(s))$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n g \in \mathcal{L}(Y)$.

Denn: Wir versehen $\mathcal{L}(Y)_s$ mit der f-adischen (= adischen) Topologie bezüglich $\mathcal{O}(Y)(\frac{1}{s}) = \mathcal{O}(Y)_s$ und $\mathcal{M}(Y)_s$ mit der f-adischen Topologie bezüglich $\mathcal{A}(Y)(\frac{1}{s}) = \mathcal{A}(Y)_s$. Wir betrachten das kommutative Diagramm stetiger Morphismen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}(\mathcal{D}(s)) = (\mathcal{M}(Y)_s)^\wedge & \longleftarrow & \mathcal{M}(Y)_s & \xleftarrow{\psi} & \mathcal{M}(Y) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{L}(\mathcal{D}(s)) = (\mathcal{L}(Y)_s)^\wedge & \xleftarrow[\varphi]{} & \mathcal{L}(Y)_s & \longleftarrow & \mathcal{L}(Y)
\end{array}$$

(Nach (2.3.33 iv) gilt $\mathcal{M}(\mathcal{D}(s)) = (\mathcal{M}(Y)_s)^\wedge$ und $\mathcal{L}(\mathcal{D}(s)) = (\mathcal{L}(Y)_s)^\wedge$.) Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(Y)_s$, so daß $(\varphi(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ nach $g \mid \mathcal{D}(s)$ konvergiert. Dann konvergiert $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}(Y)_s$ nach $\psi(g)$. Da $\mathcal{L}(Y)$ offen in $\mathcal{M}(Y)$ ist, ist $\mathcal{L}(Y)_s$ offen in $\mathcal{M}(Y)_s$. Deshalb gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\psi(g) - x_k \in \mathcal{L}(Y)_s$. Da $x_k \in \mathcal{L}(Y)_s$, erhalten wir $\psi(g) \in \mathcal{L}(Y)_s$. Deshalb gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n g \in \mathcal{L}(Y)$.

(2) Seien Y ein noethersches formales Schema, $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf Y, $\mathcal{M}$ eine quasikohärente $\mathcal{A}$-Modulgarbe von endlichem Typ und $\mathcal{L}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Untermodulgarbe von $\mathcal{M}$, so daß die Inklusion $\mathcal{L} \to \mathcal{M}$ eine offene Einbettung ist. Sei s ein Element von $\mathcal{O}(Y)$. Dann gibt es zu jedem $g \in \mathcal{M}(Y)$ mit $g \mid \mathcal{D}(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(s))$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n g \in \mathcal{L}(Y)$.

Denn : Sei $\{U_1, \ldots, U_m\}$ eine offene affine Überdeckung von Y, so daß $\mathcal{A} \mid U_i = \mathcal{A}(U_i) \otimes (\mathcal{O} \mid U_i), \mathcal{M} \mid U_i = \mathcal{M}(U_i) \otimes (\mathcal{O} \mid U_i)$ und $\mathcal{M}(U_i)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(U_i)$-Modul ist für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sei $g \in \mathcal{M}(Y)$ mit $g \mid \mathcal{D}(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(s))$. Nach (1) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $s^n g \in \mathcal{L}(U_i)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist $s^n g \in \mathcal{L}(Y)$.

Mit den Überlegungen aus [EGA*], I.6.9.6 und I.6.9.7 genügt es, (3.9.4) für den Fall zu beweisen, daß X affin, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) \otimes \mathcal{O}, \mathcal{F} = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}$ und $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(X)$-Modul ist. Wir nehmen diese Situation an.

(3) Sei s ein Element von $\mathcal{O}(X)$, so daß $\mathcal{D}(s) \subseteq U$. Dann erzeugt $H := \{h \in \mathcal{G}(\mathcal{D}(s)) \mid$ es gibt ein $g \in \mathcal{F}(X)$ mit $g \mid \mathcal{D}(s) = h\}$ den $\mathcal{O}(\mathcal{D}(s))$-Modul $\mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$.

Denn: Wir haben die kanonischen Abbildungen $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}(X)_s \xrightarrow{\tau} \mathcal{F}(\mathcal{D}(s))$. Es ist $\tau(\mathcal{F}(X)_s)$ dicht in $\mathcal{F}(\mathcal{D}(s))$ (siehe Begründung von (1)). Da $\mathcal{G}(\mathcal{D}(s)) \to \mathcal{F}(\mathcal{D}(s))$ eine offene Einbettung ist, ist $\tau(\mathcal{F}(X)_s) \cap \mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$ dicht in $\mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$. Nach [B], III.2.9 Cor. 3 erzeugt deshalb $\tau(\mathcal{F}(X)_s) \cap \mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$ den $\mathcal{O}(\mathcal{D}(s))$-Modul $\mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$. Da $s \mid \mathcal{D}(s)$ eine Einheit in $\mathcal{O}(\mathcal{D}(s))$ ist, erzeugt auch $(\tau \circ \sigma)(\mathcal{F}(X)) \cap \mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$ den$\mathcal{O}(\mathcal{D}(s))$-Modul $\mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$. Es ist $(\tau \circ \sigma)(\mathcal{F}(X)) \cap \mathcal{G}(\mathcal{D}(s)) = H$.

(4) Die Menge $I := \{h \in \mathcal{G}(U) \mid$ es gibt ein $g \in \mathcal{F}(X)$ mit $g \mid U = h\}$ erzeugt die $(\mathcal{O} \mid U)$-Modulgarbe $\mathcal{G}$.

Denn: Sei s ein Element von $\mathcal{O}(X)$ mit $\mathcal{D}(s) \subseteq U$. Sei H die Menge aus (3). Nach (2) gibt es zu jedem $h \in H$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in I$ mit $(s \mid \mathcal{D}(s))^n \cdot h = i \mid \mathcal{D}(s)$. Da $s \mid \mathcal{D}(s)$ eine Einheit in $\mathcal{O}(\mathcal{D}(s))$ ist, erzeugt nach (3) die Menge $\{i \mid \mathcal{D}(s) \mid i \in I\}$ den $\mathcal{O}(\mathcal{D}(s))$-Modul $\mathcal{G}(\mathcal{D}(s))$. Deshalb gilt (4).

Sei J die Menge $\{g \in \mathcal{F}(X) \mid g \mid U \in \mathcal{G}(U)\}$. Da $\mathcal{G}(U)$ offen in $\mathcal{F}(U)$ ist, ist J offen in $\mathcal{F}(X)$. Nach (2.3.33 v) gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Untermodul K von $\mathcal{F}(X)$, so daß $K \subseteq J$ und K offen ist. Nach (4) gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}(X)$-Untermodul L von $\mathcal{F}(X)$, so daß $L \subseteq J$ und $\{\ell \mid U \mid \ell \in L\}$ die $(\mathcal{O} \mid U)$-Modulgarbe

$\mathcal{G}$ erzeugt. Für $\mathcal{H} := (K + L) \otimes \mathcal{O}$ gilt (3.9.4).

Korollar 3.9.5. i) Seien X ein noethersches affines formales Schema und $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf X, so daß $\mathcal{A}$ als $\mathcal{O}$-Algebrengarbe von endlichem Typ über $\mathcal{O}$ ist. Dann ist $\mathcal{A}(X)$ eine endlich erzeugte $\mathcal{O}(X)$-Algebra und $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) \otimes \mathcal{O}$.
ii) Seien X ein noethersches affines formales Schema, $\mathcal{A}$ eine Garbe f-adischer Ringe auf X mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) \otimes \mathcal{O}$ und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente $\mathcal{A}$-Modulgarbe von endlichem Typ. Dann ist $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(X)$-Modul und $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}$.

Beweis: i) Sei $\{U_1, \dots, U_n\}$ eine offene affine Überdeckung von X, so daß $\mathcal{A} \mid U_i = \mathcal{A}(U_i) \otimes (\mathcal{O} \mid U_i)$ und $\mathcal{A}(U_i)$ eine endlich erzeugte $\mathcal{O}(U_i)$-Algebra ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Nach (3.9.4) gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ eine $\mathcal{O}$-kohärente Untergarbe $\mathcal{G}_i$ von $\mathcal{A}$, so daß $\mathcal{A}(U_i)$ als Algebra über $\mathcal{O}(U_i)$ von $\mathcal{G}_i(U_i)$ erzeugt wird. Sei B die von $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i(X)$ erzeugte $\mathcal{O}(X)$-Unteralgebra von $\mathcal{A}(X)$. Dann ist B eine endlich erzeugte $\mathcal{O}(X)$-Algebra und der kanonische Morphismus $\varphi: B \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{A}$ surjektiv. φ ist aber auch injektiv, denn: Da $\ker(\varphi)$ eine quasikohärente Untergarbe von $B \otimes \mathcal{O}$ ist, gilt $\ker(\varphi) = \ker(\varphi)(X) \otimes \mathcal{O}$. Es ist $\ker(\varphi)(X) = 0$ und somit $\ker(\varphi) = 0$.
ii) Nach (3.9.4) gibt es einen kohärenten $\mathcal{O}$-Untermodul $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$, so daß die Inklusion $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ eine offene Einbettung ist. Sei H der von $\mathcal{G}(X)$ erzeugte $\mathcal{A}(X)$-Untermodul von $\mathcal{F}(X)$. Wir setzen $\mathcal{H} := H \otimes \mathcal{O}$. Wie in (i) sieht man, daß der kanonische Morphismus $\mathcal{H} \to \mathcal{F}$ injektiv ist. Da $\mathcal{F}$ von endlichem Typ und die Inklusion $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ offen ist, gibt es ein Definitionsideal $\mathcal{J}$ von X mit $\mathcal{J}\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Es ist $\mathcal{A}/\mathcal{J}\mathcal{A}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}/\mathcal{J}$-Algebra und $\mathcal{F}/\mathcal{H}$ ein quasikohärenter $\mathcal{A}/\mathcal{J}\mathcal{A}$-Modul von endlichem Typ. Da $(X, \mathcal{O}/\mathcal{J})$ ein Schema ist, erhalten wir: $\mathcal{F}/\mathcal{H} = (\mathcal{F}/\mathcal{H})(X) \otimes \mathcal{O}$ und $(\mathcal{F}/\mathcal{H})(X)$ ist ein endlich erzeugter $(\mathcal{A}/\mathcal{J}\mathcal{A})(X)$-Modul.

Da $H^1(X, \mathcal{H}) = 0$, haben wir die exakte Sequenz

(1) $$0 \to \mathcal{H}(X) \to \mathcal{F}(X) \to (\mathcal{F}/\mathcal{H})(X) \to 0$$

Da $H^1(X, \mathcal{A}) = 0$, ist $(\mathcal{A}/\mathcal{J}\mathcal{A})(X) = \mathcal{A}(X)/(\mathcal{J}\mathcal{A})(X)$ und deshalb $(\mathcal{F}/\mathcal{H})(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(X)$-Modul. Da auch $\mathcal{H}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(X)$-Modul ist, folgt aus (1), daß $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}(X)$-Modul ist. Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}/\mathcal{H} & \longrightarrow 0 \\
& \alpha \uparrow & & \beta \uparrow & & \gamma \uparrow & \\
0 \longrightarrow & \mathcal{H}(X) \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & (\mathcal{F}/\mathcal{H})(X) \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Da α und γ Isomorphismen sind, ist auch β ein Isomorphismus.

Wir definieren eine Kategorie $\mathcal{K}$. Die Objekte von $\mathcal{K}$ sind die Tripel $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X)$, so daß $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal noethersches formales Schema und $\mathcal{A}_X$ eine Garbe f-adischer Ringe auf $(X, \mathcal{O}_X)$ ist. Die Morphismen $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{A}_Y, \mathcal{O}_Y)$ in $\mathcal{K}$ sind die Paare (f, φ), wobei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\varphi: \mathcal{A}_Y \to f_*\mathcal{A}_X$ ein Garbenmorphismus topologischer Ringe ist, so daß $\varphi(\mathcal{O}_Y) \subseteq f_*\mathcal{O}_X$ und für jedes $x \in X$ der durch φ induzierte Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist (d.h. f und die Restriktion $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von φ definieren einen Morphismus formaler Schemata $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$).

Ein Objekt $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X)$ von $\mathcal{K}$ heißt affin, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ ein affines formales Schema ist und $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_X(X) \otimes \mathcal{O}_X$. Sind $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X)$ ein Objekt von $\mathcal{K}$ und U eine offene Teilmenge von X, so heißt U affin, wenn der offene Teilraum $(U, \mathcal{A}_X \mid U, \mathcal{O}_X \mid U)$ ein affines Objekt von $\mathcal{K}$ ist. Nach (3.9.5 i) ist $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X) \in \mathcal{K}$ affin, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ ein affines formales Schema und $\mathcal{A}_X$ als $\mathcal{O}_X$-Algebra von endlichem Typ ist. Nach (3.9.2) entsprechen die affinen Objekte von $\mathcal{K}$ eineindeutig den Paaren (A, B), wobei A ein vollständiger f-adischer Ring und B ein noetherscher Definitionsring von A ist. Sind X, Y Objekte in $\mathcal{K}$, wobei Y affin ist, so entsprechen die Morphismen $X \to Y$ in $\mathcal{K}$ eineindeutig den stetigen Ringhomomorphismen $\mathcal{A}_Y(Y) \to \mathcal{A}_X(X)$, die $\mathcal{O}_Y(Y)$ nach $\mathcal{O}_X(X)$ abbilden.

Seien $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X)$ ein Objekt von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{A}_X$. $\mathcal{J}$ heißt offen in $\mathcal{A}_X$, wenn die Inklusion $\mathcal{J} \to \mathcal{A}_X$ eine offene Einbettung ist. $\mathcal{J}$ heißt invertierbar in $\mathcal{A}_X$, wenn es einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}_X$ gibt mit $\mathcal{J}\mathcal{I} = \mathcal{O}_X$. $\mathcal{J}$ ist genau dann invertierbar in $\mathcal{A}_X$, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Einheit d in $\mathcal{A}_{X,x}$ gibt mit $\mathcal{J}_x = d \cdot \mathcal{O}_{X,x}$. Ist $\mathcal{J}$ invertierbar in $\mathcal{A}_X$, so ist $\mathcal{J}$ offen in $\mathcal{A}_X$.

Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Untermodul von $\mathcal{A}_Y$. Mit $\bar{f}(\mathcal{J})$ bezeichnen wir das Bild von $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ in $\mathcal{A}_X$. Ist $\mathcal{J}$ invertierbar in $\mathcal{A}_Y$, so ist $\bar{f}(\mathcal{J})$ invertierbar in $\mathcal{A}_X$. Ist der Morphismus formaler Schemata $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ adisch und ist $\mathcal{J}$ offen in $\mathcal{A}_Y$, so ist $\bar{f}(\mathcal{J})$ offen in $\mathcal{A}_X$.

Wir definieren nun die Aufblasungen in der Kategorie $\mathcal{K}$.

Proposition und Definition 3.9.6. Seien X ein Objekt in $\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{A}_X$. Dann gibt es einen Morphismus $f: Y \to X$ in $\mathcal{K}$, für den gilt: $\bar{f}(\mathcal{J})$ ist invertierbar in $\mathcal{A}_Y$ und ist $g: Z \to X$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß $\bar{g}(\mathcal{J})$ invertierbar in $\mathcal{A}_Z$ ist, so gibt es genau einen Morphismus $h: Z \to Y$ in $\mathcal{K}$ mit $g = f \circ h$.

Der Morphismus $f: Y \to X$ heißt die Aufblasung von $\mathcal{J}$. Gilt $\mathcal{J} \cdot \mathcal{A}_X = \mathcal{A}_X$, so heißt f eine gute Aufblasung, und ist $1 \in \mathcal{J}(X)$, so heißt f eine 1-gute Aufblasung.

Beweis: Ohne Einschränkung ist X affin. Seien $a_1, \ldots, a_n$ Elemente von $\mathcal{J}(X)$, die $\mathcal{J}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul erzeugen. Wir zeigen

(1) Zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es einen Morphismus $f_i: Y_i \to X$ in $\mathcal{K}$, für den gilt: Es ist $f_i^*(a_i) \in \mathcal{A}_{Y_i}(Y_i)$ eine Einheit in $\mathcal{A}_{Y_i}(Y_i)$ und $\bar{f}_i(\mathcal{J}) = f_i^*(a_i) \cdot \mathcal{O}_{Y_i}$. Ist $g: Z \to X$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß $g^*(a_i) \in \mathcal{A}_Z(Z)$ eine Einheit in $\mathcal{A}_Z(Z)$ ist und $\bar{g}(\mathcal{J}) = g^*(a_i) \cdot \mathcal{O}_Z$, so gibt es genau einen Morphismus $h: Z \to Y_i$ in $\mathcal{K}$ mit $g = f_i \circ h$.

Denn: $\mathcal{A}_X(X)$ ist ein f-adischer Ring. $\{a_1, \ldots, a_n\} \cdot \mathcal{A}_X(X)$ ist offen in $\mathcal{A}_X(X)$. Deshalb haben wir den f-adischen Ring $A := \mathcal{A}_X(X)(\frac{a_1, \ldots, a_n}{a_i})$. Die Teilraumtopologie von A auf dem Unterring $B := \mathcal{O}_X(X)\left[\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right]$ von A ist die $I \cdot B$-adische Topologie, wobei I ein Definitionsideal von $\mathcal{O}_X(X)$ ist. Sei Y_i das affine Objekt von $\mathcal{K}$ zu dem Paar $(\hat{A}, \hat{B})$, d.h. $Y_i = (\operatorname{Spf}(\hat{B}), \hat{A} \otimes \mathcal{O}, \mathcal{O})$. Für den kanonischen Morphismus $f_i: Y_i \to X$ gilt (1).

(2) Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. In $\mathcal{O}_{Y_i}(Y_i)$ haben wir das Element $\frac{f_i^*(a_j)}{f_i^*(a_i)}$. Mit Y_{ij} bezeichnen wir den offenen Teilraum $\mathcal{D}(\frac{f_i^*(a_j)}{f_i^*(a_i)})$ von Y_i. Sei $f_{ij}: Y_{ij} \to X$ die Restriktion von f_i. Dann gilt: $f_{ij}^*(a_i)$ und $f_{ij}^*(a_j)$ sind Einheiten in $\mathcal{A}_{Y_{ij}}(Y_{ij})$ und $\bar{f}_{ij}(\mathcal{J}) = f_{ij}^*(a_i) \cdot \mathcal{O}_{Y_{ij}} = f_{ij}^*(a_j) \cdot \mathcal{O}_{Y_{ij}}$. Ist $g: Z \to X$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß $g^*(a_i)$ und $g^*(a_j)$ Einheiten in $\mathcal{A}_Z(Z)$ sind und $\bar{g}(\mathcal{J}) = g^*(a_i) \cdot \mathcal{O}_Z = g^*(a_j) \cdot \mathcal{O}_Z$, so gibt es genau einen Morphismus $h: Z \to Y_{ij}$ in $\mathcal{K}$ mit $g = f_{ij} \circ h$.

Denn: Sei $g: Z \to X$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ mit den Eigenschaften aus (2). Nach (1) gibt es genau einen Morphismus $h: Z \to Y_i$ mit $g = f_i \circ h$. Es gibt $c, d \in \mathcal{O}_Z(Z)$ mit $g^*(a_j) = g^*(a_i) \cdot c$ und $g^*(a_i) = g^*(a_j) \cdot d$, also $g^*(a_i) \cdot c \cdot d = g^*(a_i)$ und somit $c \cdot d = 1$. Sei e das Element von $\mathcal{O}_{Y_i}(Y_i)$ mit $f_i^*(a_j) = f_i^*(a_i) \cdot e$. Es ist $c = h^*(e)$. Da $h: (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$ ein Morphismus lokal geringter Räume und $h^*(e)$ eine Einheit in $\mathcal{O}_Z(Z)$ ist, folgt $h(Z) \subseteq Y_{ij}$.

Nach (2) erfüllen $f_{ij}: Y_{ij} \to X$ und $f_{ji}: Y_{ji} \to X$ dieselbe universelle Eigenschaft. Deshalb gibt es genau einen X-Isomorphismus $\varphi_{ij}: Y_{ij} \to Y_{ji}$ in $\mathcal{K}$. Mit Hilfe dieser φ_{ij} verkleben wir die X_i und erhalten ein Objekt Y von $\mathcal{K}$. Die f_i definieren einen Morphismus $f: Y \to X$ in $\mathcal{K}$. Dieser Morphismus erfüllt (3.9.6).

Bemerkung 3.9.7. Seien X ein Objekt von $\mathcal{K}, \mathcal{J}$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{A}_X$, der von $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{J}(X)$ erzeugt wird, und $f: Y \to X$ die Aufblasung von $\mathcal{J}$. Dann gilt

i) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Menge $Y_i := \{y \in Y \mid f^*(a_i)_y$ erzeugt den $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul $\bar{f}(\mathcal{J})_y\}$ offen in Y und es ist $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$.

ii) Sei i ein Element von $\{1, \ldots, n\}$. Es ist $f^*(a_i) \mid Y_i$ eine Einheit in $\mathcal{A}_Y(Y_i)$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $e_j \in \mathcal{O}_Y(Y_i)$ mit $f^*(a_j) \mid Y_i = (f^*(a_i) \mid Y_i) \cdot e_j$. Es ist $Y_i \cap Y_j = \{y \in Y_i \mid (e_j)_y$ ist eine Einheit in $\mathcal{O}_{Y,y}\} = \{y \in Y_i \mid (e_j)(y) \neq 0\}$.

iii) Für jede offene affine Teilmenge U von X und jede nichtleere Teilmenge H von $\{1, \ldots, n\}$ ist $f^{-1}(U) \cap \bigcap_{i \in H} Y_i$ eine offene affine Teilmenge von Y.

Beweis: (i) und (ii) sind klar. (iii) folgt aus dem Beweis von (3.9.6).

Bemerkung 3.9.8. Seien X ein Objekt aus $\mathcal{K}$ und $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ offene kohärente $\mathcal{O}_X$-Untermoduln von $\mathcal{A}_X$. Aus der universellen Eigenschaft von Aufblasungen folgt

i) Sind $f: Y \to X$ die Aufblasung von $\mathcal{J}$ und $g: Z \to Y$ die Aufblasung von $\bar{f}(\mathcal{I})$, so ist $f \circ g: Z \to X$ die Aufblasung von $\mathcal{I}\mathcal{J}$.

ii) Ist $\mathcal{I}$ invertierbar in $\mathcal{A}_X$, so sind die Aufblasungen von $\mathcal{J}, \mathcal{J}^n (n \in \mathbb{N})$ und $\mathcal{I}\mathcal{J}$ isomorph.

iii) Sei $g: X' \to X$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß $\bar{g}(\mathcal{J})$ offen in $\mathcal{A}_{X'}$ ist. Seien $f: Y \to X$ und $f': Y' \to X'$ die Aufblasungen von $\mathcal{J}$ und $\bar{g}(\mathcal{J})$. Es gibt genau einen Morphismus $h: Y' \to Y$ in $\mathcal{K}$, so daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{h} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

Dieses Diagramm ist kartesisch in der Kategorie $\mathcal{K}$.

Bemerkung 3.9.9. Seien X ein affines Objekt von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{A}_X$. Wir setzen $B := \mathcal{O}_X(X), A := \mathcal{A}_X(X), J := \mathcal{J}(X)$. Es ist $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n$ auf kanonische Weise eine graduierte B-Algebra. Wir haben deshalb einen Morphismus von Schemata $\varphi: V := \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n) \longrightarrow \operatorname{Spec} B =: U$. Die Inklusion $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A$ macht $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A$ zu einer graduierten $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n$-Algebra. Deshalb haben wir die $\mathcal{O}_V$-Algebrengarbe $\mathcal{A}_V := (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A)^\sim$ auf V. Die B-Algebra A gibt die $\mathcal{O}_U$-Algebrengarbe $\mathcal{A}_U := \tilde{A}$ auf U und der Ringhomomorphismus $A \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} A$ definiert einen Garbenmorphismus $\psi: \mathcal{A}_U \to \varphi_*\mathcal{A}_V$. Sei $\mathcal{I}$ der durch J gegebene kohärente $\mathcal{O}_U$-Untermodul von $\mathcal{A}_U$. $(U, \mathcal{A}_U, \mathcal{O}_U)$ und $(V, \mathcal{A}_V, \mathcal{O}_V)$ sind Objekte von $\mathcal{K}$ und φ und ψ definieren einen Morphismus $f: (V, \mathcal{A}_V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow (U, \mathcal{A}_U, \mathcal{O}_U)$ in der Kategorie $\mathcal{K}$. Die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_V(1)$ auf V stimmt überein mit der Garbe $\bar{f}(\mathcal{I})$. Es ist f die Aufblasung von $\mathcal{I}$.

Sei H ein Definitionsideal des adischen Rings B. Seien $\hat{U}$ und $\hat{V}$ die Vervollständigungen der Schemata U und V bezüglich der Idealgarben $H \cdot \mathcal{O}_U$ und $H \cdot \mathcal{O}_V$. Wir haben das kommutative Diagramm kanonischer Morphismen

$$\begin{array}{ccc} \hat{V} & \xrightarrow{j} & V \\ \hat{\varphi}\downarrow & & \downarrow\varphi \\ \hat{U} & \xrightarrow[i]{} & U \end{array}$$

Der Garbenmorphismus $\psi: \mathcal{A}_U \longrightarrow \varphi_*\mathcal{A}_V$ induziert einen Garbenmorphismus $\hat{\psi}: i^*\mathcal{A}_U \longrightarrow \hat{\varphi}_*(j^*\mathcal{A}_V)$.

$(\hat{U}, i^*\mathcal{A}_U, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ und $(\hat{V}, j^*\mathcal{A}_V, \mathcal{O}_{\hat{V}})$ sind Objekte in $\mathcal{K}$, wobei $(\hat{U}, i^*\mathcal{A}_U, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ unser Ausgangsobjekt X ist. $\hat{\varphi}$ und $\hat{\psi}$ definieren einen Morphismus $\hat{f}: (\hat{V}, j^*\mathcal{A}_V, \mathcal{O}_{\hat{V}}) \longrightarrow (\hat{U}, i^*\mathcal{A}_U, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ der Kategorie $\mathcal{K}$, der die Aufblasung von $\mathcal{J}$ ist.
Es gilt $\hat{\bar{f}}(\mathcal{J}) = j^*(\mathcal{O}_V(1))$.

Sei $a_1, \ldots, a_n$ ein Erzeugendensystem des B-Moduls J. Das Schema $V = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} J^n)$ wird überdeckt von den offenen affinen Teilmengen $D_+(a_1), \ldots, D_+(a_n)$. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $Y_k = j^{-1}(D_+(a_k))$, wobei $Y_1, \ldots, Y_n$ die Mengen aus (3.9.7 i) sind.

Beispiel 3.9.10. Seien X ein Objekt von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Unteralgebra von $\mathcal{A}_X$. Sei $f: Y \longrightarrow X$ die Aufblasung von $\mathcal{J}$. Für jede offene affine Teilmenge U von X ist $f^{-1}(U)$ affin mit $\mathcal{A}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{A}_X(U)$ und $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{J}(U)$.

Beweis: Ohne Einschränkung ist $X = U$ affin. Sei $a_1, \ldots, a_n$ ein Erzeugendensystem des $\mathcal{O}_X(X)$-Moduls $\mathcal{J}(X)$ mit $a_1 = 1$. Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ die Mengen aus (3.9.7 i). Sei ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Wir verwenden (3.9.7 ii) mit $j = 1$. Es ist $f^*(a_i) \mid Y_i$ eine Einheit in $\mathcal{A}_Y(Y_i)$ mit $(f^*(a_i) \mid Y_i)^{-1} \in \mathcal{O}_Y(Y_i)$. Da $f^*(a_i) \mid Y_i$ ganz über $\mathcal{O}_Y(Y_i)$ ist (denn $f^*(a_i)$ ist ganz über $\mathcal{O}_X(X)$), folgt $f^*(a_i) \mid Y_i \in \mathcal{O}_Y(Y_i)$ und somit ist $e_1 = (f^*(a_i) \mid Y_i)^{-1}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_Y(Y_i)$. Deshalb gilt $Y_i \cap Y_1 = Y_i$, also

$Y_i \subseteq Y_1$ und daher $Y = Y_1$. Aus dem Beweis von (3.9.6) folgt $\mathcal{A}_{Y_1}(Y_1) = \mathcal{A}_X(X)$ und $\mathcal{O}_{Y_1}(Y_1) = \mathcal{J}(X)$.

Lemma 3.9.11. Seien X ein Objekt von $\mathcal{K}$ und U eine offene Teilmenge von X. Sei $g: V \longrightarrow U$ eine Aufblasung (bzw. 1-gute Aufblasung) von U. Dann gibt es eine Aufblasung (bzw. 1-gute Aufblasung) $f: Y \longrightarrow X$ von X mit $f^{-1}(U) = V$ und $f \mid f^{-1}(U) = g$.

Beweis: Sei $\mathcal{J}$ ein offener kohärenter $(\mathcal{O}_X \mid U)$-Untermodul von $\mathcal{A}_X \mid U$, so daß g die Aufblasung von $\mathcal{J}$ ist. Nach (3.9.4) gibt es einen offenen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}_X$ mit $\mathcal{I} \mid U = \mathcal{J}$. Ist g eine 1-gute Aufblasung, so können wir annehmen $1 \in \mathcal{J}(U)$ und somit auch $1 \in \mathcal{I}(X)$. Für die Aufblasung $f: Y \longrightarrow X$ von $\mathcal{I}$ gilt (3.9.11).

Wir wollen nun einen Funktor von der Kategorie $\mathcal{K}$ in die Kategorie der adischen Räume konstruieren. Dazu benötigen wir Morphismen $Y \longrightarrow X$, wobei Y ein adischer Raum und X ein Objekt von $\mathcal{K}$ ist. Deshalb vergrößern wir $\mathcal{K}$ zu einer Kategorie $\bar{\mathcal{K}}$, die die Kategorie der adischen Räume als Unterkategorie enthält.

Die Objekte von $\bar{\mathcal{K}}$ sind die Tripel $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X)$, wobei X ein topologischer Raum, $\mathcal{A}_X$ eine Garbe auf X mit Werten in der Kategorie der topologischen Ringe und $\mathcal{O}_X$ eine Unterringgarbe von $\mathcal{A}_X$ ist, so daß für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist. Die Morphismen $(X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{A}_Y, \mathcal{O}_Y)$ der Kategorie $\bar{\mathcal{K}}$ sind die Paare (φ, ψ), wobei $\varphi: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $\psi: \mathcal{A}_Y \longrightarrow \varphi_*\mathcal{A}_X$ ein Garbenmorphismus topologischer Ringe ist, so daß $\psi(\mathcal{O}_Y) \subseteq \varphi_*\mathcal{O}_X$ und für jedes $x \in X$ der induzierte Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist. $\mathcal{K}$ ist eine volle Unterkategorie von $\bar{\mathcal{K}}$.

Ist $(X, \mathcal{O}_X, (v_x \mid x \in X))$ ein Objekt aus $(VL)_{top}$, so ist $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ ein Objekt aus $\bar{\mathcal{K}}$. Jeder Morphismus $(X, \mathcal{O}_X, (v_x \mid x \in X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, (v_y \mid y \in Y))$ in $(VL)_{top}$ induziert einen Morphismus $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y^+)$ in $\bar{\mathcal{K}}$. Wir haben also einen Funktor φ_L von der Kategorie $(VL)_{top}$ in die Kategorie $\bar{\mathcal{K}}$. Via φ_L betrachten wir $(VL)_{top}$ als Unterkategorie von $\bar{\mathcal{K}}$.

Lemma 3.9.12. Seien X ein affines Objekt in $\mathcal{K}$ und Y ein Objekt in $(VL)_{top}$. Man hat eine kanonische Bijektion von der Menge der Morphismen $Y \longrightarrow X$ in $\bar{\mathcal{K}}$ auf die Menge der stetigen Ringhomomorphismen $\mathcal{A}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$, die $\mathcal{O}_X(X)$ nach $\mathcal{O}_Y^+(Y)$ abbilden.

Beweis: Sei $f: \mathcal{A}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ ein stetiger Ringhomomorphismus mit $f(\mathcal{O}_X(X)) \subseteq \mathcal{O}_Y^+(Y)$. Für jedes $y \in Y$ sei $\mathfrak{p}(y)$ der Kern der zusammengesetzten Abbildung $h_y: \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_Y^+(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}^+ \longrightarrow \ell(y)$, wobei $\ell(y)$ der Residuenkörper von $\mathcal{O}_{Y,y}^+$ ist. Es ist $\mathfrak{p}(y) = \{a \in \mathcal{O}_X(X) \mid v_y(f(a)) > 0\}$. Da f stetig ist, ist $\mathfrak{p}(y)$ offen. Deshalb haben wir eine Abbildung $\varphi: Y \longrightarrow X, y \mapsto \mathfrak{p}(y)$. Sie ist stetig, da für jedes $s \in \mathcal{O}_X(X)$ gilt $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(s)) = \{y \in Y \mid 0 \geq v_y(f(s))\}$.
Wir definieren einen Garbenmorphismus topologischer Ringe $\psi: \mathcal{A}_X \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y$. Sei s ein Element von $\mathcal{O}_X(X)$. Wir setzen $U := \{y \in Y \mid 0 \geq v_y(f(s))\}$ und $t := f(s) \mid U$. Es ist t eine Einheit in $\mathcal{O}_Y(U)$ und $v_y(\frac{1}{t}) \geq 0$ für jedes $y \in U$. Also $\frac{1}{t} \in \mathcal{O}_Y^+(U) \subseteq \mathcal{O}_Y(U)^{\circ}$. Nach (2.1.15) gibt es genau einen stetigen Ringhomomorphismus $f_s: \mathcal{A}_X(\mathcal{D}(s)) = \mathcal{A}_X(X)\langle\frac{1}{s}\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(\mathcal{D}(s))$, so daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(\psi^{-1}(\mathcal{D}(s)) & \xleftarrow{f_s} & \mathcal{A}_X(\mathcal{D}(s)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_Y(Y) & \xleftarrow[f]{} & \mathcal{A}_X(X) \end{array}$$

Die f_s definieren einen Garbenmorphismus $\psi: \mathcal{A}_X \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y$. In $\mathcal{A}_X(\mathcal{D}(s))$ haben wir den Unterring $\mathcal{O}_X(X)[\frac{1}{s}]$. Es ist $f_s\Big(\mathcal{O}_X(X)[\frac{1}{s}]\Big) \subseteq \mathcal{O}_Y^+(U)$. Da $\mathcal{O}_X(X)[\frac{1}{s}]$ dicht in $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(s))$ ist und $\mathcal{O}_Y^+(U)$ abgeschlossen in $\mathcal{O}_Y(U)$ ist, gilt $f_s(\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(s))) \subseteq \mathcal{O}_Y^+(U)$ und somit $\psi(\mathcal{O}_X) \subseteq \varphi_*\mathcal{O}_Y^+$. Sei y ein Punkt von Y und sei $h: \mathcal{O}_{X,\varphi(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}^+$ der durch ψ induzierte Ringhomomorphismus. Seien $\mathfrak{m}_y$ und $\mathfrak{m}_{\varphi(y)}$ die maximalen Ideale von $\mathcal{O}_{Y,y}$ und $\mathcal{O}_{X,\varphi(y)}$. Nach der Definition von φ gilt $g^{-1}(\mathfrak{m}_{\varphi(y)}) = g^{-1}(h^{-1}(\mathfrak{m}_y))$, wobei g die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\varphi(y)}$ ist. Hieraus folgt $\mathfrak{m}_{\varphi(y)} = h^{-1}(\mathfrak{m}_y)$, also ist h lokal.

Proposition 3.9.13. Sei X ein Objekt in $\mathcal{K}$. Es gibt ein Objekt $t(X)$ von $(VL)_{top}$ und einen Morphismus $\pi = \pi_X: t(X) \to X$ in $\bar{\mathcal{K}}$, so daß gilt: Sind Y ein Objekt von $(VL)_{top}$ und $f: Y \to X$ ein Morphismus in $\bar{\mathcal{K}}$, so gibt es genau einen Morphismus $g: Y \to t(X)$ in $(VL)_{top}$ mit $f = \pi \circ g$.
$t(X)$ ist ein adischer Raum.

Beweis: Ohne Einschränkung ist X affin. Sei $t(X)$ der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{A}_X(X), \mathcal{O}_X(X)^c)$. Nach (3.9.12) induziert die Indentität $\mathcal{A}_X(X) \to \mathcal{A}_X(X)$ einen Morphismus $\pi: t(X) \to X$ in $\bar{\mathcal{K}}$. Nach (3.2.9 ii), (3.2.10) und (3.9.12) gilt (3.9.13).

Bemerkung 3.9.14. i) Ist U eine offene affine Teilmenge von X, so ist $\pi^{-1}(U)$ affinoid.

ii) Sei X affin. Dann ist $t(X)$ der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{A}_X(X), \mathcal{O}_X(X)^c)$. Die Abbildung $\pi: t(X) \to X$ kann man folgendermaßen konstruieren: Sei v ein Punkt von $\mathrm{Spa}\,(\mathcal{A}_X(X), \mathcal{O}_X(X)^c)$. Wir betrachten v als Bewertung von $\mathcal{A}_X(X)$. Für die Bewertung $w := v \mid \mathcal{O}_X(X)$ von $\mathcal{O}_X(X)$ gilt $c\Gamma_w = (0)$. Es ist $\pi(v) = \mathrm{supp}\,(w \mid c\Gamma_w)$.

iii) Es ist $\mathcal{A}_X \to \pi_* \mathcal{O}_{t(X)}$ ein Isomorphismus. Deshalb identifizieren wir häufig für eine offene Teilmenge U von X die Ringe $\mathcal{A}_X(U)$ und $\mathcal{O}_{t(X)}(\pi^{-1}(U))$ miteinander. Sei $\mathcal{O}_X^c$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_X$ in $\mathcal{A}_X$ ([EGA], II. 6.3). Aus (2.4.4) folgt, daß $\mathcal{O}_X^c$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist mit $\mathcal{O}_X^c(U) = \mathcal{O}_X(U)^c$ für jede offene affine Teilmenge U von X. Unter dem Isomorphismus $\mathcal{A}_X \to \pi_* \mathcal{O}_{t(X)}$ wird $\mathcal{O}_X^c$ auf $\pi_* \mathcal{O}_{t(X)}^+$ abgebildet.

Ist $f: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so gibt es nach (3.9.13) genau einen Morphismus adischer Räume $t(f): t(X) \to t(Y)$, so daß in $\bar{\mathcal{K}}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} t(X) & \xrightarrow{t(f)} & t(Y) \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Also haben wir einen Funktor t von der Kategorie $\mathcal{K}$ in die Kategorie der adischen Räume.

Beispiel 3.9.15. i) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal noethersches formales Schema, so ist $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ ein Objekt der Kategorie $\mathcal{K}$. Auf diese Weise betrachten wir die Kategorie der lokal noetherschen formalen Schemata als volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{K}$. Durch Restriktion des Funktors t erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der lokal noetherschen formalen Schemata in die Kategorie der adischen Räume.

ii) Sei X ein lokal noethersches formales Schema und sei Y der zugehörige adische Raum gemäß (i). Wir setzen $T := \{y \in Y \mid v_y \text{ ist eine triviale Bewertung }\}$. Es gilt $T = \{y \in Y \mid y \text{ hat keine echte Primärspezialisierung }\}$ und jedes $y \in Y$ hat genau eine Primärspezialisierung $r(y)$, die in T liegt. Dadurch erhalten wir eine stetige Retraktion $r: Y \to T$. Die Garben $r_* \mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{O}_Y \mid T$ stimmen überein. Der lokal geringte und topologisch geringte Raum $(T, r_* \mathcal{O}_Y)$ ist kanonisch isomorph zu X. Die Menge aller Sekundärspezialisierungen aller Punkte von T ist Y_{na}.
Wir erhalten, daß der Funktor t von der Kategorie der lokal noetherschen formalen Schemata in die Kategorie der adischen Räume volltreu ist. Man kann also die Kategorie der adischen Räume als Erweiterung der Kategorie der lokal noetherschen

formalen Schemata betrachten.

Der Funktor t von der Kategorie $\mathcal{K}$ in die Kategorie der adischen Räume ist treu. Dies folgt aus (3.9.14 iii) und (3.9.16).

iii) Sei X ein noethersches Schema. Dann ist $\operatorname{Spv}^+(X)$ eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spv} X$. Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der algebraischen Funktionen auf $\operatorname{Spv}^+(X)$ bezüglich X. Jede Bewertung $x \in \operatorname{Spv}^+(X)$ setzt sich eindeutig fort zu einer Bewertung v_x von $\mathcal{O}_x$ mit Träger im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_x$. Wir machen $\mathcal{O}$ zu einer Garbe mit Werten in der Kategorie der topologischen Ringe, so daß für jede offene quasikompakte Teilmenge U von $\operatorname{Spv}^+(X)$ die Topologie auf $\mathcal{O}(U)$ diskret ist ([EGA*], 0.3.9). Dann ist $S := (\operatorname{Spv}^+(X), \mathcal{O}, (v_x \mid x \in \operatorname{Spv}^+(X)))$ ein Objekt von $(VL)_{top}$.

Es gibt einen kanonischen Morphismus $\sigma: t(X) \to S$ in $(VL)_{top}$. Äquivalent sind

a) σ ist injektiv

b) σ ist ein Isomorphismus

c) X ist separiert.

iv) Seien A ein noetherscher Ring und Z eine homogene Koordinate von $\mathbb{P}^2_A$. Sei X die Vervollständigung von $\mathbb{P}^2_A$ längs der linearen Hyperebene $\{Z = 0\}$. Der analytische Raum $t(X)_a$ ist der in (3.3.24) konstruierte analytische Raum.

Lemma 3.9.16. Für jedes $X \in \mathcal{K}$ ist $\pi: t(X) \to X$ surjektiv.

Beweis: Ohne Einschränkung ist X affin. Sei $\mathfrak{p}$ ein offenes Primideal von $\mathcal{O}_X(X)$. Sei $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal von $\mathcal{O}_X(X)$, das in $\mathfrak{p}$ enthalten ist. Nach (1.1.16) gibt es eine Bewertung w von $\mathcal{O}_X(X)$, so daß $\operatorname{supp}(w) = \mathfrak{q}$ und die trivial Bewertung von $\mathcal{O}_X(X)$ mit Träger $\mathfrak{p}$ eine Primärspezialisierung von w ist. Es ist $w(a) \geq 0$ für jedes $a \in \mathcal{O}_X(X)$ und $w(a) > 0$ für jedes $a \in \mathcal{O}_X(X)^{oo}$. Da $\mathcal{A}_X(X)$ ein Primideal besitzt, das über $\mathfrak{q}$ liegt, gibt es eine Bewertung v von $\mathcal{A}_X(X)$ mit $v \mid \mathcal{O}_X(X) = w$. Nach (3.1.3) ist $v \mid c\Gamma_v \in \operatorname{Spa}(\mathcal{A}_X(X), \mathcal{O}_X(X)^c)$. Aus (3.9.14 ii) folgt $\pi(v \mid c\Gamma_v) = \mathfrak{p}$.

Bemerkung 3.9.17. Sei $X \in \mathcal{K}$. Aus (3.9.14 i) und (3.9.16) folgt, daß X genau dann quasikompakt ist, wenn $t(X)$ quasikompakt ist. Da X quasisepariert ist, ist auch $t(X)$ quasisepariert.

Lemma 3.9.18. Seien X ein Objekt von $\mathcal{K}$, $f: Y \to X$ die Aufblasung eines offenen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermoduls $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}_X$ und $\mathcal{I}$ die von $\operatorname{im}(\pi_X^{-1}(\mathcal{J}) \to \mathcal{O}_{t(X)})$ erzeugte Idealgarbe von $\mathcal{O}_{t(X)}$. Es gilt

i) Der Morphismus $t(f): t(Y) \to t(X)$ induziert einen Isomorphismus von $t(Y)$ auf den offenen Teilraum $t(X) \backslash V(\mathcal{I})$. Genau dann ist $t(f)$ ein Isomorphismus, wenn f eine gute Aufblasung ist.

ii) Angenommen, $\mathcal{J}$ wird als $\mathcal{O}_X$-Modul von $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{J}(X)$ erzeugt. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir $U_i = \{x \in t(X) \mid v_x(a_k) \geq v_x(a_i) \neq \infty$ für $k = 1, \ldots, n\}$ und $V_i = \{x \in t(Y) \mid v_x(f^*(a_k)) \geq v_x(f^*(a_i)) \neq \infty$ für $k = 1, \ldots, n\}$ (wir identifizieren hier $\mathcal{A}_X(X)$ und $\mathcal{O}_{t(X)}(t(X))$, ebenso $\mathcal{A}_Y(Y)$ und $\mathcal{O}_{t(Y)}(t(Y))$. Seien $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq Y$ wie in (3.9.7 i) definiert. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$U_i = t(f)(V_i) \quad \text{und} \quad V_i = \pi_Y^{-1}(Y_i).$$

Beweis: Ohne Einschränkung ist X affin. Zunächst zeigen wir:

(1) Es ist $V_i = \pi_Y^{-1}(Y_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Denn: Es ist $f^*(a_i) \mid Y_i$ eine Einheit in $\mathcal{A}_Y(Y_i)$ und es gibt ein $e_k \in \mathcal{O}_Y(Y_i)$ mit $f^*(a_k) \mid Y_i = (f^*(a_i) \mid Y_i) \cdot e_k$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ((3.9.7.ii)). Hieraus folgt $\pi_Y^{-1}(Y_i) \subseteq V_i$. Sei x ein Element von V_i. Wir wählen ein $s \in \{1, \ldots, n\}$ mit $y := \pi_Y(x) \in Y_s$. Sei e das Element von $\mathcal{O}_Y(Y_s)$ mit $f^*(a_i) \mid Y_s = (f^*(a_s) \mid Y_s) \cdot e$. Es ist e_y eine Einheit in $\mathcal{O}_{Y,y}$, denn $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}^+_{t(Y),x}$ ist lokal und $v_x(f^*(a_s)) \geq v_x(f^*(a_i)) \neq \infty$. Hieraus folgt $y \in Y_i$ ((3.9.7 ii)), also $x \in \pi_Y^{-1}(Y_i)$.

Aus dem Beweis von (3.9.6) folgt

(2) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $t(f)(\pi_Y^{-1}(Y_i)) = U_i$ und die Restriktion $\pi_Y^{-1}(Y_i) \to U_i$ von $t(f)$ ist ein Isomorphismus.

Trivialerweise gilt

(3) Es ist $V_i = t(f)^{-1}(U_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aus (1), (2) und (3) folgt, daß $t(f)$ ein Isomorphismus von $t(Y)$ auf $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ ist. Damit ist (3.9.18) gezeigt.

Beispiel 3.9.19. i) Ist X ein lokal noethersches formales Schema, so ist die Identität $X \to X$ die einzige gute Aufblasung von X.
ii) Seien X ein Objekt von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ ein Definitionsideal des formalen Schemas $(X, \mathcal{O}_X)$. Sei $f: Y \to X$ die Aufblasung von $\mathcal{J}$ (in der Kategorie $\mathcal{K}$). Dann induziert $t(f): t(Y) \to t(X)$ einen Isomorphismus von $t(Y)$ auf $t(X)_a$.

Bemerkung 3.9.20. i) Ist $f: Y \to X$ eine gute Aufblasung, so ist $\mathcal{A}_X \to f_*\mathcal{A}_Y$ ein Isomorphismus (topologischer Garben).

ii) Sind $g: Z \to Y$ und $f: Y \to X$ gute Aufblasungen (bzw. 1-gute Aufblasungen) und ist X quasikompakt, so ist auch $f \circ g: Z \to X$ eine gute Aufblasung (bzw. 1-gute Aufblasung).

Beweis: i) Für jede offene Teilmenge U von X haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{t(Y)}(\pi_Y^{-1}(f^{-1}(U))) & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{A}_Y(f^{-1}(U)) \\ \gamma \uparrow & & \uparrow \alpha \\ \mathcal{O}_{t(X)}(\pi_X^{-1}(U)) & \xleftarrow[\beta]{} & \mathcal{A}_X(U) \end{array}$$

Nach (3.9.14 ii) und (3.9.18 i) sind β, γ, δ Isomorphismen. Also ist auch α ein Isomorphismus.

ii) (vgl. [RG], 5.1.4). Sei f die Aufblasung eines offenen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermoduls $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}_X$ und sei g die Aufblasung eines offenen kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Untermoduls $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}_Y$. Sind f und g 1-gute Aufblasungen, so nehmen wir an $1 \in \mathcal{J}(X)$ und $1 \in \mathcal{I}(Y)$. Wir setzen $\mathcal{H} := \bar{f}(\mathcal{J})$. Nach [EGA], III.5.2.4 und (3.9.9) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{I}\mathcal{H}^n = \bar{f}(f_*(\mathcal{I}\mathcal{H}^n))$. Es ist $\mathcal{I}\mathcal{H}^n$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Untermodul von $\mathcal{A}_Y$. Nach (i) ist $\mathcal{L} := f_*(\mathcal{I}\mathcal{H}^n)$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{A}_X$. Nach (3.9.8) ist $f \circ g$ die Aufblasung von $\mathcal{L}\mathcal{J}$. Da f und g gute Aufblasungen sind, ist auch $f \circ g$ eine gute Aufblasung ((3.9.18 i)).

Lemma 3.9.21. Sei X ein Objekt von $\mathcal{K}$.

i) Sind x und y zwei Punkte von $t(X)$ und y eine Primärspezialisierung von x, so gilt $\pi_X(x) = \pi_X(y)$.

ii) Seien $U_1, \ldots, U_n$ offene quasikompakte Teilmengen von $t(X)$, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen sind. Dann gibt es eine 1-gute Aufblasung $f: Y \to X$ und offene quasikompakte Teilmengen $V_1, \ldots, V_n$ von Y, so daß $t(f)^{-1}(U_i) = \pi_Y^{-1}(V_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. (Die Voraussetzung, daß U_i abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen ist, ist notwendig nach (i) und (3.9.18 i).)

Beweis: i) Sei U eine offene affine Umgebung von $\pi_X(y)$ in X. Die Punkte x und y liegen in $\pi_X^{-1}(U)$. Die Behauptung folgt nun aus (3.9.14 ii).

ii) Nach (i) ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jede Teilmenge W von X die Menge $U_i \cap \pi_X^{-1}(W)$ abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen. Nach (3.9.17) ist $U_i \cap \pi_X^{-1}(W)$ quasikompakt für jede quasikompakte offene Teilmenge W von X. Indem wir jedes U_i als endliche Vereinigung von Mengen der Form $U_i \cap \pi_X^{-1}(W)$ schreiben, wobei W eine offene affine Teilmenge von X ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß es zu jedem $i \in \{1\ldots,n\}$ eine offene affine Teilmenge W_i von X gibt mit $U_i \subseteq \pi_X^{-1}(W_i)$. Jedes $\pi_X^{-1}(W_i)$ ist affinoid. Deshalb können wir nach (3.6.3 iii) jedes U_i schreiben als endliche Vereinigung von rationalen Teilmengen von $\pi_X^{-1}(W_i)$, die wie in (3.6.3 ii) gewählt sind. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß jedes U_i eine solche rationale Teilmenge ist, also $U_i = R(\frac{L_i}{l_i}) \subseteq \pi_X^{-1}(W_i)$, wobei $l_i \in \mathcal{A}_X(W_i)$ und L_i eine endliche Teilmenge von $\mathcal{A}_X(W_i)$ ist mit $\{1,l_i\} \subseteq L_i$. Sei $f_i^{'}: Y_i^{'} \to W_i$ die Aufblasung von $L_i \cdot (\mathcal{O}_X \mid W_i) \subseteq \mathcal{A}_X \mid W_i$. Es gibt eine offene Teilmenge H_i von $Y_i^{'}$ mit $\pi_{Y_i'}^{-1}(H_i) = t(f_i^{'})^{-1}(U_i)$ ((3.9.18)). Nach (3.9.11) können wir $f_i^{'}$ fortsetzen zu einer 1-guten Aufblasung $f_i: Y_i \to X$. Nach (3.9.8 i) gibt es eine 1-gute Aufblasung $f: Y \to X$ und Morphismen $g_i: Y \to Y_i$ mit $f = f_i \circ g_i$ für $i = 1,\ldots,n$. Mit $V_i := g_i^{-1}(H_i)$ gilt $t(f)^{-1}(U_i) = \pi_Y^{-1}(V_i)$.

Satz 3.9.22. i) Seien X und Y Objekte von $\mathcal{K}$ über einem Objekt Z von $\mathcal{K}$, $f: X \to Z$ und $g: Y \to Z$. Der durch g gegebene Morphismus formaler Schemata $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ sei lokal von endlichem Typ und X sei quasikompakt. Weiterhin sei $h: t(X) \to t(Y)$ ein $t(Z)$-Morphismus adischer Räume (die Gleichung $t(g) \circ h = t(f)$ in $(VL)_{top}$ ist äquivalent zu der Gleichung $g \circ \pi_Y \circ h = f \circ \pi_X$ in $\bar{\mathcal{K}}$). Dann gibt es eine 1-gute Aufblasung $p: X' \to X$ und einen Z-Morphismus $s: X' \to Y$ in $\mathcal{K}$, so daß $h \circ t(p) = t(s)$.

ii) Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß der durch f gegebene Morphismus formaler Schemata $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal von endlichem Typ ist und Y quasikompakt ist. Weiterhin sei $t(f): t(X) \to t(Y)$ ein Isomorphismus. Dann gibt es eine 1-gute Aufblasung $q: Y' \to Y$ und ein kartesisches Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

(siehe (3.9.8 iii)), so daß f' ein Isomorphismus in $\mathcal{K}$ ist.

Beweis: i) Nach (3.9.20 ii) genügt es, p als Komposition von 1-guten Aufblasungen zu konstruieren. Wir dürfen bei Bedarf X durch eine 1-gute Aufblasung von X ersetzen. $t(X)$ ist quasikompakt.

Seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ endliche Mengen offener affiner Teilmengen von Y, so daß gilt: $h(t(X)) \subseteq \pi_Y^{-1}(\bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U)$, zu jedem $W \in \mathfrak{W} := \mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ gibt es eine offene affinoide Teilmenge V von Z mit $g(W) \subseteq V$, und für jedes $U, U' \in \mathfrak{U}$ läßt sich $U \cap U'$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{W}$ schreiben.

Für jedes $W \in \mathfrak{W}$ ist $\pi_Y^{-1}(W)$ quasikompakt und abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen. Aus (3.8.12) folgt, daß $h^{-1}(\pi_Y^{-1}(W))$ quasikompakt und abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen ist für jedes $W \in \mathfrak{W}$. Nach (3.9.21 ii) können wir annehmen, daß es zu jedem $W \in \mathfrak{W}$ eine offene quasikompakte Teilmenge $X(W)$ von X gibt mit $h^{-1}(\pi_Y^{-1}(W)) = \pi_X^{-1}(X(W))$. Der Morphismus h gibt für jedes $W \in \mathfrak{W}$ einen Ringhomomorphismus

$$h_W : \mathcal{A}_Y(W) \to \mathcal{A}_X(X(W))$$

Sei $\mathcal{O}_X^c$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_X$ in $\mathcal{A}_X$. Es gilt

(1) Für jedes $W \in \mathfrak{W}$ ist der von $h_W(\mathcal{O}_Y(W))$ erzeugte $(\mathcal{O}_X \mid X(W))$-Untermodul $\mathcal{F}_W$ von $\mathcal{A}_X \mid X(W)$ von endlichem Typ und in $\mathcal{O}_X^c$ enthalten.

Denn: Sei ein $W \in \mathfrak{W}$ gegeben. Sei V eine offene affine Teilmenge von Z mit $g(W) \subseteq V$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{O}_Y(W)$ topologisch von endlichem Typ über $\mathcal{O}_Z(V)$ ist, gibt es eine endliche Teilmenge L von $\mathcal{O}_Y(W)$, so daß $\mathcal{O}_Z(V)[L]$ dicht in $\mathcal{O}_Y(W)$ ist. Wegen $g \circ \pi_Y \circ h = f \circ \pi_X$ gilt $h_W(\mathcal{O}_Z(V)[L]) \subseteq \mathcal{O}_X(X(W))[h_W(L)]$. Da $\mathcal{O}_X(X(W))$ offen in $\mathcal{A}_X(X(W))$ ist, erhalten wir $h_W(\mathcal{O}_Y(W)) \subseteq \mathcal{O}_X(X(W))[h_W(L)]$. Es ist $\mathcal{O}_Y(W) \subseteq \mathcal{O}^+_{t(Y)}(\pi_Y^{-1}(W))$ und somit $h_W(\mathcal{O}_Y(W)) \subseteq \mathcal{O}^+_{t(X)}(\pi_X^{-1}(X(W))) = \mathcal{O}_X^c(X(W))$. Damit ist (1) gezeigt.

Nach (3.9.4) kann man $\mathcal{F}_W$ zu einem offenen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{G}_W$ von $\mathcal{A}_X$ fortsetzen. Da $\mathcal{O}_X^c$ quasikohärent ist ((3.9.14 iii)), ist $\mathcal{G}_W \cap \mathcal{O}_X^c$ kohärent. Sei $\mathcal{J}$ die von $\sum_{W \in \mathfrak{W}} (\mathcal{G}_W \cap \mathcal{O}_X^c)$ erzeugte $\mathcal{O}_X$-Unteralgebra von $\mathcal{A}_X$. Es ist $\mathcal{J}$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{A}_X$ mit

(2) $h_W(\mathcal{O}_Y(W)) \subseteq \mathcal{J}(X(W))$ für jedes $W \in \mathfrak{W}$.

Sei $r : X' \to X$ die Aufblasung von $\mathcal{J}$. Wir ersetzen X durch X', h durch $h \circ t(r)$ und $X(W)$ durch $r^{-1}(X(W))$. Mit (3.9.10) folgt dann aus (2)

(3) Für jedes $W \in \mathfrak{W}$ gilt $h_W(\mathcal{O}_Y(W)) \subseteq \mathcal{O}_X(X(W))$.

Die Ringhomomorphismen $h_W : (\mathcal{A}_Y(W), \mathcal{O}_Y(W)) \to (\mathcal{A}_X(X(W)), \mathcal{O}_X(X(W)))$ definieren Z-Morphismen $s_W : X(W) \to W$ in $\mathcal{K}$. Es gilt

(4) Sind W, W' Elemente von $\mathfrak{W}$ mit $W' \subseteq W$, so ist $X(W') \subseteq X(W)$, $s_W(X(W')) \subseteq W'$ und die Restriktion $X(W') \to W'$ von s_W stimmt überein mit $s_{W'}$.

Denn: Aus der Konstruktion von $X(W)$ und $X(W')$ folgt $X(W') \subseteq X(W)$. Die übrigen Behauptungen aus (4) folgen aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{A}_X(X(W')),\mathcal{O}_X(X(W'))) & \overset{h_{W'}}{\longleftarrow} & (\mathcal{A}_Y(W'),\mathcal{O}_Y(W')) \\ \beta\uparrow & & \uparrow\alpha \\ (\mathcal{A}_X(X(W)),\mathcal{O}_X(X(W))) & \underset{h_W}{\longleftarrow} & (\mathcal{A}_Y(W),\mathcal{O}_Y(W)),\end{array}$$

wobei α und β durch Restriktionshomomorphismen der jeweiligen Garben gegeben werden.

Mit (4) erhalten wir

(5) Seien U, U' zwei Elemente von $\mathfrak{U}$. Dann ist $s_U(X(U) \cap X(U')) \subseteq U \cap U'$, $s_{U'}(X(U) \cap X(U')) \subseteq U \cap U'$ und die Restriktionen $X(U) \cap X(U') \to U \cap U'$ von s_U und $s_{U'}$ stimmen überein.

Denn: Es ist $\mathfrak{J} := \{V \in \mathfrak{W} \mid V \subseteq U \cap U'\}$ eine Überdeckung von $U \cap U'$. Deshalb ist $\{X(V) \mid V \in \mathfrak{J}\}$ eine Überdeckung von $X(U) \cap X(U')$. Damit folgt (5) aus (4).

Da $\{X(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ eine Überdeckung von X ist, definieren nach (5) die s_U einen Z-Morphismus $s: X \to Y$ in $\mathcal{K}$. Es gilt $t(s) = h$.

ii) Nach (3.9.20 ii) genügt es, q als Komposition von 1-guten Aufblasungen zu konstruieren. Wir nehmen an, daß (ii) gilt, wenn Y durch n offene affine Teilmengen überdeckt werden kann, und zeigen nun, daß (ii) gilt, wenn Y durch $n+1$ offene affine Teilmengen $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ überdeckt wird. Sei $Z := Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$. Wir wenden unsere Annahme an auf die Restriktion $f^{-1}(Z) \to Z$ von f.

Nach (3.9.11) gibt es eine 1-gute Aufblasung $q: Y' \to Y$ und ein kartesisches Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y, \end{array}$$

so daß die Restriktion $g^{-1}(q^{-1}(Z)) \to q^{-1}(Z)$ von g ein Isomorphismus ist. Es genügt, (ii) für g zu beweisen. Die Voraussetzungen von (ii) sind für g erfüllt. Angenommen, es gilt (ii) für die Restriktion $g^{-1}(q^{-1}(Y_{n+1})) \to q^{-1}(Y_{n+1})$ von g. Indem wir wieder (3.9.11) anwenden, erhalten wir, daß (ii) für g gilt. Wir ersetzen Y durch $q^{-1}(Y_{n+1})$, X durch $g^{-1}(q^{-1}(Y_{n+1}))$ und f durch die Restriktion $g^{-1}(q^{-1}(Y_{n+1})) \to q^{-1}(Y_{n+1})$ von g. Dadurch haben wir den Beweis von (ii) auf den Fall reduziert, daß $t(Y)$ affinoid ist.

Seien $\{U_i \mid i \in I\}$ und $\{V_j \mid j \in J\}$ offene affine Überdeckungen von X und Y. Dann haben wir auf $t(Y)$ die offene Überdeckung $\mathfrak{U} := \{t(f)(\pi_X^{-1}(U_i)) \cap \pi_Y^{-1}(V_j) \mid i \in I, j \in$

$J\}$. Nach (3.6.3 iii) gibt es eine endliche Teilmenge L von $\mathcal{A}_Y(Y)$ mit $1 \in L$ und eine endliche Teilmenge T von L, so daß $\{R(\frac{L}{l}) \mid l \in T\}$ eine Überdeckung von $t(Y)$ ist, die $\mathfrak{U}$ verfeinert, d.h. wir haben Abbildungen $\varphi: T \to I$ und $\psi: T \to J$, so daß

(1) $R(\frac{L}{l}) \subseteq t(f)(\pi_X^{-1}(U_{\varphi(l)}))$ und $R(\frac{L}{l}) \subseteq \pi_Y^{-1}(V_{\psi(l)})$ für jedes $l \in T$.

Sei $q: Y' \to Y$ die Aufblasung von $L \cdot \mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{A}_Y$ und sei

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & Y' \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

das kartesische Diagramm in $\mathcal{K}$ zu f und q. Es gilt

(2) Der Morphismus g ist affin, d. h. es gibt eine offene affine Überdeckung $\mathfrak{V}$ von Y', so daß $g^{-1}(V)$ affin ist für jedes $V \in \mathfrak{V}$.

Denn: Für jedes $l \in T$ haben wir in $t(X)$ die Mengen $Q_l := \{x \in t(X) \mid v_x(f^*(a)) \geq v_x(f^*(l)) \neq \infty$ für jedes $a \in L\}$. Es gilt

(a) $Q_l = t(f)^{-1}(R(\frac{L}{l}))$ für jedes $l \in T$.

p ist die Aufblasung von $f^*(L) \cdot \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{A}_X$. Nach (3.9.18) und (3.9.7 iii) gibt es zu jedem $l \in T$ eine offene Teilmenge P_l von X' mit

(b) $\pi_{X'}^{-1}(P_l) = t(p)^{-1}(Q_l)$ für jedes $l \in T$ und

(c) $P_l \cap p^{-1}(U)$ ist affin für jede offene affine Teilmenge U von X und jedes $l \in T$.

Nach (1) ist $R(\frac{L}{l}) \subseteq t(f)(\pi_X^{-1}(U_{\varphi(l)}))$. Mit (a) erhalten wir $Q_l \subseteq \pi_X^{-1}(U_{\varphi(l)})$, also $t(p)^{-1}(Q_l) \subseteq \pi_{X'}^{-1}(p^{-1}(U_{\varphi(l)}))$. Aus (b) folgt $\pi_{X'}^{-1}(P_l) \subseteq \pi_{X'}^{-1}(p^{-1}(U_{\varphi(l)}))$. Nach (3.9.16) ist dann $P_l \subseteq p^{-1}(U_{\varphi(l)})$. Somit folgt aus (c)

(d) P_l ist affin für jedes $l \in T$.

Nach (3.9.18) und (3.9.7 iii) gibt es zu jedem $l \in T$ eine offene Teilmenge S_l von Y' mit

(e) $\pi_{Y'}^{-1}(S_l) = t(q)^{-1}(R(\frac{L}{l}))$ für jedes $l \in T$ und

(f) $S_l \cap q^{-1}(V)$ ist affin für jede offene affine Teilmenge V von Y und jedes $l \in T$.

Nach (1) ist $R(\frac{L}{l}) \subseteq \pi_Y^{-1}(V_{\psi(l)})$, also $t(q)^{-1}(R(\frac{L}{l})) \subseteq \pi_{Y'}^{-1}(q^{-1}(V_{\psi(l)}))$. Mit (e) erhalten wir $\pi_{Y'}^{-1}(S_l) \subseteq \pi_{Y'}^{-1}(q^{-1}(V_{\psi(l)}))$ und somit $S_l \subseteq q^{-1}(V_{\psi(l)})$ (nach (3.9.16)). Daher gilt nach (f)

(g) S_l ist affin für jedes $l \in T$.

Aus (e), (a), (b) folgt $\pi_{X'}^{-1}(g^{-1}(S_l)) = t(g)^{-1}(\pi_{Y'}^{-1}(S_l)) = t(g)^{-1}(t(q)^{-1}(R(\frac{L}{l}))) = t(p)^{-1}(t(f)^{-1}(R(\frac{L}{l}))) = t(p)^{-1}(Q_l) = \pi_{X'}^{-1}(P_l)$. Daher gilt nach (3.9.16)

(h) $P_l = g^{-1}(S_l)$ für jedes $l \in T$.

Da $\{R(\frac{L}{l}) \mid l \in T\}$ eine Überdeckung von $t(Y)$ ist, folgt aus (e) und (3.9.16), daß $\{S_l \mid l \in T\}$ eine Überdeckung von Y' ist. Aus (d), (g), (h) folgt (2).

Es genügt, (ii) für $g: X' \to Y'$ zu beweisen. Indem wir X durch X', Y durch Y' und f durch g ersetzen, können wir ab jetzt zum Beweis von (ii) voraussetzen, daß f affin ist.

Da $t(f)$ ein Isomorphismus ist, gilt

(3) Der Garbenmorphismus $\mathcal{A}_Y \to f_*\mathcal{A}_X$ ist ein Isomorphismus (topologischer Garben).

Wir zeigen nun

(4) Der $\mathcal{O}_Y$-Modul $f_*\mathcal{O}_X$ ist kohärent.

Denn: Sei V eine offene affine Teilmenge von Y, so daß $U := f^{-1}(V)$ affin in X ist. Der Morphismus f induziert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_X(U) & \overset{\alpha}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} & \mathcal{A}_Y(V) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_X(U) & \longleftarrow & \mathcal{O}_Y(V) \end{array}$$

Mittels α identifizieren wir $\mathcal{A}_Y(V)$ mit $\mathcal{A}_X(U)$, also $\mathcal{O}_Y(V) \subseteq \mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{A}_X(U) = \mathcal{A}_Y(V)$. Nach Voraussetzung über f ist $\mathcal{O}_X(U)$ topologisch von endlichem Typ über $\mathcal{O}_Y(V)$. Da $\mathcal{O}_Y(V)$ offen in $\mathcal{A}_Y(V)$ und damit auch offen in $\mathcal{O}_X(U)$ ist, ist $\mathcal{O}_X(U)$ von endlichem Typ über $\mathcal{O}_Y(V)$. Es ist $\mathcal{O}^+_{t(X)}(\pi_X^{-1}(U))$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_X(U)$ in $\mathcal{A}_X(U)$, ebenso ist $\mathcal{O}^+_{t(Y)}(\pi_Y^{-1}(V))$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_Y(V)$ in $\mathcal{A}_Y(V)$. Wegen $\alpha(\mathcal{O}^+_{t(Y)}(\pi_Y^{-1}(V))) = \mathcal{O}^+_{t(X)}(\pi_X^{-1}(U))$ ist also $\mathcal{O}_X(U)^c = \mathcal{O}_Y(V)^c$. Deshalb ist $\mathcal{O}_X(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Y(V)$-Modul.

Aufgrund von (3) und (4) betrachten wir $f_*\mathcal{O}_X$ als offenen kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Untermodul von $\mathcal{A}_Y$. Sei $q: Y' \to Y$ die Aufblasung von $f_*\mathcal{O}_X$ und sei

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & Y' \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

das kartesische Diagramm in $\mathcal{K}$ zu f und q. Wegen $\bar{f}(f_*\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X$ gilt $X' = X$ und $p = \mathrm{id}_X$. Da f affin ist, folgt aus (3.9.10) und (3): Der Morphismus g ist affin und die Garbenmorphismen $\mathcal{A}_{Y'} \to g_*\mathcal{A}_{X'}$ und $\mathcal{O}_{Y'} \to g_*\mathcal{O}_{X'}$ sind Isomorphismen. Daher ist g ein Isomorphismus.

Korollar 3.9.23. Ist $f: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, der die Voraussetzungen von (3.9.22 ii) erfüllt, so gibt es eine 1-gute Aufblasung $g: W \to X$, so daß $f \circ g: W \to Y$ eine 1-gute Aufblasung ist.

Satz 3.9.24. Seien X ein quasikompakter adischer Raum, Z ein Objekt in $\mathcal{K}$ und $X \to t(Z)$ ein Morphismus adischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist. Dann sind äquivalent

i) Es gibt einen Morphismus $Y \to Z$ in $\mathcal{K}$, so daß X und $t(Y)$ als adische Räume über $t(Z)$ isomorph sind.

ii) X ist quasisepariert und jeder abgeschlossene Punkt von X besitzt ein Fundamentalsystem von offenen affinoiden Umgebungen, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen sind.

Ist $Y \to Z$ ein Morphismus wie in (i), so ist $\mathcal{A}_Y$ als Algebrengarbe von endlichem Typ über $\mathcal{A}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y$. Sind die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt, so kann man den Morphismus $Y \to Z$ in (i) so wählen, daß der zugehörige Morphismus formaler Schemata $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ von endlichem Typ ist.

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Nach (3.9.17) ist $t(Y)$ quasisepariert. Sei x ein abgeschlossener Punkt von $t(Y)$. Sei U eine offene affine Umgebung von $\pi_Y(x)$ in Y. Nach (3.6.3(i), (ii)) hat x ein Fundamentalsystem $\mathfrak{U}$ von offenen Umgebungen in $\pi_Y^{-1}(U)$, so daß jedes $V \in \mathfrak{U}$ affinoid und abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in $\pi_Y^{-1}(U)$ ist. Nach (3.9.21 i) ist $\pi_Y^{-1}(U)$ abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in $t(Y)$. Deshalb ist jedes $V \in \mathfrak{U}$ abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in $t(Y)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Den Morphismus $X \to t(Z)$ bezeichnen wir mit f. Es gilt

(1) Es gibt eine offene affinoide Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$ von X, so daß jedes U_i abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in X ist und es zu jedem U_i eine offene affine Teilmenge V von Z gibt mit $f(U_i) \subseteq \pi_Z^{-1}(V)$.

Denn: Sei S die Menge der abgeschlossenen Punkte von X. Zu jedem $s \in S$ wählen wir eine offene affinoide Umgebung U_s von s in X, so daß es eine offene affine Teilmenge V von Z gibt mit $f(U_s) \subseteq \pi_Z^{-1}(V)$ und U_s abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen in X ist. Da X quasikompakt ist, spezialisiert jeder Punkt von X in einen Punkt von S. Deshalb ist $\{U_s \mid s \in S\}$ eine Überdeckung von X.

Für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ setzen wir $X_k = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Wir zeigen durch vollständige Induktionen nach $k = 0, 1, \ldots, n$

(2) Es gibt einen Morphismus $Y \to Z$ in $\mathcal{K}$, so daß $t(Y)$ und X_k isomorph über $t(Z)$ sind und der Morphismus formaler Schemata $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ lokal von endlichem Typ ist.

Wir nehmen an, daß (2) für ein gegebenes k gilt und zeigen nun (2) für $k+1$. Sei V eine offene affine Teilmenge von Z mit $f(U_{k+1}) \subseteq \pi_Z^{-1}(V)$. Nach (3.8.15) ist der durch f induzierte Ringhomomorphismus affinoider Ringe $\varphi: (\mathcal{A}_Z(V), \mathcal{O}_Z(V)^c) \to (\mathcal{O}_X(U_{k+1}), \mathcal{O}_X^+(U_{k+1}))$ topologisch von endlichem Typ. Nach (2.4.9) gibt es einen offenen Unterring A von $\mathcal{O}_X^+(U_{k+1})$, so daß $\varphi(\mathcal{O}_Z(V)) \subseteq A$, die Restriktion $\mathcal{O}_Z(V) \to A$ von φ topologisch von strikt endlichem Typ ist und $\mathcal{O}_X^+(U_{k+1}) = A^c$. Es ist A ein adischer Ring ((2.3.27 i)).

Sei W das Objekt aus $\mathcal{K}$ zu $(\mathcal{O}_X(U_{k+1}), A)$, d.h. $(W, \mathcal{O}_W)$ ist das affine formale Schema zu dem vollständigen adischen Ring A und $\mathcal{A}_W$ ist die $\mathcal{O}_W$-Algebrengarbe zu der A-Algebra $\mathcal{O}_X(U_{k+1})$. Der durch φ gegebene Ringhomomorphismus $(\mathcal{A}_Z(V), \mathcal{O}_Z(V)) \to (\mathcal{O}_X(U_{k+1}), A)$ definiert einen Morphismus $W \to Z$ in $\mathcal{K}$. Wir haben einen kanonischen $t(Z)$-Isomorphismus $\alpha_W: t(W) \to U_{k+1}$.

Sei $Y \to Z$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ lokal von endlichem Typ ist, und sei $\alpha_Y: t(Y) \to X_k$ ein $t(Z)$-Isomorphismus. Indem wir W und Y durch geeignete gute Aufblasungen ersetzen, können wir nach (3.9.18 i) und (3.9.21 ii) annehmen, daß es quasikompakte offene Teilmengen W_1 und Y_1 von W und Y gibt mit $\alpha_W^{-1}(X_k \cap U_{k+1}) = \pi_W^{-1}(W_1)$ und $\alpha_Y^{-1}(X_k \cap U_{k+1}) = \pi_Y^{-1}(Y_1)$. Sei β der $t(Z)$-Isomorphismus $(\alpha_W \mid X_k \cap U_{k+1})^{-1} \circ (\alpha_Y \mid \alpha_Y^{-1}(X_k \cap U_{k+1}))$ von $t(Y_1)$ nach $t(W_1)$. Indem wir Y durch eine geeignete gute Aufblasung ersetzen, können wir nach (3.9.11) und (3.9.22 i) annehmen, daß es einen Z-Morphismus $g: Y_1 \to W_1$ gibt mit $t(g) = \beta$. Indem wir nochmals W und Y durch geeignete gute Aufblasungen ersetzen, können wir nach (3.9.11) und (3.9.22 ii) sogar annehmen, daß $g: Y_1 \to W_1$ ein Isomorphismus ist.

Sei Y' das Objekt von $\mathcal{K}$, das durch Verkleben von Y und W längs g entsteht. Es ist Y' ein Objekt über Z und α_Y und α_W definieren einen $t(Z)$-Isomorphismus $t(Y') \to X_{k+1}$. Damit ist (2) gezeigt.

Sei $Y \to Z$ wie in (2) mit $k = n$. Da $t(Y)$ isomorph zu X ist, ist Y quasikompakt. Weiterhin ist Z quasisepariert. Deshalb ist der Morphismus $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ quasikompakt und damit von endlichem Typ.

Sei $f: Y \to Z$ wie in (i). Seien U und V offene affine Teilmengen von Y und Z mit $f(U) \subseteq V$. Nach (3.8.15) ist der durch f induzierte Ringhomomorphismus f-adischer Ringe $\mathcal{A}_Z(V) \to \mathcal{A}_Y(U)$ topologisch von endlichem Typ. Da $\mathcal{O}_Y(U)$ offen in $\mathcal{A}_Y(U)$ ist, folgt aus (2.3.28), daß $\mathcal{A}_Y(U)$ endlich erzeugt über $\mathcal{A}_Z(V) \otimes_{\mathcal{O}_Z(V)} \mathcal{O}_Z(U)$ ist.

Deshalb ist $\mathcal{A}_Y$ als Algebrengarbe von endlichem Typ über $\mathcal{A}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y$.

Bemerkung 3.9.25. Seien X ein quasikompakter adischer Raum, Z ein Objekt in $\mathcal{K}$ und $X \to t(Z)$ ein Morphismus adischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist. Wir nehmen an, daß es ein $Y \in \mathcal{K}/Z$ gibt, so daß $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ von endlichem Typ ist und X über $t(Z)$ isomorph zu $t(Y)$ ist. Im allgemeinen ist Y nicht eindeutig bestimmt. Sei I die Familie aller Paare (Y, α), wobei $Y \in \mathcal{K}/Z$, so daß $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ von endlichem Typ ist, und $\alpha: X \to t(Y)$ ein $t(Z)$-Isomorphismus ist. Sind (Y, α) und (Y', α') zwei Elemente von I, so setzen wir $(Y, \alpha) \leq (Y', \alpha')$, wenn es einen Z-Morphismus $f: Y' \to Y$ gibt mit $\alpha = t(f) \circ \alpha'$. (Da der Funktor t treu ist ((3.9.15 ii)), gibt es zu gegebenen (Y, α), $(Y', \alpha') \in I$ höchstens ein solches f.) Sind $(Y, \alpha) \in I$ und $f: Y' \to Y$ eine gute Aufblasung, so ist $t(f)$ ein Isomorphismus und deshalb $(Y', t(f)^{-1} \circ \alpha) \in I$. Nach (3.9.22 i) ist zu vorgegebenem $(Y, \alpha) \in I$ die Menge aller $(Y', \alpha') \in I$, so daß $(Y, \alpha) \leq (Y', \alpha')$ und der Morphismus $f: Y' \to Y$ mit $\alpha = t(f) \circ \alpha'$ eine 1-gute Aufblasung ist, kofinal im I. Insbesondere gibt es zu $a, b \in I$ immer ein $c \in I$ mit $a \leq c$ und $b \leq c$.

Indem wir $(Y, \alpha) \in I$ auf $Y \in \bar{\mathcal{K}}$ abbilden, erhalten wir einen kontravarianten Funktor F von der Kategorie I in die Kategorie $\bar{\mathcal{K}}$. Für jedes $(Y, \alpha) \in I$ haben wir einen kanonischen Morphismus $X \to Y$ in $\bar{\mathcal{K}}$, nämlich die Komposition $X \xrightarrow{\alpha} t(Y) \xrightarrow{\pi} Y$. Dadurch erhalten wir einen Morphismus $\varphi: c_X \to F$ zwischen dem durch $X \in \bar{\mathcal{K}}$ gegebenen konstanten kontravarianten Funktor $c_X: I \to \bar{\mathcal{K}}$ und dem Funktor F. Es gilt: Der projektive Limes des Funktors F existiert. Genau dann ist $\varphi: c_X \to F$ der projektive Limes von F, wenn X keine echten Primärspezialisierungen hat (dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $X_{na} = \emptyset$).
Den projektiven Limes von F kann man allgeimein folgendermaßen beschreiben. Sei S die Menge aller Punkte von X die keine echten Primärspezialisierungen haben. Jeder Punkt $x \in X$ hat genau eine Primärspezialisierung $y \in S$. Durch $x \mapsto y$ erhält man eine stetige Retraktion $r: X \to S$. Es gilt $r_*\mathcal{O}_X^+ = \mathcal{O}_X^+ \mid S$. Deshalb ist $S = (S, r_*\mathcal{O}_X, r_*\mathcal{O}_X^+)$ ein Objekt von $\bar{\mathcal{K}}$. Für jedes $(Y, \alpha) \in I$ faktorisiert der obige Morphismus $X \to Y$ auf eindeutige Weise in $X \to S \to Y$, wobei $X \to S$ der kanonische Morphismus ist (vgl. (3.11.7i)). Die Morphismen $S \to Y$ definieren einen Morphismus $\psi: c_S \to F$ zwischen dem durch S gegebenen konstanten kontravarianten Funktor $c_S: I \to \bar{\mathcal{K}}$ und dem Funktor F. Dieser Morphismus ψ ist der projektive Limes von F.

Bemerkung 3.9.26. In dieser Bemerkung wird die Beziehung zwischen der Situation in [R] und der Situation in diesem Paragraphen etwas erläutert. Sei A ein vollständiger diskreter Bewertungsring (vom Rang 1). Sei K der Quotientenkörper von A und sei s ein erzeugendes Element des maximalen Ideals von A. Mit $\mathcal{H}$ bezeichnen wir die Kategorie der lokal noetherschen formalen Schemata über Spf A, deren Strukturmorphismus flach ist (d.h. die Strukturgarbe ist s-torsionsfrei) und adisch ist. Sei Z das Objekt von $\mathcal{K}$ zu dem Paar von Ringen (K, A). Indem wir einem Objekt $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathcal{H}$ das Objekt $(X, \mathcal{A}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \in \mathcal{K}$ zuordnen, erhalten wir einen kanonischen Funktor $F: \mathcal{H} \to \mathcal{K}/Z$, der eine Äquivalenz von Kategorien ist. Ist X ein Objekt von $\mathcal{H}$ und ist $Y \to X$ die Aufblasung einer offenen kohärenten Idealgarbe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ in der Kategorie $\mathcal{H}$, so ist $F(Y) \to F(X)$ die Aufblasung von $\mathcal{J}$ in der Kategorie $\mathcal{K}$. Sind umgekehrt U ein quasikompaktes Objekt von $\mathcal{K}/Z$ und $\mathcal{J}$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_U$-Untermodul von $\mathcal{A}_U$, so ist die Aufblasung $V \to U$ von $\mathcal{J}$ auch die Aufblasung einer offenen kohärenten $\mathcal{O}_U$-Idealgarbe, denn es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{L}^n \mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_U$, wobei $\mathcal{L}$ die invertierbare Garbe $s\mathcal{O}_U$ ist. Auch ist $V \to U$ eine 1-gute Aufblasung, denn es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \in (\mathcal{L}^{-n}\mathcal{J})(U)$.

Sei X ein Objekt von $\mathcal{H}$, das lokal von endlichem Typ über Spf A ist. Sei $X \otimes K$ die in [R] zu X assoziierte analytische Varietät. Mit dem Funktor r aus (3.4.17) gilt: $r(X \otimes K) = t(F(X)) = t(X)_a$.

Wir beweisen nun in mehreren Schritten (3.6.20) und (3.6.21).

(B1) Seien X ein affinoider adischer Raum und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe von endlichem Typ auf X. Dann gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(X)$-Modul M und einen $\mathcal{O}_X$-Modulmorphismus $\varphi: M \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, so daß $\varphi \mid X_a: (M \otimes \mathcal{O}_X) \mid X_a \to \mathcal{F} \mid X_a$ ein Isomorphismus ist.

Beweis: Sei X der adische Raum zu dem vollständigen affinoiden Ring (A, A^+). Sei B ein noetherscher Definitionsring von A. Eine einfache Überlegung zeigt, daß wir annehmen dürfen $A^+ = B^c$. Nach (3.6.3 iv) gibt es eine endliche Teilmenge L von A, so daß $L \cdot A = A, \mathcal{F}(U_l)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U_l)$-Modul ist und $\mathcal{F} \mid U_l = \mathcal{F}(U_l) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U_l)$ für jedes $l \in L$, wobei $U_l = R(\frac{L}{l})$. Sei Y das affine Objekt von $\mathcal{K}$ zu dem Paar von Ringen (A, B). Es ist $X = t(Y)$. Sei $f: Z \to Y$ die Aufblasung von $L \cdot \mathcal{O}_Y$.

$$\begin{array}{ccc} t(Z) & \overset{\pi_Z}{\to} & Z \\ t(f) \downarrow \cong & & \downarrow f \\ X = t(Y) & \overset{\pi_Y}{\to} & Y \end{array}$$

Nach (3.9.18) ist $\mathcal{H} := (\pi_Z)_* t(f)^* \mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{A}_Z$-Modul von endlichem Typ. Sei $\mathcal{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Z$-Untermodul von $\mathcal{H}$, so daß die Inklusion $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ eine öffene Einbettung ist ((3.9.4)). Da der Morphismus formaler Schemata $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eigentlich ist, ist $f_*(\mathcal{G})(Y) = \mathcal{G}(Z)$ ein endlich erzeugter B-Modul. Wir setzen $M := \mathcal{G}(Z) \otimes_B A$. Die kanonische A-lineare Abbildung $M = \mathcal{G}(Z) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{A}_Y(Y) \to \mathcal{H}(Z) = \mathcal{F}(X)$ definiert einen Garbenmorphismus $\varphi: M \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$.

Wir zeigen, daß $\varphi \mid X_a$ ein Isomorphismus ist.

Zu der graduierten B-Algebra $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} L^n \cdot B$ betrachten wir das Schema $P := \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} L^n \cdot B)$ mit Strukturmorphismus $h: P \to \operatorname{Spec} B$. Sei I ein Definitionsideal von B mit endlichem Erzeugendensystem J. Nach (3.9.9) ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ die Vervollständigung von P nach I. Die offenen affinen Teilmengen $\{D_+(l) \mid l \in L\}$ überdecken P. Für jedes $l \in L$ gilt $t(f)^{-1}(U_l) = \pi_Z^{-1}(D_+(l) \cap Z)$. Wir fixieren ein $l \in L$ und setzen $U := D_+(l)$. In dem affinoiden adischen Raum $\pi_Z^{-1}(U \cap Z)$ haben wir die rationalen Teilmengen $R(\frac{J}{j}), j \in J$. Es ist $\pi_Z^{-1}(U \cap Z)_a = \bigcup_{j \in J} R(\frac{J}{j})$. Wir zeigen, daß für jedes $j \in J$ die durch φ gegebene Abbildung $(M \otimes \mathcal{O}_X)(t(f)(R(\frac{J}{j}))) \to \mathcal{F}(t(f)(R(\frac{J}{j})))$ bijektiv ist. Wegen $\mathcal{F} \mid U_l = \mathcal{F}(U_l) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U_l)$ folgt hieraus, daß $\varphi \mid (U_l)_a$ ein Isomorphismus ist. Damit ist dann gezeigt, daß $\varphi \mid X_a$ ein Isomorphismus ist.

Sei $s \in J$ fixiert. Wir setzen $V := U \cap Z$ und $W := R(\frac{J}{s})$. Via $t(f)$ identifizieren wir X und $t(Z)$. Dann haben wir das kommutative Diagramm

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_X(W) & & & & \\
\uparrow & & & \nwarrow & \\
\mathcal{A}_Z(V)_s & \leftarrow & \mathcal{A}_Z(V) & = & \mathcal{O}_X(\pi_Z^{-1}(V)) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{O}_Z(V)_s & \leftarrow & \mathcal{O}_Z(V) & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
\mathcal{O}_P(U)_s & \leftarrow & \mathcal{O}_P(U) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & B & \to & A
\end{array}
$$

Nach [EGA], III.5.1.6 gibt es einen kohärenten $\mathcal{O}_P$-Modul $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{G} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_Z$. Dann gilt

(1) $\mathcal{G}(V) = \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_P(U)} \mathcal{O}_Z(V)$

Aus [EGA], III. 5.1.2 folgt

(2) $\mathcal{M}(P) \to \mathcal{G}(Z)$ ist bijektiv.

Weiterhin gilt

(3) $\mathcal{M}(P) \otimes_B \mathcal{O}_P(U)_s = \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_P(U)} \mathcal{O}_P(U)_s$

Denn: In U betrachten wir die offene affine Teilmenge $T := \{x \in U \mid s(x) \neq 0\}$. Nach (3.1.11) und (2ii) im Beweis von (3.6.2) ist $h(T)$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} B$, so daß $h \mid T : T \to h(T)$ ein Isomorphismus ist (also ist $h(T)$ affin) und $T = h^{-1}(h(T))$. Deshalb gilt $\mathcal{M}(P) \otimes_B \mathcal{O}_P(U)_s = \mathcal{M}(P) \otimes_B \mathcal{O}_P(T) = h_*(\mathcal{M})(\operatorname{Spec} B) \otimes_B \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(h(T)) = h_*(\mathcal{M})(h(T)) = \mathcal{M}(h^{-1}(h(T))) = \mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_P(U)} \mathcal{O}_P(U)_s$.

Da $\mathcal{O}_Z(V)$ und $\mathcal{G}(V)$ offen in $\mathcal{A}_Z(V)$ und $\mathcal{H}(V)$ sind und s topologisch nilpotent in $\mathcal{A}_Z(V)$ ist, gilt

(4) $\mathcal{A}_Z(V)_s = \mathcal{O}_Z(V)_s$ und $\mathcal{H}(V)_s = \mathcal{G}(V)_s$

Nach (3) und (1) gilt

(5) $\mathcal{M}(P) \otimes_B \mathcal{O}_Z(V)_s = \mathcal{G}(V)_s$

Aus (4) und (5) folgt

(6) $\mathcal{M}(P) \otimes_B \mathcal{A}_Z(V)_s = \mathcal{H}(V)_s$

Mit (2) und (6) ergibt sich

(7) $\mathcal{G}(Z) \otimes_B \mathcal{A}_Z(V)_s = \mathcal{H}(V)_s$

Aus (7) erhalten wir schließlich $(M \otimes \mathcal{O}_X)(W) = M \otimes_A \mathcal{O}_X(W) = (\mathcal{G}(Z) \otimes_B A) \otimes_A \mathcal{O}_X(W) = \mathcal{G}(Z) \otimes_B \mathcal{O}_X(W) = \mathcal{H}(V) \otimes_{\mathcal{A}_Z(V)} \mathcal{O}_X(W) = \mathcal{F}(W)$. Damit ist (B1) bewiesen.

(B2) Gilt (3.6.20) für affinoide adische Räume X, für die $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt ist über einem noetherschen Definitionsring von $\mathcal{O}_X(X)$, so gilt (3.6.21).

Beweis: Seien X ein affinoider adischer Raum, M ein $\mathcal{O}_X(X)$-Modul und $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $M \otimes \mathcal{O}_X$. Wir zeigen, daß es einen $\mathcal{O}_X(X)$-Untermodul N von M gibt mit $\mathcal{F} = N \otimes \mathcal{O}_X$. Zunächst nehmen wir an, daß $\mathcal{O}_X(X)$ einen noetherschen Definitionsring hat, über dem $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt ist. Sei $(M_i \mid i \in I)$ die Familie der endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(X)$-Untermoduln von M. Für jedes $i \in I$ ist $\mathcal{F} \cap (M_i \otimes \mathcal{O}_X)$ quasikohärent, und, da $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt über einem noetherschen Definitionsring ist, ist $\mathcal{F} \cap (M_i \otimes \mathcal{O}_X)$ von endlichem

Typ ((3.6.5 ii)). Nach Voraussetzung gibt es einen Untermodul N_i von M_i mit $\mathcal{F} \cap (M_i \otimes \mathcal{O}_X) = N_i \otimes \mathcal{O}_X$. Für $N := \bigcup_{i \in I} N_i$ gilt $\mathcal{F} = N \otimes \mathcal{O}_X$.

Sei nun X beliebig. Nach (3.6.3 iv) gibt es eine endliche Teilmenge L von $\mathcal{O}_X(X)$, so daß $L \cdot \mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X)$ und $\mathcal{F} \mid U_l = \mathcal{F}(U_l) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U_l)$ für jedes $l \in L$, wobei U_l die rationale Teilmenge $R_X(\frac{L}{l})$ ist. Sei B ein noetherscher Definitionsring von $\mathcal{O}_X(X)$. Sei A eine endlich erzeugte B-Unteralgebra von $\mathcal{O}_X(X)$ mit $L \subseteq A$ und $L \cdot A = A$, und sei A^+ ein beliebiger Ganzheitsring von A mit $A^+ \subseteq \mathcal{O}_X^+(X)$. Seien Y der adische Raum zu dem affinoiden Ring (A, A^+) und $f: X \to Y$ der Morphismus, der durch die Inklusion $(A, A^+) \to (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))$ definiert wird. Y wird durch die rationalen Teilmengen $V_l := R_Y(\frac{L}{l}), l \in L$, überdeckt. Es ist $f^{-1}(V_l) = U_l$ für jedes $l \in L$. Nach (3.6.19 v) gilt $f_*(\mathcal{F}) \mid V_l = \mathcal{F}(U_l) \otimes (\mathcal{O}_Y \mid V_l)$. Also ist $f_*(\mathcal{F})$ quasikohärent. Weiterhin gilt nach (3.9.16 v) $f_*(M \otimes \mathcal{O}_X) = M \otimes \mathcal{O}_Y$, also $f_*(\mathcal{F}) \subseteq M \otimes \mathcal{O}_Y$. Nach dem eben Bewiesenem gilt $f_*(\mathcal{F}) = f_*(\mathcal{F})(Y) \otimes \mathcal{O}_Y = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_Y$.

Sei $g: \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ der kanonische Morphismus. g ist injektiv, da $\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_X \to M \otimes \mathcal{O}_X$ injektiv ist. Wir zeigen, daß g surjektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $g(U_l): \mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U_l) \to \mathcal{F}(U_l)$ surjektiv ist für jedes $l \in L$. Aus $f_*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_Y$ folgt $\mathcal{F}(U_l) = f_*(\mathcal{F})(V_l) = \mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_Y(V_l)$. Hieraus ergibt sich, daß $g(U_l)$ surjektiv ist.

(B3) Seien X ein adischer Raum zu einem diskreten affinoiden Ring (A, A^+) und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe von endlichem Typ auf X. Dann ist $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul und $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_X$.

Beweis: Sei Y das affine Schema zu dem Ring A. Sei $f: \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spa}(A, A^+)$ die Abbildung, die jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von A die triviale Bewertung von A mit Träger $\mathfrak{p}$ zuordnet. Für jede rationale Teilmenge $R(\frac{T}{s})$ von $\operatorname{Spa}(A, A^+)$ gilt $f^{-1}(R(\frac{T}{s})) = D(s)$ und $\mathcal{O}_X(R(\frac{T}{s})) = A_s = \mathcal{O}_Y(D(s))$. Deshalb setzt sich f fort zu einem Morphismus geringter Räume $f: Y \to X$. Sei $\mathcal{G}$ der quasikohärente $\mathcal{O}_Y$-Modul $f^*(\mathcal{F})$. Für jede rationale Teilmenge U von X mit $\mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U)$ ist $\mathcal{G} \mid f^{-1}(U)$ auf der offenen affinen Teilmenge $f^{-1}(U)$ die quasikohärente Garbe zu dem $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$-Modul $\mathcal{F}(U)$. Deshalb

(1) Für jede rationale Teilmenge U von X mit $\mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U)$ gilt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U))$.

Sei U eine beliebige offene Teilmenge von X. Sei $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung von U durch rationale Teilmengen, so daß $\mathcal{F} \mid U_i = \mathcal{F}(U_i) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U_i)$ für jedes $i \in I$.

Wir setzen $V := f^{-1}(U)$ und $V_i := f^{-1}(U_i)$. Nach (1) sind die Abbildungen β und γ in dem kommutativen Diagramm

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 \longrightarrow \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{G}(V_i) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{G}(V_i \cap V_j) \end{array}$$

bijektiv. Damit erhalten wir

(2) Für jede offene Teilmenge U von X ist $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U))$.

Speziell gilt $\mathcal{F}(X) = \mathcal{G}(Y)$. Da $\mathcal{G}$ von endlichem Typ ist, ist also $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul. Sei U eine rationale Teilmenge von X. Mit $V := f^{-1}(U)$ erhalten wir das kommutative Diagramm

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_Y(V) & \overset{\delta}{\longleftarrow} & \mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U) \\ \beta \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \mathcal{G}(V) & \underset{\gamma}{\longleftarrow} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

Nach (2) sind γ und δ bijektiv. Da $\mathcal{G}$ quasikohärent ist, ist auch β bijektiv. Deshalb ist α bijektiv. Damit ist (B3) bewiesen.

(B4) Seien X ein affinoider adischer Raum und M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul mit $(M \otimes \mathcal{O}_X) \mid X_a = 0$. Dann gibt es ein offenes Ideal I von $\mathcal{O}_X(X)$ mit $I \cdot M = 0$.

Beweis: Wir wählen eine endliche Teilmenge $L \subseteq \mathcal{O}_X(X)^{\circ\circ}$, so daß $I := L \cdot \mathcal{O}_X(X)$ offen ist. Für jedes $l \in L$ sei U_l die rationale Teilmenge $R(\frac{L}{l})$. Es ist $X_a = \bigcup_{l \in L} U_l$. Wir setzen $A := \mathcal{O}_X(X)$ und $B = \prod_{l \in L} \mathcal{O}_X(U_l)$. Sei $f: A \to B$ der kanonische Ringhomomorphismus. $(M \otimes \mathcal{O}_X) \mid X_a = 0$ besagt

(1) $M \otimes_A B = 0$

Aus (3.6.11) folgt

(2) $\operatorname{Spec} A \backslash V(I) \subseteq \operatorname{Spec}(f)(\operatorname{Spec} B)$

Sei $\tilde{M}$ die durch M definierte quasikohärente Garbe auf $\operatorname{Spec} A$. Nach (3.6.5 i) ist B flach über A. Deshalb folgt aus (1) und (2) $\tilde{M} \mid \operatorname{Spec} A \backslash V(I) = 0$. Dann gibt es nach [EGA*], I. 6.8.4 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I^n \cdot M = 0$.

(B5) Seien X ein affinoider adischer Raum und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe von endlichem Typ auf X mit $\mathcal{F} \mid X_a = 0$. Dann ist $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul und $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_X$.

Beweis: Sei $\{U_l \mid l \in L\}$ eine endliche Überdeckung von X durch rationale Teilmengen, so daß $\mathcal{F}(U_l)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U_l)$-Modul ist und $\mathcal{F} \mid U_l = \mathcal{F}(U_l) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U_l)$ für jedes $l \in L$. Nach (B4) gibt es offene Ideale I_l von $\mathcal{O}_X(U_l)$ mit $I_l \cdot \mathcal{F}(U_l) = 0$. Sei I ein offenes Ideal von $\mathcal{O}_X(X)$ mit $I \mid U_l \subseteq I_l$ für jedes $l \in L$. Dann gilt

(1) Für jede offene Teilmenge U von X ist $I \cdot \mathcal{F}(U) = 0$.

Seien Y der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))/I$ und $f\colon Y \to X$ der kanonische Morphismus. Es gilt

(2) Für jede rationale Teilmenge U von X ist $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(U)/I\mathcal{O}_X(U)$.

Den quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$-Modul von endlichem Typ $f^*(\mathcal{F})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{G}$. Dann gilt

(3) Ist U eine rationale Teilmenge von X mit $\mathcal{F} \mid U = \mathcal{F}(U) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U)$, so ist $\mathcal{G}(f^{-1}(U)) = \mathcal{F}(U)$.

Denn: Es ist $\mathcal{G} \mid f^{-1}(U) = (\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) \otimes (\mathcal{O}_Y \mid f^{-1}(U))$. Deshalb folgt aus (2) und (1) $\mathcal{G}(f^{-1}(U)) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{F}(U)$.

Mit dem Diagramm $(*)$ im Beweis von (B3) folgt aus (3)

(4) Für jede offene Teilmenge U von X ist $\mathcal{G}(f^{-1}(U)) = \mathcal{F}(U)$.

Aus (B3), (2) und (4) folgt, daß $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul ist. Aus (B3), (1), (2), (4) und dem Diagramm $(**)$ im Beweis von (B3) folgt $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U)$ für jede rationale Teilmenge U von X.

Wir können nun (3.6.20) beweisen (nach (B2) ist dann auch (3.6.21) bewiesen). Seien X ein affinoider adischer Raum und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe von endlichem Typ auf X. Nach (B1) gibt es einen endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(X)$-Modul M und einen Garbenmorphismus $\varphi\colon M \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, so daß $\varphi \mid X_a$ ein Isomorphismus ist. Wir beweisen zunächst (3.6.20) unter der Annahme

(A) Es gibt einen $\mathcal{O}_X(X)$-Untermodul N von M mit $\ker(\varphi) = N \otimes \mathcal{O}_X$.

Wir setzen $\mathcal{G} := \operatorname{coker}(\varphi)$. Es ist $\mathcal{G}$ quasikohärent und von endlichem Typ. Nach (B5) gilt

(1) $\mathcal{G}(X)$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul und $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X) \otimes \mathcal{O}_X$.

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to (M/N) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

folgt, da $H^1(X, (M/N) \otimes \mathcal{O}_X) = 0$, die exakte Sequenz

$$0 \to M/N \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to 0$$

Mit (1) erhalten wir, daß $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul ist. Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & (M/N) \otimes \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G} & \to 0 \\ & \text{id} \uparrow & & \alpha \uparrow & & \beta \uparrow & \\ 0 \to & (M/N) \otimes \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{G}(X) \otimes \mathcal{O}_X & \to 0 \end{array}$$

Nach (1) ist β ein Isomorphismus. Deshalb ist α ein Isomorphismus.

Es bleibt noch (A) zu zeigen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\mathcal{O}_X(X)$ einen noetherschen Definitionsring hat, über dem $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt ist. Dann ist die quasikohärente Garbe $\ker(\varphi)$ von endlichem Typ. Nach (B5) gilt (A). Damit ist (3.6.20) bewiesen für den Fall, daß $\mathcal{O}_X(X)$ einen noetherschen Definitionsring hat, über dem $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt ist. Nach (B2) gilt dann (A) allgemein.

Proposition 3.10.1. Seien X, Y, S analytische oder adische Räume und $f: X \to S$ und $g: Y \to S$ Morphismen, wobei f lokal von endlichem Typ und g adisch ist. Dann existiert zu f und g das Faserprodukt in der Kategorie $(VL)_{top}$.

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

$X \times_S Y$ ist ein analytischer oder adischer Raum, je nach dem ob Y ein analytischer oder adischer Raum ist. f' ist lokal von endlichem Typ und g' ist adisch. Sind X, Y, S affinoid, so ist auch $Z := X \times_S Y$ affinoid, und es gilt $D = B \hat{\otimes}_A C$, wobei $A = (\mathcal{O}_S(S), \mathcal{O}_S^+(S)), B = (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)), C = (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y))$ und $D = (\mathcal{O}_Z(Z), \mathcal{O}_Z^+(Z))$.

Beweis: Ohne Einschränkung sind X, Y, S affinoid. Die Behauptung folgt dann aus (2.4.18), (3.2.9), (3.2.10), (3.8.3) und (3.8.15).

Bemerkung 3.10.2. Das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert in der Kategorie $(VL)_{top}$ (und ist ein analytischer oder adischer Raum), wenn man, statt f lokal von endlichem Typ, nur fordert, daß es zu jedem $x \in X$ offene affinoide Umgebungen U und V von x und $f(x)$ in X und S mit $f(U) \subseteq V$ gibt, so daß $\mathcal{O}_X(U)$ einen Definitionsring hat, der topologisch von endlichem Typ über einem Definitionsring von $\mathcal{O}_S(V)$ ist.

Beispiel. Seien X ein affinoider adischer Raum und U, V offene affinoide Teilmengen von X. Dann ist auch $U \cap V$ affinoid mit $(\mathcal{O}(U \cap V), \mathcal{O}^+(U \cap V)) = (\mathcal{O}(U), \mathcal{O}^+(U)) \hat{\otimes}_{(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}^+(X))} (\mathcal{O}(V), \mathcal{O}^+(V))$.

Lemma 3.10.3. Die Situation sei wie in (3.10.1). Zu Punkten $x \in X$ und $y \in Y$ mit $f(x) = g(y)$ gibt es einen Punkt $z \in X \times_S Y$ mit $g'(z) = x$ und $f'(z) = y$.

Beweis: Ohne Einschränkung sind X, Y, S affinoid. Sei (A, A^+) der im Beweis von (2.4.18 ii) konstruierte affinoide Ring mit $(A, A^+)^\wedge = (\mathcal{O}_Z(Z), \mathcal{O}_Z^+(Z))$. Wir fassen x und y als Bewertungen von $\mathcal{O}_X(X)$ und $\mathcal{O}_Y(Y)$ auf. Gesucht ist ein $w \in \operatorname{Spa}(A, A^+)$ mit $w \mid \mathcal{O}_X(X) = x$ und $w \mid \mathcal{O}_Y(Y) = y$. Wegen $x \mid \mathcal{O}_S(S) = y \mid \mathcal{O}_S(S)$ und $A = \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_S(S)} \mathcal{O}_Y(Y)$ gibt es ein $v \in \operatorname{Spv} A$ mit $v \mid \mathcal{O}_X(X) = x$ und

$v \mid \mathcal{O}_Y(Y) = y$. Für $a \in \mathcal{O}_X^+(X)$ und $b \in \mathcal{O}_Y^+(Y)$ ist $v(a \otimes b) = x(a) + y(b) \geq 0$. Also gilt

(1) $v(l) \geq 0$ für jedes $l \in A^+$.

Seien F und G die konvexen Hüllen von Γ_x und Γ_y in Γ_v. Sei $H := F \cup G$ (also $H = F$ oder $H = G$). Die charakteristische Untergruppe von v ist enthalten in der konvexen Hülle von $c\Gamma_x \cup c\Gamma_y$ in Γ_v, also $c\Gamma_v \subseteq H$. Deshalb haben wir die Bewertung $w := v \mid H$. Es gilt immer noch $w \mid \mathcal{O}_X(X) = x$ und $w \mid \mathcal{O}_Y(Y) = y$. Für jedes $a \in \mathcal{O}_X(X)^{\circ\circ}$ und $b \in \mathcal{O}_Y(Y)^{\circ\circ}$ ist $w(a \otimes b) = x(a) + y(b)$ kofinal in H_∞, da $x(a)$ und $y(b)$ kofinal in $(\Gamma_x)_\infty$ und $(\Gamma_y)_\infty$ sind. Da $\mathcal{O}_X(X)^{\circ\circ} \otimes \mathcal{O}_Y(Y)^{\circ\circ}$ eine Nullumgebung von A ist, folgt aus (3.1.2), daß w stetig ist. Mit (1) erhalten wir $w \in \operatorname{Spa}(A, A^+)$.

Seien X und Y analytische oder adische Räume und $f: X \to Y$ ein Morphismus, der lokal von endlichem Typ ist. In (3.8) haben wir zu einem Punkt y von Y einen kanonischen Morphismus $\operatorname{Spa} \kappa(y) \to Y$ konstruiert. Das Faserprodukt $X \times_Y \operatorname{Spa} \kappa(y)$, das auch mit X_y oder $f_a^{-1}(y)$ bezeichnet wird, heißt die adische Faser von y (oder auch die analytische Faser, wenn y ein analytischer Punkt ist).

Proposition 3.10.4. Seien X und Y analytische oder adische Räume und $f: X \to Y$ ein Morphismus, der lokal von endlichem Typ ist. Sei y ein Punkt von Y. Sei S die Menge aller Sekundärgeneralisierungen von y in Y. Die Projektion $X_y \to X$ induziert einen Homöomorphismus zwischen dem X_y zugrundeliegenden topologischen Raum und dem topologischen Teilraum $f^{-1}(S)$ von X.

Beweis: Für den Morphismus $\psi: \operatorname{Spa} \kappa(y) \to Y$ gilt $\operatorname{im}(\psi) = S$. Nach (3.10.3) hat die Projektion $p: X_y \to X$ das Bild $f^{-1}(S)$. Es ist noch zu zeigen, daß p ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Ohne Einschränkung sind X und Y affinoid, $X = \operatorname{Spa}(A, A^+)$ und $Y = \operatorname{Spa}(B, B^+)$. Sei K der Residuenkörper von B zu dem Primideal $\{b \in B \mid b(y) = 0\}$. Trivialerweise gilt

(1) Die kanonische Abbildung $\operatorname{Spv} A \otimes_B K \to \operatorname{Spv} A$ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.

Man kann $A \otimes_B K$ so mit einer f-adischen Topologie versehen, daß $\mathcal{O}_{X_y}(X_y)$ die Vervollständigung von $A \otimes_B K$ ist. Aus (3.1.12) und (1) folgt, daß p ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

Mit $\_$ bezeichnen wir den kanonischen Vergeßfunktor von der Kategorie $(VL)_{top}$ in die Kategorie der lokal geringten Räume.

Proposition und Definition 3.10.5. Seien X und Y Schemata, S ein analytischer oder adischer Raum und $f: X \to Y$ und $g: \underline{S} \to Y$ Morphismen lokale geringter Räume, wobei f lokal von endlichem Typ ist. Dann gibt es ein Objekt R in $(VL)_{top}$, einen Morphismus in $(VL)_{top}$ $p: R \to S$ und einen Morphismus lokal geringter Räume $q: \underline{R} \to X$, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} \underline{R} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\underline{p}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \underline{S} \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

und folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Sind U ein Objekt von $(VL)_{top}$, $u: U \to S$ ein Morphismus in $(VL)_{top}$ und $v: \underline{U} \to X$ ein Morphismus lokal geringter Räume mit $g \circ \underline{u} = f \circ v$, so gibt es genau einen Morphismus $w: U \to R$ in $(VL)_{top}$ mit $p \circ w = u$ und $q \circ \underline{w} = v$.

R ist ein analytischer oder adischer Raum, je nach dem ob S ein analytischer oder adischer Raum ist, und p ist lokal von endlichem Typ.
Der Raum R wird mit $X \times_Y S$ bezeichnet und heißt das Faserprodukt von X und S über Y.
Seien U und V zwei Schemata, die lokal von endlichem Typ über Y sind, und sei $h: U \to V$ ein Y-Morphismus. Aufgrund der universellen Eigenschaft induziert h einen kanonischen Morphismus in $(VL)_{top}$ $U \times_Y S \to V \times_Y S$, der mit $h_{(S)}$ bezeichnet wird.

Beweis: Ohne Einschränkung sind X und Y affin und S affinoid. Wir schreiben X als ein durch eine quasikohärente Idealgarbe $\mathcal{I}$ gegebenes abgeschlossenes Unterschema eines affinen Schemas $\mathbb{A}^n_Y$ über Y. Angenommen, das Faserprodukt $R = \mathbb{A}^n_Y \times_Y S$ existiert und ist ein analytischer oder adischer Raum. Seien $p: R \to S$ und $q: \underline{R} \to X$ die Projektionen. Es ist $\mathcal{J} := \mathrm{im}(q^*(\mathcal{I}) \to \mathcal{O}_R)$ eine quasikohärente Idealgarbe von $\mathcal{O}_R$. Sei Z der durch J gegebene Teilraum von R. Nach (3.6.23) ist Z zusammen mit den Restriktionen von p und q das Faserprodukt von f und g.
Es genügt also, (3.10.5) für den Fall zu beweisen, daß X der affine Raum $\mathbb{A}^n_Y$ über Y ist. Sei A der affinoide Ring $(\mathcal{O}_S(S), \mathcal{O}^+_S(S))$. Sei L eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}^{\circ\circ}$, so daß $L \cdot \tilde{A}$ offen ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet R_k den analytischen oder adischen Raum zu dem affinoiden Ring $A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_{L(k)}$, wobei $L(k)$ das n-Tupel $(L^k, \ldots, L^k)$ ist. Für $k \leq h$ sei $\varphi_{kh}: R_k \to R_h$ der Morphismus, der durch den stetigen A-Algebrahomomorphismus $A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_{L(h)} \to A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle_{L(k)}, X_i \mapsto X_i$ für $i = 1, \ldots, n$, induziert wird ((2.4.6 iv)). Es ist φ_{kh} eine offene Einbettung, nämlich

ein Isomorphismus von R_k auf den rationalen Teilraum $R(\frac{\{1\}\cup L(k)\cdot\{X_1,\ldots,X_n\}}{1})$ von R_h. Deshalb existiert in der Kategorie $(VL)_{top}$ der induktive Limes R zu dem induktiven System $(R_k, \varphi_{kh} \mid k, h \in \mathbb{N}_0)$. Es ist R ein analytischer oder adischer Raum. Da die φ_{kh} S-Morphismen sind, ist R ein Raum über $S, p\colon R \to S$. Wegen $\varphi_{kh}^*(X_i) = X_i$, definiert jedes X_i einen Schnitt $s_i \in \mathcal{O}_R(R)$. Seien $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^n}(\mathbb{A}_Y^n)$ die Koordinatenfunktionen von $\mathbb{A}_Y^n$. Sei $q\colon \underline{R} \to \mathbb{A}_Y^n$ der Morphismus lokal geringter Räume mit $g \circ \underline{p} = f \circ q$ und $q^*(d_i) = s_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Wir überprüfen die universelle Eigenschaft. Seien U ein Objekt in $(VL)_{top}$, $u\colon U \to S$ ein Morphismus in $(VL)_{top}$ und $v\colon \underline{U} \to \mathbb{A}_Y^n$ ein Morphismus lokal geringter Räume mit $g \circ \underline{u} = f \circ v$. Wir fixieren ein $x \in U$. Da $L \subseteq \tilde{A}^{\circ\circ}$, ist $v_x(u^*(l))$ kofinal in $(\Gamma_{v_x})_\infty$ für jedes $l \in L$. Deshalb gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so daß $v_x(u^*(l) \cdot v^*(d_i)) \geq 0$ für jedes $l \in L^k$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es gibt dann eine offene Umgebung U_x von x in U, so daß $u^*(l) \cdot v^*(d_i) \mid U_x \in \mathcal{O}_U^+(U_x)$ für jedes $l \in L^k$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach (2.4.6 iv), (3.2.9) und (3.2.10) gibt es genau einen S-Morphismus $w_x\colon U_x \to R_k$ in $(VL)_{top}$ mit $w_x^*(X_i) = v^*(d_i) \mid U_x$ für $i = 1, \ldots, n$. Bei variierendem $x \in U$ verkleben sich die $w_x\colon U_x \to R$ zu einem S-Morphismus $w\colon U \to R$ in $(VL)_{top}$ mit $w^*(s_i) = v^*(d_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Es gilt $q \circ \underline{w} = v$, und w ist dadurch eindeutig bestimmt.

Beispiel 3.10.6. i) Sei k ein vollständiger topologischer Körper, dessen Topologie sich durch eine Rang 1 Bewertung definieren läßt. In [BGR], 9.3.4 wird zu einem Schema X, das lokal von endlichem Typ über k ist, eine analytische Varietät X^{an} über k konstruiert. Mit dem Funktor r aus (3.4.17) gilt

$$r(X^{an}) = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spa}(k, k^\circ).$$

ii) Seien $Y = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema und $X \to Y$ ein Morphismus von Schemata (, der lokal von endlichem Typ ist). Wir versehen A mit der diskreten Topologie. Sei A^+ ein Ganzheitsring von A und sei S der adische Raum zu (A, A^+) ((1.5)) Wir haben einen kanonischen Morphismus $\underline{S} \to Y$. Das Faserprodukt $X \times_Y S$ kann man folgendermaßen konstruieren: Sei T die Menge $\{v \in \operatorname{Spv} X \mid v(a) \geq 0$ für jedes $a \in A^+\}$ und sei $\mathcal{O}$ die Garbe der algebraischen Funktionen auf T bezüglich X ((1.5.1)). Jede Bewertung $x \in T$ setzt sich fort zu einer Bewertung v_x von $\mathcal{O}_x$, deren Träger das maximale Ideal von $\mathcal{O}_x$ ist. Wir machen $\mathcal{O}$ zu einer Garbe topologischer Ringe, so daß für jede quasikompakte Teilmenge U von T die Topologie auf $\mathcal{O}(U)$ diskret ist ([EGA*], 0.3.9). Dann ist $R := (T, \mathcal{O}, (v_x \mid x \in X))$ ein Objekt von $(VL)_{top}$. Der Raum R mit den kanonischen Morphismen $p\colon R \to S$ und $q\colon \underline{R} \to X$ ist das Faserprodukt von X und S über Y.

Wir betrachten noch speziell $A = A^+ = \mathbb{Z}$. Dann ist $T = \operatorname{Spv} X$. Das Faserprodukt $R = X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spa}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ zusammen mit der Projektion $q: \underline{R} \to X$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für jedes $Z \in (VL)_{top}$ erhält man durch $f \mapsto q \circ \underline{f}$ eine Bijektion zwischen der Menge der Morphismen in $(VL)_{top}\, Z \to R$ und der Menge Morphismen lokal geringter Räume $\underline{Z} \to X$.

iii) In der Situation von (3.10.5) betrachten wir zu einem $s \in S$ die Faser R_s von $p: R \to S$. Aus der Transitivität des Faserprodukts ergibt sich

$$R_s = (X \times_Y \operatorname{Spec} k(s)) \times_{\operatorname{Spec} k(s)} \operatorname{Spa} \kappa(s).$$

Ist s ein nichtanalytischer Punkt, so kann man R_s aus dem Schema $X \times_Y \operatorname{Spec} k(s)$ wie in (ii) konstruieren, und ist s ein minimaler analytischer Punkt, so ist R_s ein geometrischer Raum (nach (i)).

iv) Seien A ein vollständiger diskreter Bewertungsring vom Rang 1, K der Quotientenkörper von A und $f: X \to Y := \operatorname{Spf} A$ ein Morphismus formaler Schemata, der lokal von endlichem Typ ist. In dieser Situation definiert Raynaud in [R] eine analytische Varietät $X \otimes_A K$ über K und nennt $X \otimes_A K$ die generische Faser von f. In der Kategorie der adischen Räume ist $X \otimes_A K$ wirklich eine generische Faser. Denn: Wir betrachten den Morphismus adischer Räume $t(f): t(X) \to t(Y)$. Der Raum $t(Y)$ besteht aus einem generischen Punkt η und einem speziellen Punkt. Es gilt

$$t(X)_\eta = r(X \otimes_A K),$$

wobei r der Funktor aus (3.4.17) ist.

v) Seien X ein lokal noethersches Schema und $\hat{X}$ die Vervollständigung von X längs einer abgeschlossenen Teilmenge X' von X. Neben dem Morphismus in $\bar{\mathcal{K}}\, \pi_{\hat{X}}: t(\hat{X}) \to \hat{X}$ hat man noch einen kanonischen Morphismus lokal geringter Räume

$$\rho_{\hat{X}}: \underline{t(\hat{X})} \to X,$$

der folgendermaßen zustande kommt: Sei $i: \hat{X} \to X$ der kanonische Morphismus formaler Schemata. Gemäß dem nachfolgenden Lemma (3.10.7) definiert der Morphismus $i \circ \pi_{\hat{X}}: (t(\hat{X}), \mathcal{O}_{t(\hat{X})}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ einen Morphismus lokal geringter Räume $\rho_{\hat{X}}: \underline{t(\hat{X})} \to X$.

Seien Y ein weiteres lokal noethersches Schema und $f: X \to Y$ ein Morphismus, der lokal von endlichem Typ ist. Sei Y' eine abgeschlossene Teilmenge von Y mit $f^{-1}(Y') = X'$. Sei $\hat{Y}$ die Vervollständigung von Y längs Y'. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{i} & X \\ \hat{f}\downarrow & & \downarrow f \\ \hat{Y} & \xrightarrow[j]{} & Y \end{array}$$

definiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underline{t(\hat{X})} & \xrightarrow{\rho_{\hat{X}}} & X \\ \underline{t(\hat{f})}\downarrow & & \downarrow f \\ \underline{t(\hat{Y})} & \xrightarrow[\rho_{\hat{Y}}]{} & Y \end{array} \quad ,$$

das einen $t(\hat{Y})$-Morphismus adischer Räume

$$\varphi: t(\hat{X}) \to X \times_Y t(\hat{Y})$$

induziert. Für den Morphismus φ gilt

a) $\mathrm{im}(\varphi) = \{x \in X \times_Y t(\hat{Y}) \mid x$ hat eine Primärspezialisierung y in $X \times_Y t(\hat{Y})$, so daß v_y eine triviale Bewertung ist $\} = \{x \in X \times_Y t(\hat{Y}) \mid x$ hat eine Spezialisierung y in $X \times_Y t(\hat{X})$, so daß v_y eine triviale Bewertung ist $\}$.

b) φ ist ein lokaler Isomorphismus, d.h. zu jedem $x \in t(\hat{X})$ gibt es eine offene Umgebung U von x in $t(\hat{X})$, so daß $\varphi(U)$ offen in $X \times_Y t(\hat{X})$ ist und die Restriktion $\varphi: U \to \varphi(U)$ ein Isomorphismus ist.

c) Ist f separiert, so ist φ eine offene Einbettung.

d) Ist f eigentlich, so ist φ ein Isomorphismus.

Beweis: Ohne Einschränkung ist Y affin. Sei $q: (X \times_Y t(\hat{Y}))_- \to X$ die Projektion. Unmittelbar aus der Konstruktion von $t(\hat{X})$ und $X \times_Y t(\hat{Y})$ folgt

(1) Sind X affin und $a_1, \ldots, a_n$ ein Erzeugendensystem der $\mathcal{O}_Y(Y)$-Algebra $\mathcal{O}_X(X)$, so ist φ ein Isomorphismus von $t(\hat{X})$ auf den offenen Teilraum $\{x \in X \times_Y t(\hat{Y}) \mid v_x(q^*(a_i)) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n\}$ von $X \times_Y t(\hat{Y})$.

a) Jedes $x \in t(\hat{X})$ hat eine Primärspezialisierung y, so daß v_y eine triviale Bewertung ist. Dehalb gilt $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \{x \in X \times_Y t(\hat{Y}) \mid x$ hat eine Primärspezialisierung y, so daß v_y eine triviale Bewertung ist $\}$. Sei nun ein $x \in X \times_Y t(\hat{Y})$ gegeben, das eine Primärspezialisierung y hat, so daß v_y trivial ist. Sei U eine offene affine Umgebung von $q(y)$ in X. Dann ist $\{x, y\} \subseteq q^{-1}(U) = (U \times_Y t(\hat{Y}))_-$. Da $v_y(q^*(a)) \geq 0$ für jedes $a \in \mathcal{O}_X(U)$, ist auch $v_x(q^*(a)) \geq 0$ für jedes $a \in \mathcal{O}_X(U)$. Aus (1) folgt, daß x im Bild von $t(\hat{U}) \to U \times_Y t(\hat{Y})$ liegt, also $x \in \mathrm{im}(\varphi)$.

b) folgt aus (1)

c) Seien x, y Punkte von $t(\hat{X})$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$. Dann gilt auch $\rho_{\hat{X}}(x) = \rho_{\hat{X}}(y)$. Da X separiert ist, folgt hieraus $(i \circ \pi_{\hat{X}})(x) = (i \circ \pi_{\hat{X}})(y) =: z$. Sei U eine offene affine Umgebung von z in X. Dann sind x und y Elemente aus $t(\hat{U})$, und aus (1) folgt $x = y$. Also ist φ injektiv. Aus (b) folgt, daß φ eine offene Einbettung ist.

d) Nach (c) ist zu zeigen, daß φ surjektiv ist. Sei $x \in H := X \times_Y t(\hat{Y})$ gegeben. Sei $\lambda: k(q(x)) \to k(x)$ die durch q gegebene Residuenkörpererweiterung. Sei A der durch v_x gegebene Bewertungsring von $k(x)$. Es ist $v_x(p^*(a)) \geq 0$ für jedes $a \in \mathcal{O}_Y(Y)$, wobei p der Morphismus $(X \times_Y t(\hat{Y}))_- \to Y$ ist. Deshalb hat der Bewertungsring $A \cap k(q(x))$ ein Zentrum auf X, d.h. es gibt eine offene affine Umgebung U von $q(x)$ in X mit $a(q(x)) \in A \cap k(q(x))$ für jedes $a \in \mathcal{O}_X(U)$. Folglich ist $v_x(q^*(a)) \geq 0$ für jedes $a \in \mathcal{O}_X(U)$. Nach (1) ist $x \in \operatorname{im}(\varphi)$.

Lemma 3.10.7. Seien $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Schema, $(X, \mathcal{O}_X, (v_x \mid x \in X))$ ein Objekt der Kategorie (VL) und $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, so daß $\mathcal{O}_Y$ unter $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ nach $f_*\mathcal{O}_X^+$ abgebildet wird und für jedes $x \in X$ der induzierte Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}^+$ lokal ist. Dann gibt es genau einen Morphismus lokal geringter Räume $g: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, so daß für jede offene Teilmenge U von Y gilt $V := f^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U)$ und $f^* = g^*: \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(V)$.

Beweis: Für jede offene affine Teilmenge U von Y sei $g_U: (V, \mathcal{O}_X \mid V) \to (U, \mathcal{O}_Y \mid U)$ der Morphismus lokal geringter Räume, so daß $V = f^{-1}(U)$ und $f^* = g_U^*: \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(V)$. Es gilt

(1) Sind U, U' offene affine Teilmengen von Y mit $U' \subseteq U$, so gilt $g_U(f^{-1}(U')) \subseteq U'$ und ist $g_{U'}: f^{-1}(U') \to U'$ die Restriktion von $g_U: f^{-1}(U) \to U$.

Denn: Sei x ein Punkt von $f^{-1}(U)$. Da das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ in dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}^+$ enthalten ist, ist $g_U(x)$ eine Generalisierung von $f(x)$. Deshalb gilt $g_U(f^{-1}(W)) \subseteq W$ für jede offene Teilmenge W von U. Für jedes $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt $f^* = g_U^*: \mathcal{O}_Y(D(s)) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(s)))$. Indem wir U' durch offene Teilmengen der Form $D(s)$ überdecken, erhalten wir $f^* = g_U^*: \mathcal{O}_Y(U') \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U'))$. Hieraus folgt die zweite Behauptung von (1).

Aus (1) folgt, daß sich die g_U bei variierendem U zu einem Morphismus lokal geringter Räume $g: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ verkleben.

Beispiel 3.10.8. In der Arbeit [Mu] konstruiert Mumford semiabelsche Gruppenschemata, indem er aus einem algebraischen Torus ein „Gitter herausdividiert". Wir

betrachten hier diese Konstruktion in der Kategorie der adischen Räume.
Zunächst wiederholen wir die Konstruktion analytischer Tori (siehe z.B. [FP], [G]) in einem etwas allgemeineren Zusammenhang. Seien R ein analytischer oder adischer Raum und Y eine Gruppe. Für jedes $y \in Y$ sei U_y eine offene Teilmenge von R, so daß $U_0 = R, U_{-y} = U_y$ und $U_y \cap U_{y'} \subseteq U_{y+y'}$ für alle $y, y' \in Y$. Dann ist

$$L := \coprod_{y \in Y} U_y$$

auf kanonische Weise eine Gruppe über R. Mit $\mathbb{G}_m^r$ bezeichnen wir den Torus $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_r, T_r^{-1}]$ und mit $\mathbb{G}_{m,R}^r$ die Gruppe $\mathbb{G}_m^r \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} R$ über R. Sei

$$f: L \to \mathbb{G}_{m,R}^r$$

ein Gruppenhomomorphismus (über R). Bezeichnet μ die Multiplikation auf $\mathbb{G}_{m,R}^r$, so ist $\mu \circ (f \times \mathrm{id}_{\mathbb{G}_{m,R}^r}): L \times_R \mathbb{G}_{m,R}^r \to \mathbb{G}_{m,R}^r$ eine Operation von L auf $\mathbb{G}_{m,R}^r$. Sei $p: \mathbb{G}_{m,R}^r \to R$ der Strukturmorphismus.

(A.1) Gibt es zu jedem $x \in R$ eine offene Umgebung U von x in R, eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_R(U)^{\circ\circ}$, so daß $f(U_y) \cap \{z \in p^{-1}(U) \mid v_z(a_i T_j^k) \geq 0$ und $v_z(a_i T_j^{-k}) \geq 0$ für jedes $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, r\}\} = \emptyset$ für jedes $y \in Y \setminus \{0\}$, so gilt

i) In der Kategorie $(VL)_{top}$ existiert der kategorielle Quotient $\pi: \mathbb{G}_{m,R}^r \to Z$ von $\mathbb{G}_{m,R}^r$ nach L.

ii) π ist surjektiv und ein lokaler Isomorphismus. Deshalb ist Z ein analytischer oder adischer Raum und ist der Strukturmorphismus $Z \to R$ lokal von endlichem Typ.

iii) Sind W ein analytischer oder adischer Raum und $W \to R$ ein adischer Morphismus, so ist der von π induzierte Morphismus $\mathbb{G}_{m,W}^r = \mathbb{G}_{m,R}^r \times_R W \to Z \times_R W$ der Quotient von $\mathbb{G}_{m,W}^r$ nach $L \times_R W$.

iv) f ist eine lokal abgeschlossene Einbettung.

Beweis: Für jedes $y \in Y$ ist $f \mid U_y$ ein Schnitt von p über U_y. Sei $s_y: p^{-1}(U_y) \to p^{-1}(U_y)$ die durch $f \mid U_y$ gegebene Translation. Angenommen, es gilt

(1) Es gibt eine offene Überdeckung $\{V_t \mid t \in T\}$ von $\mathbb{G}_{m,R}^r$, so daß $V_t \cap s_y(V_t \cap p^{-1}(U_y)) = \emptyset$ für jedes $t \in T$ und jedes $y \in Y \setminus \{0\}$.

Dann konstruieren wir den Quotienten π. Für $t, t' \in T$ und $y \in Y$ setzen wir $V_{tt'y} := V_t \cap s_y^{-1}(V_{t'} \cap p^{-1}(U_y))$. Aus (1) folgt $V_{tt'y} \cap V_{tt'y'} = \emptyset$ für $y \neq y'$. Wir setzen $V_{tt'} =$

$\bigcup_{y \in Y} V_{tt'y}$. Wegen $s_y(V_{tt'y}) = V_{t't(-y)}$ definieren die $s_y, y \in Y$, einen Isomorphismus $s_{tt'}: V_{tt'} \to V_{t't}$. Sei Z das Objekt von $(VL)_{top}$, das durch Zusammenkleben der V_t $(t \in T)$ längs der Isomorphismen $s_{tt'}$ entsteht. Da $\mathbb{G}^r_{m,R} = \bigcup_{t \in T} V_t$, haben wir eine kanonischen Morphismus $\pi: \mathbb{G}^r_{m,R} \to Z$. Es ist klar, daß (i), (ii), (iii) für diesen Morphismus π gelten.

Wir zeigen (1). Sei V eine offene Teilmenge von R mit der Eigenschaft

(*) Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und $r_1, \ldots, r_n \in \mathcal{O}_R(V)^{\circ\circ}$, so daß $f(U_y) \cap \{x \in p^{-1}(V) \mid v_x(r_i T_j^k) \geq 0$ und $v_x(r_i T_j^{-k}) \geq 0$ für jedes $(i,j) \in K\} = \emptyset$ für jedes $y \in Y \backslash \{0\}$, wobei $K := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, r\}$.

Für jede Familie $A = ((a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}) \mid (i,j) \in K)$ mit $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} + c_{ij} = b_{ij} + d_{ij} + 2$ für jedes $(i,j) \in K$ setzen wir

$$\begin{aligned} V_A := \{x \in p^{-1}(V) \mid\ & v_x(r_i^{a_{ij}} T_j^{2k}) \geq v_x(r_i^{b_{ij}}) \neq \infty \\ \text{und}\ \ & v_x(r_i^{c_{ij}} T_j^{-2k}) \geq v_x(r_i^{d_{ij}}) \neq \infty \\ & \text{für jedes}\ \ (i,j) \in K\} \end{aligned}$$

Dann gilt

(2) $V_A \cap s_y(V_A \cap p^{-1}(U_y)) = \emptyset$ für jedes $y \in Y \backslash \{0\}$ und die V_A 's überdecken $p^{-1}(V)$.

Denn: Sei $y \in Y \backslash \{0\}$ gegeben. Seien $f_1, \ldots, f_r$ die Elemente aus $\mathcal{O}_R(U_{-y})^*$ mit $s^*_{-y}(T_j) = f_j T_j$ für $j = 1, \ldots, r$. Dann gilt $V_A \cap s_y(V_A \cap p^{-1}(U_y)) = V_A \cap s_{-y}^{-1}(V_A \cap p^{-1}(U_{-y})) = \{x \in p^{-1}(V \cap U_{-y}) \mid v_x(r_i^{a_{ij}} T_j^{2k}) \geq v_x(r_i^{b_{ij}}) \neq \infty, v_x(r_i^{c_{ij}} T_j^{-2k}) \geq v_x(r_i^{d_{ij}}) \neq \infty, v_x(r_i^{a_{ij}} f_j^{2k} T_j^{2k}) \geq v_x(r_i^{b_{ij}}) \neq \infty, v_x(r_i^{c_{ij}} f_j^{-2k} T_j^{-2k}) \geq v_x(r_i^{d_{ij}}) \neq \infty$ für jedes $(i,j) \in K\}$. Angenommen, es gibt ein $z \in V_A \cap s_y(V_A \cap p^{-1}(U_y))$. Da $a_{ij} + c_{ij} = b_{ij} + d_{ij} + 2$ für jedes $(i,j) \in K$, folgt $v_z(r_i f_j^k) \geq 0$ und $v_z(r_i f_j^{-k}) \geq 0$ für jedes $(i,j) \in K$. Dies aber bedeutet gerade $(f \mid U_{-y})(p(z)) \in \{x \in p^{-1}(V) \mid v_x(r_i T_j^k) \geq 0$ und $v_x(r_i T_j^k) \geq 0$ für jedes $(i,j) \in K\}$, im Widerspruch zu (*).

Sei $x \in p^{-1}(V)$ gegeben. Wir suchen eine Familie A mit $x \in V_A$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixiert. Ist $v_x(r_i) = \infty$, so setzen wir $a_{ij} = c_{ij} = 1$ und $b_{ij} = d_{ij} = 0$ für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$. Ist $v_x(r_i) \neq \infty$, so wählen wir $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$ so, daß $a_{ij} + c_{ij} = b_{ij} + d_{ij} + 2$ und $(c_{ij} - d_{ij}) v_x(r_i) \geq v_x(T_j^{2k}) \geq (b_{ij} - a_{ij}) v_x(r_i)$. Dies ist möglich, da $v_x(T_j^{2k}) \neq \infty$ und $v_x(r_i)$ kofinal in $(\Gamma_{v_x})_\infty$ ist. Für diese Familie $A = ((a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}) \mid (i,j) \in K)$ gilt $x \in V_A$.

Da nach Voraussetzung R von offenen Teilmengen V überdeckt wird, die die Eigenschaft $(*)$ haben, folgt (1) aus (2).
Wir zeigen noch (iv). Seien $z \in Y$ und $x \in U_z$ gegeben. Nach (1) gibt es eine offene Umgebung W von $f(x)$ in $\mathbb{G}^r_{m,R}$, so daß $W \cap s_y(W \cap p^{-1}(U_y)) = \emptyset$ für jedes $y \in Y \backslash \{0\}$. Da $f \mid U_z$ ein Schnitt von p über U_z ist, ist $V := p(W \cap f(U_z))$ eine offene Teilmenge von R. Für jedes $t \in Y\backslash\{z\}$ gilt $f(U_t) \cap (W \cap p^{-1}(V)) \subseteq W \cap s_{t-z}(W \cap p^{-1}(U_{t-z})) = \emptyset$. Als Schnitt von p ist $f \mid U_z$ eine lokal abgeschlossene Einbettung (vgl. (3.11.4)). Damit folgt aus (3.6.28), daß f eine lokal abgeschlossene Einbettung ist.

(A.2) Die Voraussetzung von (A.1) ist erfüllt, wenn Y torsionsfrei und f quasikompakt ist.

Beweis: Wir nehmen an, daß Y torsionsfrei und f quasikompakt ist. Sei U eine offene affinoide Teilmenge von R. Sei H eine endliche Teilmenge von $\mathcal{O}_R(U)^{\circ\circ}$, so daß $H \cdot \mathcal{O}_R(U)$ offen in $\mathcal{O}_R(U)$ ist. Nach Konstruktion von $\mathbb{G}^r_{m,R}$ ist $V := \{x \in p^{-1}(U) \mid v_x(hT_j) \geq 0$ und $v_x(hT_j^{-1}) \geq 0$ für jedes $(h,j) \in H \times \{1,\ldots,r\}\}$ quasikompakt und offen in $\mathbb{G}^r_{m,R}$. Deshalb ist die Menge $K := \{y \in Y \mid U_y \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset\}$ endlich. Sei $k := \mid K \mid$. Dann ist $f(U_y) \cap W = \emptyset$ für jedes $y \in Y\backslash\{0\}$, wobei $W := \{x \in p^{-1}(U) \mid v_x(hT_j^k) \geq 0$ und $v_x(hT_j^{-k}) \geq 0$ für jedes $(h,j) \in H \times \{1,\ldots,r\}\}$. Denn: Angenommen, es gibt ein $y \in Y\backslash\{0\}$ mit $f(U_y) \cap W \neq \emptyset$. Wähle ein $x \in U_y$ mit $f(x) \in W$. Für jedes $i \in \{0,\ldots,k\}$ gilt $f(ix) = if(x) \in V$ und $ix \in U_{iy}$. Da Y torsionsfrei ist, folgt $\mid K \mid \geq k+1$, Widerspruch.

Wir spezifizieren nun R, Y, L, f etwas genauer. Sei A ein normaler exzellenter Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. A sei mit einer vollständigen adischen Topologie versehen. Mit S bezeichnen wir das Schema $\operatorname{Spec} A$ und mit $\tilde{G}$ den Torus $\mathbb{G}^r_m \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} S$ über S. Seien

$R := \operatorname{Spa}(A, A)$
$Y \subseteq \tilde{G}(K) = (K^*)^r$ eine torsionsfreie endlich erzeugte Untergruppe vom Rang r.

R betrachten wir auf kanonische Weise als Raum über $S, \varphi: \underline{R} \to S$ (siehe (3.10.6 v)). Die Verknüpfung auf Y schreiben wir additiv. Da wir auf $\mathbb{G}^r_m$ und damit auch auf $\tilde{G}$ schon die Koordinatenfunktionen $T_1, \ldots, T_r$ eingeführt haben, identifizieren wir die Charaktergruppe X von $\tilde{G}$ mit $\mathbb{Z}^r$. Wir nehmen an, daß zu Y eine Polarisation $\Phi: Y \to X$ im Sinne von [Mu], 1.2 existiert. Für $y = (y_1, \ldots, y_r) \in Y$ und $n =$

$(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$ setzen wir $y^n := y_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot y_r^{n_r} \in K^*$ und $T^n := T_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot T_r^{n_r} \in \mathcal{O}_{\tilde{G}}(\tilde{G})$. Für jedes $y = (y_1, \ldots, y_r) \in Y$ setzen wir

$$V_y := \{\mathfrak{p} \in S \mid y_i \in (A_\mathfrak{p})^* \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, r\}.$$

Dann gilt: V_y ist offen in $S, V_0 = S, V_{-y} = V_y$ und $V_y \cap V_{y'} \subseteq V_{y+y'}$ für alle $y, y' \in Y$. Deshalb ist

$$H := \coprod_{y \in Y} V_y$$

auf kanonische Weise eine Gruppe über S. Für $y = (y_1, \ldots, y_r) \in Y$ bezeichnen wir die algebraische Funktion auf V_y, die im generischen Punkt η den Wert y_i annimmt, ebenfalls mit y_i; wir haben dann $y_i \in \mathcal{O}_S(V_y)^*$. Sei $g_y: V_y \to \tilde{G}$ der S-Morphismus mit $g_y^*(T_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann ist

$$g := \coprod_{y \in Y} g_y : H \to \tilde{G}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Wir setzen

$$L := H \times_S R$$

$$f := g_{(R)} : L \to \tilde{G} \times_S R = \mathbb{G}^r_{m,R}$$

Mit dieser Definition von R, Y, L, f gilt

(A.3) i) Der Quotient von $\mathbb{G}^r_{m,R}$ nach L existiert.
ii) Der Morphismus $f: L \to \mathbb{G}^r_{m,R}$ ist eine abgeschlossene Einbettung. Wir können also L als abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{G}^r_{m,R}$ auffassen.

Beweis: Behauptung (ii) folgt aus (3.6.25) und den folgenden drei Aussagen.

a) f ist injektiv.
b) Für jede quasikompakte Teilmenge U von $\mathbb{G}^r_{m,R}$ ist die Menge $\{y \in Y \mid f(U_y) \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ($U_y := V_y \times_S R$).
c) Für jedes $y \in Y$ ist $f \mid U_y : U_y \to \mathbb{G}^r_{m,R}$ eine abgeschlossene Einbettung.

Beweis von (a): Seien $y = (y_1, \ldots, y_r) \in Y \backslash \{0\}$ und $x \in \varphi^{-1}(V_y)$. Da $y^{\Phi(y)} \in A^{\circ\circ}$, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $y_i(x) \neq 1$.

Beweis von (b): Sei eine quasikompakte Teilmenge U von $\mathbb{G}^r_{m,R}$ gegeben. Sei $a_1, \ldots, a_n$ ein Erzeugendensystem des Ideals $A^{\circ\circ}$ von A. Wir wählen ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $U \subseteq V := \{x \in \mathbb{G}^r_{m,R} \mid v_x(a_i^k T_j) \geq 0$ und $v_x(a_i^k T_j^{-1}) \geq 0$ für jedes $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,r\}\}$. Zu jedem $y \in Y$ wählen wir ein $n_y \in \mathbb{N}$ mit $n_y > t \cdot r \cdot k$, wobei t das Maximum der Beträge der Komponenten von $\Phi(y) \in \mathbb{Z}^r$ ist. Nach [Mu], 1.3 gibt es eine endliche Teilmenge Q von Y, so daß es zu jedem $z \in Y \backslash Q$ ein $y \in Y \backslash \{0\}$ gibt mit

$$z^{\Phi(y)} \in (y^{\Phi(y)})^{n_y} \cdot A.$$

Da $y^{\Phi(y)} \in A^{\circ\circ}$ für jedes $y \in Y \backslash \{0\}$, erhalten wir für jedes $z = (z_1,\ldots,z_r) \in Y \backslash Q$ und jedes $x \in \varphi^{-1}(V_z)$

$$v_x(z^{\Phi(y)}) \geq n_y \cdot \min\{v_x(a_1),\ldots,v_x(a_n)\},$$

woraus sich ergibt

$$\mid v_x(z_i) \mid > k \cdot \min\{v_x(a_1),\ldots,v_x(a_n)\} \quad \text{für} \quad \text{ein} \quad i \in \{1,\ldots,r\}.$$

($\mid v_x(z_i) \mid$ ist $v_x(z_i)$ oder $-v_x(z_i)$, je nach dem ob $v_x(z_i)$ positiv oder negativ ist.) Dies besagt gerade, daß $f(U_z) \cap V = \emptyset$ für jedes $z \in Y \backslash Q$.

Beweis von (c): Wir zeigen, daß $g_y \colon V_y \to \tilde{G}$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Dazu benötigen wir

(1) Für jedes $y \in Y$ gilt $V_y = D(y^{\Phi(y)})$.

Denn: Sei $h := y^{\Phi(y)}$. Die Inklusion $V_y \subseteq D(h)$ ist klar. Nach [Mu], 1.4 ist $y^\alpha \in A_h$ für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^r$. Spezielle für $\alpha = e_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ gilt $y_i = y^{e_i} \in A_h$ und $y_i^{-1} = y^{-e_i} \in A_h$, also $y_i \in (A_h)^*$ $(i = 1,\ldots,r)$. Dies zeigt $D(h) \subseteq V_y$.

Als Schnitt des Strukturmorphismus $g \colon \tilde{G} \to S$, ist g_y eine abgeschlossene Einbettung nach $g^{-1}(V_y)$. Wir betrachten die Nullstellenmenge $V(T^{\Phi(y)} - y^{\Phi(y)}) \subseteq \tilde{G}$ der globalen Funktion $T^{\Phi(y)} - y^{\Phi(y)} \in \mathcal{O}_{\tilde{G}}(\tilde{G})$. Nach (1) ist $V(T^{\Phi(y)} - y^{\Phi(y)})$ in $g^{-1}(V_y)$ enthalten. Da $g_y(V_y)$ in $V(T^{\Phi(y)} - y^{\Phi(y)})$ liegt, ist $g_y(V_y)$ abgeschlossen in $\tilde{G}$. Damit ist gezeigt, daß $g_y \colon V_y \to \tilde{G}$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

Die Behauptung (i) folgt aus (ii), (A.2) und (A.1). Man kann die Voraussetzung von (A.1) aber auch etwas schneller folgendermaßen verifizieren. Sei $a_1,\ldots,a_n$ wieder ein Erzeugendensystem des Ideals $A^{\circ\circ}$. Nach [Mu], 1.3 gibt es endliche Teilmengen $Z' \subseteq \mathbb{Z}^r$ und $Q \subseteq Y$, so daß es zu jedem $y \in Y \backslash Q$ ein $m \in Z'$ gibt mit $y^m \in A^{\circ\circ}$. Für $Z := Z' \cup \Phi(Q)$ gilt dann: Zu jedem $y \in Y \backslash \{0\}$ gibt es ein $m \in Z$ mit $y^m \in A^{\circ\circ}$. Sei $l \in \mathbb{N}$ das Maximum der Beträge der Komponenten der Elemente von Z. Dann gilt für jedes $y = (y_1,\ldots,y_r) \in Y \backslash \{0\}$ und jedes $x \in \varphi^{-1}(V_y)$:

$$rl\cdot \mid v_x(y_i) \mid \geq \min\{v_x(a_1),\ldots,v_x(a_n)\} \quad \text{für} \quad \text{ein} \quad i\in\{1,\ldots,r\}.$$

Hieraus folgt für $k:=rl+1$ und jedes $y\in Y\backslash\{0\}$: $f(U_y)\cap\{x\in \mathbb{G}^r_{m,R} \mid v_x(a_iT_j^k)\geq 0$ und $v_x(a_iT_j^{-k})\geq 0$ für jedes $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,r\}\}=\emptyset$.

Zu $\tilde{G}$ und Y wird in [Mu] ein Gruppenschema G über S konstruiert, das als der „Quotient" von $\tilde{G}$ nach Y zu verstehen ist. Es gibt jedoch keinen kanonischen Morphismus von $\tilde{G}$ nach G. Betrachtet man die zu $\tilde{G}$ und G assoziierten adischen Räume $\tilde{G}\times_S R$ und $G\times_S R$, so gilt

(A.4) i) Man hat einen kanonischen R-Morphismus adischer Räume $\rho\colon \tilde{G}\times_S R\to G\times_S R$. Dieser Morphismus ist der Quotient von $\mathbb{G}^r_{m,R}=\tilde{G}\times_S R$ nach L.
ii) Als Quotient von $\mathbb{G}^r_{m,R}$ erbt $G\times_S R$ eine Gruppenstruktur. Auch die Gruppenstruktur von G induziert eine Gruppenstruktur auf $G\times_S R$. Diese beiden Gruppenstrukturen auf $G\times_S R$ stimmen überein.

Beweis: i) Sei $\tilde{P}$ ein relativ vollständiges Modell von $\tilde{G}$ bezüglich Y und Φ (siehe [Mu]). Wir setzen $\tilde{P}$ als separiert voraus. Sei $\tilde{\mathfrak{P}}$ die $A^{\circ\circ}$-adische Vervollständigung von $\tilde{P}$ und sei $t(\tilde{\mathfrak{P}})$ der adische Raum zu dem formalen Schema $\tilde{\mathfrak{P}}$. Zu jedem $y\in Y$ hat man einen S-Morphismus $S_y\colon \tilde{P}\to\tilde{P}$, so daß $y\mapsto S_y$ eine Operation von Y auf $\tilde{P}$ ist. Dann operiert Y auch auf $\tilde{\mathfrak{P}}$ und $t(\tilde{\mathfrak{P}})$; die durch S_y induzierten Morphismen von $\tilde{\mathfrak{P}}$ und $t(\tilde{\mathfrak{P}})$ werden ebenfalls mit S_y bezeichnet. Sei

$$h\colon \tilde{\mathfrak{P}}\to\mathfrak{P}$$

der in [Mu] konstruierte Quotient von $\tilde{\mathfrak{P}}$ nach Y. Für den Morphsimus adischer Räume

$$t(h)\colon t(\tilde{\mathfrak{P}})\to t(\mathfrak{P})$$

gilt

(1)

a) $t(h)$ ist surjektiv.
b) Sind v und w Punkte von $t(\tilde{\mathfrak{P}})$ mit $t(h)(v)=t(h)(w)$, so gibt es ein $y\in Y$ mit $S_y(v)=w$.
c) Ist U eine Teilmenge von $t(\mathfrak{P})$, so daß $t(h)^{-1}(U)$ offen in $t(\tilde{\mathfrak{P}})$ ist, so ist U offen in $t(\mathfrak{P})$.

d) Sind U eine offene Teilmenge von $t(\mathfrak{P})$ und F der Unterring der Y-invarianten Elemente von $\mathcal{O}_{t(\tilde{\mathfrak{P}})}(t(h)^{-1}(U))$, so induziert $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{P})}(U) \to \mathcal{O}_{t(\tilde{\mathfrak{P}})}(t(h)^{-1}(U))$ einen Homöomorphismus von $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{P})}(U)$ auf F, wobei F mit der Teilraumtopologie von $\mathcal{O}_{t(\tilde{\mathfrak{P}})}(t(h)^{-1}(U))$ versehen ist.

Begründung: Der Morphismus $h: \tilde{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{P}$ faktorisiert in $\tilde{\mathfrak{P}} \xrightarrow{s} \mathfrak{Q} \xrightarrow{r} \mathfrak{P}$, wobei $\tilde{\mathfrak{P}} \xrightarrow{s} \mathfrak{Q}$ der Quotient von $\tilde{\mathfrak{P}}$ nach kY ist ($k \in \mathbb{N}$ geeignet) und $\mathfrak{Q} \xrightarrow{r} \mathfrak{P}$ der Quotient von $\mathfrak{Q}$ nach der endlichen Gruppe Y/kY ist. Klar ist, daß für s die zu (a) - (d) entsprechenden Eigenschaften gelten. Wir zeigen, daß auch r die zu (a) - (d) entsprechenden Eigenschaften hat. Da $r: \mathfrak{Q} \to \mathfrak{P}$ endlich ist, ist auch $t(r): t(\mathfrak{Q}) \to t(\mathfrak{P})$ endlich. Wir benutzen nun einige Eigenschaften endlicher Morphismen adischer Räume (siehe (3.12)). Da $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \to r_*\mathcal{O}_{\mathfrak{Q}}$ injektiv ist, ist auch $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{P})} \to t(r)_*\mathcal{O}_{t(\mathfrak{Q})}$ injektiv. Hieraus folgt (a) und daß $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{P})}(U)$ die Teilraumtopologie von $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{Q})}(t(r)^{-1}(U))$ trägt für jede offene Teilmenge U von $t(\mathfrak{P})$ (nach (2.3.33 i)). Da $t(r)$ abgeschlossen ist, gilt (c). Sei V eine offene affine Teilmenge von $\mathfrak{P}$. Dann ist $r^{-1}(V)$ affin und $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}(V)$ der Ring der Y/kY-invarianten Elemente von $\mathcal{O}_{\mathfrak{Q}}(r^{-1}(V))$. Mit [B], V.2.2 Th. 2 und [B], VI.8.6 Cor. 1 erhalten wir (b). Ist U eine rationale Teilmenge von $t(V)$, so ist $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{P})}(U)$ flach über $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}(V)$ ((3.6.5)) und deshalb ist $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{P})}(U)$ der Ring der Y/kY-invarianten Elemente von $\mathcal{O}_{t(\mathfrak{Q})}(t(r)^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{\mathfrak{Q}}(r^{-1}(V)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}(V)} \mathcal{O}_{t(\mathfrak{P})}(U)$. Also gilt (d).

Aus (1) folgt

(2) Für jede offene Teilmenge U von $t(\mathfrak{P})$ ist $t(h): t(h)^{-1}(U) \to U$ der Quotient von $t(h)^{-1}(U)$ nach Y in der Kategorie $(VL)_{top}$, d.h. $t(h)^{-1}(U) \to U$ ist Y-invariant und jeder Y-invariante Morphismus in $(VL)_{top}\, t(h)^{-1}(U) \to Z$ faktorisiert eindeutig über U.

Denn: Sei $p: t(h)^{-1}(U) \to Z$ ein Y-invarianter Morphismus in $(VL)_{top}$. Für jedes $x \in t(h)^{-1}(U)$ setzen wir $q(t(h)(x)) := p(x)$. Nach (a), (b) und (c) erhalten wir auf diese Weise eine stetige Abbildung $q: U \to Z$. Nach (d) faktorisiert für jede offene Teilenge V von Z die Abbildung $p^*: \mathcal{O}_Z(V) \to \mathcal{O}_{t(h)^{-1}(U)}(p^{-1}(V))$ eindeutig in $\mathcal{O}_Z(V) \xrightarrow{q^*} \mathcal{O}_U(q^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_{t(h)^{-1}(U)}(p^{-1}(V))$. Dadurch erhalten wir einen Morphismus topologischer Garben $q^*: \mathcal{O}_Z \to q_*\mathcal{O}_U$. Seien u ein Punkt von U und x ein Punkt von $t(h)^{-1}(U)$ mit $t(h)(x) = u$. Wir haben die Morphismen $\mathcal{O}_{Z,q(u)} \xrightarrow{a} \mathcal{O}_{U,u} \xrightarrow{b} \mathcal{O}_{t(h)^{-1}(U),x}$. Wegen $\operatorname{Spv}(b \circ a)(v_x) = v_{q(u)}$ und $\operatorname{Spv}(b)(v_x) = v_u$ gilt $\operatorname{Spv}(a)(v_u) = v_{q(u)}$. Also ist $(q, q^*): U \to Z$ ein Morphismus in $(VL)_{top}$.

Sind $g: M \to N$ ein Morphismus geringter Räume und I eine Idealgarbe von $\mathcal{O}_N$, so setzen wir $\bar{g}(I) := \operatorname{im}(g^*(I) \to \mathcal{O}_M)$ und $V(I) := \{x \in N \mid I_x \neq \mathcal{O}_{N,x}\}$.

$\tilde{G}$ ist ein offener Unterraum von $\tilde{P}$. Sei $\tilde{I} \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{P}}$ die Idealgarbe der auf $\tilde{P} \setminus \bigcup_{y \in Y} S_y(\tilde{G})$ verschwindenden Funktionen. Es ist $\tilde{S}_y(\tilde{I}) = \tilde{I}$ für jedes $y \in Y$. Sei $a: \tilde{\mathfrak{P}} \to \tilde{P}$ der kanonische Morphismus. Die Idealgarbe $\bar{a}(\tilde{I}) \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{P}}}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{J}}$. Sei $\mathfrak{J} \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ die Idealgarbe mit $\bar{h}(\mathfrak{J}) = \tilde{\mathfrak{J}}$. Das kommutative Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} t(\tilde{\mathfrak{P}}) & \xrightarrow{\pi_{\tilde{\mathfrak{P}}}} & \tilde{\mathfrak{P}} \\ t(h) \downarrow & & \downarrow h \\ t(\mathfrak{P}) & \xrightarrow[\pi_{\mathfrak{P}}]{} & \mathfrak{P} \end{array}$$

zeigt $\overline{t(h)}(\overline{\pi_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{J})) = \overline{\pi_{\tilde{\mathfrak{P}}}}(\tilde{\mathfrak{J}})$ und deshalb gilt

(3) $t(\tilde{\mathfrak{P}}) \setminus V(\overline{\pi_{\tilde{\mathfrak{P}}}}(\tilde{\mathfrak{J}})) = t(h)^{-1}(t(\mathfrak{P}) \setminus V(\overline{\pi_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{J})))$.

Sei P das projektive Schema über S, dessen $A^{\circ\circ}$-adische Vervollständigung mit $\mathfrak{P}$ übereinstimmt. Sei I die kohärente Idealgarbe von P mit $\bar{b}(I) = \mathfrak{J}$, wobei $b: \mathfrak{P} \to P$ der kanonische Morphismus ist. Definitionsgemäß ist G der offene Teilraum $P \setminus V(I)$ von P.

Nach (3.10.6 v) induzieren a und b kanonische Morphismen adischer Räume

$$c: t(\tilde{\mathfrak{P}}) \to \tilde{P} \times_S R$$

$$d: t(\mathfrak{P}) \to P \times_S R.$$

Die Operation von Y auf $\tilde{P}$ induziert eine Operation von Y auf $\tilde{P} \times_S R$. Es gilt

(4)

a) c ist Y-äquivariant.

b) c induziert per Restriktion einen Isomorphismus

$$c': t(\tilde{\mathfrak{P}}) \setminus V(\overline{\pi_{\tilde{\mathfrak{P}}}}(\tilde{\mathfrak{J}})) \to \bigcup_{y \in Y} S_y(\tilde{G} \times_S R).$$

c) d induziert per Restriktion einen Isomorphismus

$$d': t(\mathfrak{P}) \setminus V(\overline{\pi_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{J})) \to G \times_S R.$$

Begründung: a) Nachrechnen.

b) Nach (3.10.6 v (c)) und dem nachfolgenden Punkt (6) reicht es zu zeigen

$$\operatorname{im}(c) \supseteq \bigcup_{y \in Y} S_y(\tilde{G} \times_S R).$$

Wegen (a) ist nur zu zeigen

$$\mathrm{im}\,(c) \supseteq \tilde{G} \times_S R.$$

Sei $x \in \tilde{G} \times_S R$ gegeben. Sei $l: \tilde{G} \times_S R \to \tilde{G} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spa}\,(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})(= \mathrm{Spv}\,\tilde{G})$ der kanonische Morphismus. Sei y eine Primärgeneralisierung von $l(x)$ in $\mathrm{Spv}\,\tilde{G}$, deren Träger der generische Punkt von $\tilde{G}$ ist ((1.1.16)). Da $v_x(a)$ kofianl in $(\Gamma_{v_x})_\infty$ ist für jedes $a \in A^{oo}$, gilt

(5) $y(a) > c\Gamma_y$ oder $y(a)$ ist kofinal in $c\Gamma_y$ für jedes $a \in A^{oo}$.

Sei $\alpha \in X$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in Y$, so daß $\Phi(z) = n\alpha$. Da $(z^\alpha)^n = z^{\Phi(z)} \in A^{oo}$, ist $z^\alpha \in A^{oo}$. Nach (5) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot y(z^\alpha) \geq -y(T^\alpha)$, d.h. $y((mz)^\alpha T^\alpha) \geq 0$. Hiermit folgt aus [Mu], 2.1 (ii), daß y eine Primärspezialisierung w in $\mathrm{Spv}\,\tilde{P}$ hat, die eine triviale Bewertung ist. Nach (1.4.5) ist w auch eine Primärspezialisierung von $l(x)$ in $\mathrm{Spv}\,\tilde{P}$. Hieraus folgt, daß x in $\tilde{P} \times_S R$ eine Primärspezialisierung r hat, so daß v_r eine triviale Bewertung ist. Mit (3.10.6 v(a)) erhalten wir $x \in \mathrm{im}\,(c)$.

c) folgt aus (3.10.6 v(d)) und (6).

(6) Seien Z ein Schema lokal von endlichem Typ über S, $\hat{Z}$ die A^{oo}-adische Vervollständigung von Z, $J \subseteq \mathcal{O}_Z$ eine kohärente Idealgarbe und

$$\begin{array}{ccc} t(\hat{Z}) & \xrightarrow{j} & Z \times_S R \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ \hat{Z} & \xrightarrow[i]{} & Z \end{array}$$

die kanonischen Morphismen. (Das Diagramm ist im allgemeinen nicht kommutativ.) Dann gilt

$$\bar{j}(\bar{p}(J)) = \bar{\pi}(\bar{i}(J)).$$

Denn: Sei U eine offene Teilmenge von Z. Dann ist $V := (i \circ \pi)^{-1}(U) \subseteq (p \circ j)^{-1}(U)$, und $i \circ \pi$ und $p \circ j$ induzieren denselben Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_{t(\hat{Z})}(V)$. Hieraus folgt die Behauptung.

(**Bemerkung.** Benutzt man [Mu], 3.1, so kann man in Ergänzung zu (4 b) zeigen, daß $c: t(\tilde{\mathfrak{P}}) \to \tilde{P} \times_S R$ ein Isomorphismus ist (vgl. auch Beweis von [Mu], 3.3).)

Nach (3) und (4 b und c) gibt es einen Morphismus adischer Räume

$$\sigma: \bigcup_{y \in Y} S_y(\tilde{G} \times_S R) \to G \times_S R,$$

so daß kommutiert

$$\begin{array}{ccc} t(\tilde{\mathfrak{P}})\backslash V(\overline{\pi_{\tilde{\mathfrak{P}}}}(\tilde{\mathfrak{J}})) & \xrightarrow[\sim]{c'} & \bigcup_{y\in Y} S_y(\tilde{G}\times_S R) \\ t(h)\downarrow & & \downarrow\sigma \\ t(\mathfrak{P})\backslash V(\overline{\pi_{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{J})) & \xrightarrow[d']{\sim} & G\times_S R. \end{array}$$

Aus (2), (3) und (4 a) folgt

(7) σ ist der Quotient von $\bigcup_{y\in Y} S_y(\tilde{G}\times_S R)$ nach Y.

Wir definieren

$$\rho := \sigma \mid \tilde{G}\times_S R: \tilde{G}\times_S R \to G\times_S R$$

Zu zeigen ist, daß ρ der Quotient von $\tilde{G}\times_S R$ nach L ist. Sei $q: \tilde{G} \to S$ der Strukturmorphismus. Im Beweis von (A.3) wurde gezeigt, daß $g_y: V_y \to \tilde{G}$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Sei $s_y: q^{-1}(V_y) \to q^{-1}(V_y)$ die durch den Schnitt g_y gegebene Translation. Aus den Definitionseigenschaften eines relativ vollständigen Modells ([Mu], 2.1) folgt

(8) Für jedes $y\in Y$ gilt $\tilde{G}\cap S_y(\tilde{G}) = q^{-1}(V_y)$ und $S_y \mid q^{-1}(V_y) = s_y$.

Da $\sigma\, Y$-invariant ist, folgt aus (8), daß $\rho\, L$-invariant ist. Seien Z ein Objekt in $(VL)_{top}/R$ und $\tau: \tilde{G}\times_S R \to Z$ ein L-invarianter Morphismus in $(VL)_{top}/R$. Wir definieren einen Morphismus in $(VL)_{top}/R$

$$\eta: \bigcup_{y\in Y} S_y(\tilde{G}\times_S R) \to Z$$

durch

$$\eta \mid S_y(\tilde{G}\times_S R) = \tau\circ (S_y^{-1} \mid S_y(\tilde{G}\times_S R))$$

Da $\tau\, L$-invariant ist, folgt aus (8), daß η wohldefiniert und Y-invariant ist. Nach (7) gibt es einen R-Morphismus $\nu: G\times_S R \to Z$ mit $\eta = \nu\circ\sigma$, also auch $\tau = \nu\circ\rho$. Ist $\nu': G\times_S R \to Z$ ein R-Morphismus mit $\tau = \nu'\circ\rho$, so gilt $\eta = \nu'\circ\sigma$ (da $\sigma\, Y$-invariant ist) und deshalb $\nu' = \nu$. Also ist ρ der Quotient von $\tilde{G}\times_S R$ nach L und (i) ist bewiesen.

ii) Sei $\tilde{P}$ gegeben wie im Beweis von (i). Die Konstruktion von G mit Hilfe von $\tilde{P}$ liefert gleichzeitig einen kanonischen Isomorphismus

$$\lambda: \tilde{G}^\wedge \to G^\wedge,$$

wobei $\tilde{G}^\wedge$ und $G^\wedge$ die $A^{\circ\circ}$-adischen Vervollständigungen von $\tilde{G}$ und G sind. Seien $\tilde{D}$ und D die lokal geringten Räume, deren zugrundeliegenden topologischen Räume die topologischen Teilräume $\tilde{E} := \{x \in \tilde{G} \times_S R \mid v_x \text{ ist triviale Bewertung }\}$ und $E := \{x \in G \times_S R \mid v_x \text{ ist triviale Bewertung }\}$ von $\tilde{G} \times_S R$ und $G \times_S R$ sind und deren Strukturgarben die Restriktionen $\mathcal{O}_{\tilde{G}\times_S R} \mid \tilde{E}$ und $\mathcal{O}_{G\times_S R} \mid E$ sind. Man hat dann kanonische Isomorphismen

$$\tilde{j}: \tilde{D} \to \tilde{G}^\wedge$$

$$j: D \to G^\wedge,$$

die folgendermaßen definiert sind: Sei $p: \tilde{G} \times_S R \to \tilde{G}$ die Projektion. Dann ist $\tilde{j}$ der eindeutig bestimmte Morphismus, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} \tilde{D} \arrow[rr, "\tilde{j}"] \arrow[dr, "p \mid \tilde{D}"'] & & \tilde{G}^\wedge \arrow[dl, "a"] \\ & \tilde{G}, & \end{tikzcd}$$

wobei a der kanonische Morphismus ist (vgl. (3.7.1)). j ist entsprechend definiert. Nach Konstruktion von $\rho: \tilde{G} \times_S R \to G \times_S R$ im Beweis von (i) gilt

(9) Ist $\rho': \tilde{D} \to D$ die Restriktion von ρ, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} \tilde{D} \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[d, "\rho'"'] & \tilde{G}^\wedge \arrow[d, "\lambda"] \\ D \arrow[r, "j"'] & G^\wedge. \end{tikzcd}$$

Seien nun $(\tilde{G}_i, Y_i, \Phi_i, \tilde{P}_i), i = 1, 2$, zwei Tori über S zusammen mit Periodengruppen, Polarisationen und relativ vollständigen Modellen. Seien G_i die daraus konstruierten Schemata und $\rho_i: \tilde{G}_i \times_S R \to G_i \times_S R$ die Morphismen gemäß (i). Sei $\tilde{\alpha}: \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$ ein S-Gruppenhomomorphismus mit $\tilde{\alpha}(Y_1) \subseteq Y_2$. Nach [Mu], 4.6 gibt es einen S-Morphismus $\alpha: G_1 \to G_2$, so daß kommutiert

$$(10) \qquad \begin{tikzcd} \tilde{G}_1^\wedge \arrow[r, "\tilde{\alpha}^\wedge"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & \tilde{G}_2^\wedge \arrow[d, "\lambda_2"] \\ G_1^\wedge \arrow[r, "\alpha^\wedge"'] & G_2^\wedge, \end{tikzcd}$$

wobei λ_1, λ_2 die kanonischen Morphismen sind. Seien $\tilde{\alpha}_{(R)}: \tilde{G}_1 \times_S R \to \tilde{G}_2 \times_S R$ und $\alpha_{(R)}: G_1 \times_S R \to G_2 \times_S R$ die durch $\tilde{\alpha}$ und α induzierten Morphismen adischer Räume. Es gilt

(11) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_1 & \xrightarrow{\tilde{d}} & \tilde{D}_2 \\ \rho_1' \downarrow & & \downarrow \rho_2' \\ D_1 & \xrightarrow[d]{} & D_2 \end{array}$$

kommutiert, wobei $\tilde{D}_i, D_i$ wie oben definiert sind, ρ_i' die Restriktion von ρ_i und $\tilde{d}, d$ die Restriktionen von $\tilde{\alpha}_{(R)}$ und $\alpha_{(R)}$ sind.

Denn: Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{G}_1^\wedge & & & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^\wedge} & & & \tilde{G}_2^\wedge \\ & \tilde{j}_1 \nwarrow & & 1 & & \nearrow \tilde{j}_2 & \\ & & \tilde{D}_1 & \xrightarrow{\tilde{d}} & \tilde{D}_2 & & \\ \lambda_1 \downarrow & 4 & \rho_1' \downarrow & 5 & \downarrow \rho_2' & 2 & \downarrow \lambda_2 \\ & & D_1 & \xrightarrow[d]{} & D_2 & & \\ & j_1 \swarrow & & 3 & & \searrow j_2 & \\ G_1^\wedge & & & \xrightarrow[\alpha^\wedge]{} & & & G_2^\wedge \end{array}$$

Die Vierecke 1 und 3 sind kommutativ (funktorielles Verhalten), auch 2 und 4 sind kommutativ (nach (9)). Da das Diagramm (10) kommutiert, und j_2 ein Isomorphismus ist, erhalten wir, daß 5 kommutiert.

Ferner benötigen wir

(12) Es gibt eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener affinoider Teilmengen von $\tilde{G}_1 \times_S R$, so daß $U_n \subseteq U_{n+1}, \tilde{G}_1 \times_S R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und $\mathcal{O}_{\tilde{G}_1 \times_S R}(U_n)$ integer ist für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Begründung: Sei $\tilde{G}_1 = \operatorname{Spec} A[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_m, T_m^{-1}]$ und sei M ein endliches Erzeugendensystem des Ideals $A^{\circ\circ}$ von A. Wir setzen $U_n := \{x \in \tilde{G}_1 \times_S R \mid v_x(lT_j) \geq 0$ und $v_x(lT_j^{-1}) \geq 0$ für jedes $(l, j) \in M^n \times \{1, \ldots, m\}\}$. Dann ist U_n offen und affinoid, $U_n \subseteq U_{n+1}, \tilde{G}_1 \times_S R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und

$$\mathcal{O}_{\tilde{G}_1 \times_S R}(U_n) = \{ \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} a_\nu T^\nu \mid a_\nu \in A \quad \text{für} \quad \text{jedes} \quad \nu \in \mathbb{Z}^m$$

und zu jeder Nullumgebung W von A gibt es nur endlich viele $\nu \in \mathbb{Z}^m$ mit $a_\nu \notin M^{n\cdot|\nu|} \cdot W\}$.

(mit $|\nu| = |\nu_1| + \ldots + |\nu_m|$ für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$). Seien $a = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} a_\nu T^\nu$ und $b = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} b_\nu T^\nu$ zwei von Null verschiedene Elemente von $\mathcal{O}_{\tilde{G}_1\times_S R}(U_n)$ und $c = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} c_\nu T^\nu$ das Produkt von a und b. Zu zeigen ist $c \neq 0$. Wir wählen eine stetige Bewertung $w: A \to \Gamma_\infty$ mit Träger (0) ((3.6.11)) und eine Anordnung auf $\mathbb{Z}^m$, die mit der Addition von $\mathbb{Z}^m$ verträglich ist. Es existiert $\gamma := \min\{w(a_\nu) \mid \nu \in \mathbb{Z}^m\}$ und die Menge $Q := \{\nu \in \mathbb{Z}^m \mid w(a_\nu) = \gamma\}$ ist endlich. Sei $\lambda := \min Q$. Dann ist $w(a_\nu) \geq w(a_\lambda)$ für jedes $\nu \in \mathbb{Z}^m$ und $w(a_\nu) > w(a_\lambda)$ für $\nu < \lambda$. Ebenso gibt es ein $\mu \in \mathbb{Z}^m$, so daß $w(b_\nu) \geq w(b_\mu)$ für jedes $\nu \in \mathbb{Z}^m$ und $w(b_\nu) > w(b_\mu)$ für jedes $\nu < \mu$. Schreibe $c_{\lambda+\mu} = a_\lambda b_\mu + d$ mit $d = \sum a_\alpha b_\beta$, wobei über alle α, β summiert wird mit $\alpha + \beta = \lambda + \mu$ und $(\alpha, \beta) \neq (\lambda, \mu)$. Dann ist $w(d) > w(a_\lambda b_\mu)$ und deshalb $w(c_{\lambda+\mu}) = w(a_\lambda) + w(b_\mu) \neq \infty$. Also ist $c_{\lambda+\mu} \neq 0$ und damit $c \neq 0$.

Nun können wir zeigen

(13) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_1 \times_S R & \xrightarrow{\tilde{\alpha}(R)} & \tilde{G}_2 \times_S R \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ G_1 \times_S R & \xrightarrow[\alpha(R)]{} & G_2 \times_S R \end{array}$$

ist kommutativ.

Denn: Wir setzen $u_1 := \alpha_{(R)} \circ \rho_1$ und $u_2 := \rho_2 \circ \tilde{\alpha}_{(R)}$. In der Kategorie der adischen Räume über R existiert der Kern $\mathrm{Ker}(u_1, u_2)$ der beiden Morphismen u_1 und u_2 ([EGA*], 0.1.4.10). Da G_2 separiert ist, ist der Morphismus $\mathrm{Ker}(u_1, u_2) \to \tilde{G}_1 \times_S R$ eine abgeschlossene Einbettung (vgl. (3.11.22)). Sei $\mathcal{I}$ die kohärente Idealgarbe dazu. Wir wählen ein $x \in \tilde{D}_1$. Nach (11) gilt $u_1(x) = u_2(x) =: y$ und $u_1^* = u_2^*: \mathcal{O}_{G_2\times_S R,y} \to \mathcal{O}_{\tilde{G}_1\times_S R,x}$. Da $G_2 \times_S R$ lokal von endlichem Typ über R ist, gibt es eine offene Umgebung V von x in $\tilde{G}_1 \times_S R$ mit $u_1 \mid V = u_2 \mid V$, d.h. $\mathcal{I} \mid V = 0$. Wir können annehmen, daß $x \in U_n$ für jedes U_n aus (12). Da $\alpha: \mathcal{O}_{\tilde{G}_1\times_S R}(U_n) \to \mathcal{O}_{\tilde{G}_1\times_S R,x}$ flach ist ((3.6.5)) und $\mathcal{O}_{\tilde{G}_1\times_S R}(U_n)$ integer ist, ist α injektiv. Aus (3.6.22) folgt $\mathcal{I} \mid U_n = 0$. Also ist $\mathcal{I} = 0$ und damit $u_1 = u_2$.

Aus der Konstruktion der Gruppenstruktur von G in [Mu], 4.8 und (13) folgt die Behauptung (ii).

3.11. Separierte Morphismen

In (3.3) und (3.8) haben wir definiert, daß ein analytischer oder adischer Raum X quasisepariert heißt, wenn $U \cap V$ quasikompakt ist für beliebige offene quasikompakte Teilmengen U und V von X.

Definition 3.11.1. Ein Morphismus $f: X \to Y$ analytischer oder adischer Räume heißt quasisepariert, wenn $f^{-1}(U)$ quasisepariert ist für jede offene quasiseparierte Teilmenge U von Y.

Bemerkung 3.11.2. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer oder adischer Räume.
i) Ist X quasisepariert, so ist f quasisepariert.
ii) Ist f adisch und gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von Y, so daß $f^{-1}(U)$ quasisepariert ist für jedes $U \in \mathfrak{U}$, so ist f quasisepariert.

Proposition 3.11.3. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer oder adischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist. f ist genau dann quasisepariert, wenn die Diagonalabbildung $\Delta_f: X \to X \times_Y X$ quasikompakt ist.

Beweis: Nachrechnen.

Lemma 3.11.4. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer oder adischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist. Für die Diagonalabbildung $\Delta_f: X \to X \times_Y X$ gilt
i) Δ_f ist eine lokal abgeschlossene Einbettung.
ii) Sind X und Y affinoid, so ist Δ_f eine abgeschlossene Einbettung.

Beweis: (ii) folgt aus (3.6.24) und (i) folgt aus (ii) und (3.6.28).

Definition 3.11.5. Ein Morphismus analytischer oder adischer Räume $f: X \to Y$, der lokal von endlichem Typ ist, heißt separiert, wenn die Diagonalabbildung $\Delta_f: X \to X \times_Y X$ eine abgeschlossene Einbettung ist (nach (3.6.29) und (3.11.4 i) ist dies äquivalent dazu, daß $\Delta_f(X)$ abgeschlossen in $X \times_Y X$ ist).

In (1.5) haben wir zu einem bewerteten lokalen Ring (A, v) einen lokalen Ring A_v definiert. In Ergänzung zu (1.5.2 ii) zeigen wir

Lemma 3.11.6. Seien (A, v) und (B, w) bewertete lokale Ringe und $f: A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt

i) Äquivalent sind

a) v ist eine Primärspezialisierung von $\mathrm{Spv}\,(f)(w)$ in $\mathrm{Spv}\,A$.

b) $f(A_v) \subseteq B_w$ und die Restriktion $f\colon A_v \to B_w$ ist lokal.

ii) Äquivalent sind

a) v ist eine Sekundärspezialisierung von $\mathrm{Spv}\,(f)(w)$ in $\mathrm{Spv}\,A$.

b) $f(A_v) \subseteq B_w$ und der Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ ist lokal.

iii) Äquivalent sind

a) v ist eine Spezialisierung von $\mathrm{Spv}\,(f)(w)$ in $\mathrm{Spv}\,A$.

b) $f(A_v) \subseteq B_w$.

Beweis: i) (a) $\Longrightarrow$ (b): einfaches Nachrechnen
(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei $u := \mathrm{Spv}\,(f)(w)$. Die Voraussetzung (b) besagt:

Für alle $a \in A$ gilt

α) Ist $v(a) \geq 0$, so ist $u(a) \geq 0$.

β) Ist $v(a) > 0$, so ist $u(a) > 0$.

Wir werden zeigen: Für alle $a, b \in A$ gilt

1) Ist $v(a) \geq v(b) \neq \infty$, so ist $u(a) \geq u(b) \neq \infty$.

2) Ist $v(a) > v(b)$, so ist $u(a) > u(b)$.

Aus (1.3.3) folgt dann, daß u eine Primärgeneralisierung von v ist.
Zu (1): Aus $v(b) \neq \infty$ folgt, daß b eine Einheit in A ist. Aus $v(\frac{a}{b}) \geq 0$ und (α) folgt $u(a) \geq u(b) \neq \infty$.
Zu (2): Da $v(b) \neq \infty$, ist b eine Einheit in A. Aus $v(\frac{a}{b}) > 0$ und (β) folgt $u(a) > u(b)$.
ii) und iii) Nachrechnen.

Korollar 3.11.7. Seien X ein adischer Raum und x, y Punkte von X, wobei y eine Spezialisierung von x ist. Seien $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ und $(\mathcal{O}^+)_y \to (\mathcal{O}^+)_x$ die kanonischen Abbildungen. Dann gilt
i) y ist genau dann eine Primärspezialisierung von x, wenn $(\mathcal{O}^+)_y \to (\mathcal{O}^+)_x$ lokal ist.
ii) y ist genau dann eine Sekundärspezialisierung von x, wenn $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ lokal ist.

Unter einem bewerteten Bewertungsring (kurz: bB) verstehen wir einen bewerteten lokalen Ring (A, v), wobei A ein Bewertungsring ist. Ist (A, v) ein bB, so ist A_v ein Bewertungsring mit $\mathrm{Quot}\,(A) = \mathrm{Quot}\,(A_v)$. Sind umgekehrt A und B zwei Bewertungsringe mit $B \subseteq A$ und $\mathrm{Quot}\,(B) = \mathrm{Quot}\,(A)$, so gibt es genau eine Bewertung v von A, so daß (A, v) ein bB ist mit $A_v = B$.
Sei (A, v) ein bewerteter Bewertungsring. Meist schreiben wir nur A statt (A, v), und

bezeichnen dann v genauer mit v_A. Für den Ring A_v schreiben wir auch A^+, und statt (A, v) oft auch (A, A^+).

Definition 3.11.8. i) Seien X ein analytischer oder adischer Raum und x ein Punkt von X. Unter einem bewerteten Bewertungsring von $\kappa(x)$ verstehen wir einen bewerteten Bewertungsring A mit $A \subseteq k(x), \mathrm{Quot}\,(A) = k(x), A^+ \subseteq k(x)^+$. Ein bewerteter Bewertungsring A heißt bewerteter Bewertungsring von X, wenn es ein $x \in X$ gibt, so daß A ein bewerteter Bewertungsring von $\kappa(x)$ ist; x heißt der Träger von A.
ii) Seien X ein analytischer oder adischer Raum, A ein bB von X und x der Träger von A. Ein Zentrum von A auf X ist eine Spezialisierung y von x, so daß für die kanonische Abbildung $\varphi: \mathcal{O}_y \to k(x)$ gilt: $\varphi(\mathcal{O}_y) \subseteq A$ und die Restriktion $\varphi: \mathcal{O}_y \to A$ ist ein lokaler Ringhomomorphismus zwischen den bewerteten lokalen Ringen $(\mathcal{O}_y, v_y)$ und (A, v_A).

Lemma 3.11.9. Seien X ein affinoider analytischer oder affinoider adischer Raum, A ein bB von X und x der Träger von A. Genau dann hat A ein Zentrum auf X, wenn für die kanonische Abbildung $\psi: \mathcal{O}(X) \to k(x)$ gilt $\psi(\mathcal{O}(X)) \subseteq A$ und $\psi(\mathcal{O}^+(X)) \subseteq A^+$. Hat A ein Zentrum auf X, so ist dieses eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Es gelte nun $\psi(\mathcal{O}(X)) \subseteq A$ und $\psi(\mathcal{O}^+(X)) \subseteq A^+$. Sei w die durch $k(x)^+$ gegebene Bewertung von A mit Träger (0). Es ist v_A eine Spezialisierung von w in $\mathrm{Spv}\,A$. Wir versehen A mit der Teilraumtopologie von $k(x)$. Es ist dann (A, A^+) ein affinoider Ring und w, v_A sind Elemente von $\mathrm{Spa}\,(A, A^+)$. Sei $g: \mathrm{Spa}\,(A, A^+) \to \mathrm{Spa}\,(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}^+(X)) = X$ die durch $\psi: (\mathcal{O}(X), \mathcal{O}^+(X)) \to (A, A^+)$ gegebene Abbildung. Es gilt $x = g(w)$, und $y := g(v_A)$ ist eine Spezialisierung von x. Nach (2.1.15) faktorisiert für jede rationale Teilmenge U von X mit $y \in U$ die Abbildung $\psi: \mathcal{O}(X) \to A$ über eine stetige Abbildung $\mathcal{O}(U) \to A$. (Man beachte, daß A zwar im allgemeinen nicht vollständig ist, aber abgeschlossen in $k(x)$ ist.) Hieraus folgt, daß y ein Zentrum von A ist.
Seien y und z Zentren von A. Wir haben dann lokale Ringhomomorphismen zwischen bewerteten lokalen Ringen $(\mathcal{O}_y, v_y) \to (A, v_A)$ und $(\mathcal{O}_z, v_z) \to (A, v_A)$. Für $a, b \in \mathcal{O}(X)$ gilt: $v_y(a) \geq v_y(b) \iff v_A(a(x)) \geq v_A(b(x)) \iff v_z(a) \geq v_z(b)$. Deshalb $y = z$.

Lemma 3.11.10. Für einen analytischen oder adischen Raum X gilt
i) Seien A ein bB von X, x der Träger von A und y ein Zentrum von A. Gilt

$A^+ = k(x)^+$, so ist y eine Primärspezialisierung von x, und gilt $A = k(x)$, so ist y eine Sekundärspezialisierung von x.
ii) Seien x ein Punkt von X und y eine Spezialisierung von x. Dann gibt es einen bB A von X, der x als Träger und y als Zentrum hat. Ist y eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von x, so kann man A so wählen, daß gilt $A^+ = k(x)^+$ (bzw. $A = k(x)$).
iii) Seien x ein Punkt von X und y eine Sekundärspezialisierung von x. Dann gibt es genau einen bB von X, der x als Träger und y als Zentrum hat.

Beweis: i) Wir betrachten die Abbildungen $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ und $(\mathcal{O}^+)_y \to (\mathcal{O}^+)_x$. Es gelte $A^+ = k(x)^+$. Da $(\mathcal{O}^+)_y \to A^+$ lokal ist (nach (1.5.2)), ist dann $(\mathcal{O}^+)_y \to (\mathcal{O}^+)_x$ lokal. Aus (3.11.7 i) folgt, daß y ein Primärspezialisierung von x ist. Es gelte nun $A = k(x)$. Da $\mathcal{O}_y \to A$ lokal ist, ist dann $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ lokal. Aus (3.11.7 ii) folgt, daß y eine Sekundärspezialisierung von x ist.
ii) Wir betrachten die durch $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ gegebene Abbildung $h\colon \operatorname{Spv} \mathcal{O}_x \to \operatorname{Spv} \mathcal{O}_y$. Es ist v_y eine Spezialisierung von $h(v_x)$ ((1.5.6)). Nach (1.1.17) gibt es ein $w \in \operatorname{Spv} \mathcal{O}_y$ mit

$$h(v_x) \succ w \succ v_y,$$

wobei $h(v_x) \succ w$ eine Sekundärspezialisierung und $w \succ v_y$ eine Primärspezialisierung ist. Sei $u \in \operatorname{Spv} \mathcal{O}_x$ eine Sekundärspezialisierung von v_x mit $w = h(u)$. Sei A^+ der durch u gegebene Bewertungsring von $k(x)$. Nach (1.1.9) gibt es einen Bewertungsring A von $k(x)$, so daß $A^+ \subseteq A$, $\mathcal{O}_y$ unter der Abbildung $\mathcal{O}_y \to k(x)$ nach A abgebildet wird und für die Abbildung $g\colon \operatorname{Spv} A \to \operatorname{Spv} \mathcal{O}_y$ gilt: Die durch A^+ induzierte Bewertung von A mit Träger im maximalen Ideal von A wird unter g auf v_y abgebildet. Dann ist (A, A^+) ein bB von $\kappa(x)$, der y als Zentrum hat. Ist y eine Primärspezialisierung von x, so wähle $w = h(v_x)$. Man kann dann $u = v_x$ wählen und dann gilt $A^+ = k(x)^+$. Ist y eine Sekundärspezialisierung von x, so kann man $w = v_y$ und damit $A = k(x)$ wählen.
iii) Das Bild von $\mathcal{O}_y$ unter der Abbildung $\mathcal{O}_y \to k(x)$ liegt dicht in $k(x)$. Hieraus folgt die Eindeutigkeit.

Seien $f\colon X \to Y$ ein Morphismus analytischer oder adischer Räume, x ein Punkt von X und A ein bB von $\kappa(x)$. Dann ist $(A \cap k(f(x)), A^+ \cap k(f(x)))$ ein bB von $\kappa(f(x))$, der mit $f_v(A)$ bezeichnet wird.

Bemerkung 3.11.11. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen analytischen oder adischen Räumen.
i) Ist $x \in X$ ein Zentrum eines bB A von X, so ist $f(x)$ ein Zentrum von $f_v(A)$.
ii) Seien x ein Punkt von X und B ein bB von $\kappa(f(x))$. Dann gibt es einen bB A von $\kappa(x)$ mit $f_v(A) = B$. Gilt $B^+ = k(f(x))^+$ (bzw. $B = k(f(x))$), so kann man A so wählen, daß gilt $A^+ = k(x)^+$ (bzw. $A = k(x)$).

Proposition 3.11.12. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer oder adischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist. Dann sind äquivalent
a) f ist separiert.
b) f ist quasisepariert und sind x_1, x_2 zwei Zentren eines bB von X mit $f(x_1) = f(x_2)$, so gilt $x_1 = x_2$.

Beweis: Seien p und q die Projektionen $X \times_Y X \rightrightarrows X$ und $\Delta: X \to X \times_Y X$ die Diagonalabbildung von f.
(a) $\Longrightarrow$ (b): Angenommen, es gibt einen bB A von X mit Träger $x \in X$ und zwei verschiedene Zentren x_1, x_2 von A auf X mit $f(x_1) = f(x_2)$. Seien U, V, W offene affinoide Umgebungen von $x_1, x_2, f(x_1)$ auf X und Y mit $f(U) \subseteq W$ und $f(V) \subseteq W$. Nach (3.11.9) gibt es einen bB B von $\kappa(\Delta(x))$, so daß $p_v(B) = q_v(B) = A$ und B ein Zentrum z auf $U \times_W V$ hat. Aufgrund der Eindeutigkeit des Zentrums für affinoide Räume gilt $p(z) = x_1$ und $q(z) = x_2$. Deshalb ist $z \notin \Delta(X)$. Da z eine Spezialisierung von $\Delta(x)$ ist, ist $\Delta(X)$ nicht abgeschlossen. Widerspruch.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Wir zeigen, daß $\Delta(X)$ abgeschlossen in $X \times_Y X$ ist. Da Δ adisch und quasikompakt ist, genügt es zu zeigen, daß $\Delta(X)$ abgeschlossen gegenüber Spezialisierungen in $X \times_Y X$ ist. Seien x ein Punkt von $\Delta(X)$ und z eine Spezialisierung von x. Nach (3.11.10 ii) gibt es einen bB A von $\kappa(x)$, der z als Zentrum hat. Da $p(z)$ und $q(z)$ Zentren von $p_v(A) = q_v(A)$ auf X mit $f(p(z)) = f(q(z))$ sind, gilt $p(z) = q(z)$. Seien U und W offene affinoide Teilmengen von X und Y mit $p(z) \in U$ und $f(U) \subseteq W$. Es ist $z \in p^{-1}(U) \cap q^{-1}(U) = U \times_W U$. Da $p_v(A)$ ein Zentrum auf U hat und die Restriktion von p auf den Teilraum $\Delta(X) \cap (U \times_W U)$ von $X \times_Y X$ ein Isomorphismus auf U ist, hat A ein Zentrum y auf $\Delta(X) \cap (U \times_W U)$. Aufgrund der Eindeutigkeit von Zentren für affinoide Räume gilt $z = y \in \Delta(X)$.

Bemerkung 3.11.13. i) Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer Räume, x ein Punkt von X und (A, v_A) ein bB von $\kappa(x)$, so daß $f_v(A)$ ein Zentrum auf Y hat. Dann gilt $A = k(x)$.

Denn: Sei $y \in Y$ ein Zentrum von $f_v(A)$. Wir haben einen lokalen Ringhomomorphismus $\psi\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to A$. Seien U eine offene affinoide Umgebung von y in Y und s eine topologisch nilpotente Einheit von $\mathcal{O}_Y(U)$. Angenommen, es sei $A \neq k(x)$. Dann ist die Topologie von $k(x)$ die Bewertungstopologie von A (wegen $A^+ \subseteq k(x)^+$). Da $\psi(s_y)$ topologisch nilpotent in $k(x)$ ist, liegt $\psi(s_y)$ im maximalen Ideal von A und somit s_y im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{Y,y}$. Widerspruch.

ii) Für Morphismen analytischer Räume kann man das Bewertungskriterium für Separiertheit (3.11.12) auch folgendermaßen beschreiben: Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus analytischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist. f ist genau dann separiert, wenn f quasisepariert ist und es zu jedem kommutativen Diagramm analytischer Räume

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spa}(k,A) & \longrightarrow & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ \operatorname{Spa}(k,B) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

höchstens einen Morphismus analytischer Räume $\operatorname{Spa}(k,B) \longrightarrow X$ gibt, der das gesamte Diagramm kommutativ macht. Dabei gilt für die affinoiden Ringe (k,A) und (k,B): k ist ein topologischer Körper, dessen Topologie sich durch eine Rang 1 Bewertung definieren läßt, A und B sind Bewertungsringe von k mit $B \subseteq A \subseteq k^\circ$ und der Morphismus g wird durch die Identität $k \to k$ gegeben.

iii) Seien X ein adischer Raum, x ein Punkt von X und A ein bB von $\kappa(x)$. Wir versehen A mit der Teilraumtopologie von $\kappa(x)$. Dann ist (A, A^+) ein affinoider Ring. Die Prägarbe der adischen Funktionen auf $X := \operatorname{Spa}(A, A^+)$ ist eine Garbe topologischer Ringe. Also ist $X \in (VL)_{top}$, aber im allgemeinen ist X weder ein analytischer noch ein adischer Raum. Deshalb haben wir das Bewertungskriterium für Separiertheit nicht mit Hilfe von kommutativen Diagrammen in $(VL)_{top}$, sondern mit Hilfe von Zentren von bB formuliert.

Definition 3.11.14. Ein analytischer oder adischer Raum X heißt separiert, wenn X quasisepariert ist und jeder bB von X höchstens ein Zentrum auf X hat.

Affinoide Räume sind separiert und offene Teilräume separierter Räume sind separiert. Wir definieren nun separierte Morphismen analog zu quasikompakten Morphismen und quasiseparierten Morphismen.

Definition 3.11.15. Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ analytischer oder adischer Räume heißt separiert, wenn $f^{-1}(U)$ separiert ist für jede offene separierte Teilmenge U von Y.

Die folgende einfache Beobachtung und (3.11.12) zeigen, daß die beiden Definitionen (3.11.5) und (3.11.15) übereinstimmen, falls $f: X \to Y$ lokal von endlichem Typ ist.

Bemerkung 3.11.16. i) Für einen adischen Morphismus $f: X \to Y$ zwischen analytischen oder adischen Räumen sind äquivalent

a) f ist separiert.

b) f ist quasisepariert und sind x_1, x_2 zwei Zentren eines bB von X mit $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $x_1 = x_2$.

ii) Ist $f: X \to Y$ ein adischer Morphismus zwischen analytischen oder adischen Räumen und gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von Y, so daß $f^{-1}(U)$ separiert ist für jedes $U \in \mathfrak{U}$, so ist f separiert.

Seien $(X, \mathcal{O})$ ein formales Schema, x ein Punkt von X und A ein Bewertungsring des Residuenkörpers $k(x)$ von $\mathcal{O}_x$. Eine Spezialisierung $y \in X$ von x heißt Zentrum von A, wenn $\mathcal{O}_y$ unter der Abbildung $\varphi: \mathcal{O}_y \to k(x)$ nach A abgebildet wird und die Restriktion $\varphi: \mathcal{O}_y \to A$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist. (Ist $\mathcal{I}$ ein Definitionsideal von $(X, \mathcal{O})$, so bedeutet dies, daß y ein Zentrum von A auf dem Schema $(X, \mathcal{O}/\mathcal{I})$ im üblichen Sinne ist.)

Sei $X = (X, \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X)$ ein Objekt in der Kategorie $\mathcal{K}$. In (3.9) haben wir zu X einen adischen Raum $t(X)$ und einen Morphismus in $\bar{\mathcal{K}}$ $\pi = \pi_X: t(X) \to X$ definiert. Seien x ein Punkt von $t(X)$ und A ein bB von $\kappa(x)$. Zu A definieren wir eine Bewertung $\pi_v(A)$ von $\mathcal{O}_{X,\pi(x)}$ folgendermaßen: Sei φ die Komposition $\mathcal{A}_{X,\pi(x)} \to \mathcal{O}_{t(X),x} \to k(x)$. Da π ein Morphismus in $\bar{\mathcal{K}}$ ist, gilt $\varphi(\mathcal{O}_{X,\pi(x)}) \subseteq k(x)^+$ und ist die Restriktion $\psi: \mathcal{O}_{X,\pi(x)} \to k(x)^+$ von φ ein lokaler Ringhomomorphismus. Durch Auszeichnung des Bewertungsrings $A^+ \subseteq k(x)^+$ wird $k(x)^+$ zu einem bewerteten Bewertungsring. $\pi_v(A)$ ist definiert als die Bewertung von $\mathcal{O}_{X,\pi(x)}$ mit Träger im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,\pi(x)}$, so daß ψ zu einem lokalen Ringhomomorphismus bewerteter lokaler Ringe wird.

Bemerkung 3.11.17. i) Ist B ein weiterer bB von $\kappa(x)$ mit $A^+ = B^+$, so gilt $\pi_v(A) = \pi_v(B)$.

ii) Zu jeder Bewertung w von $\mathcal{O}_{X,\pi(x)}$ mit Träger im maximalen Ideal von $\mathcal{O}_{X,\pi(x)}$ gibt es einen bB (A, v_A) von $\kappa(x)$ mit $\pi_v(A) = w$ und $A = k(x)$.

iii) Ist X affin, so sind äquivalent

a) Unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}_{t(X)}(t(X)) \to k(x)$ wird $\mathcal{O}^+_{t(X)}(t(X))$ nach A^+ abgebildet.

b) $\pi_v(A)$ hat ein Zentrum auf dem formalen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$.

Lemma 3.11.18. Seien X ein Objekt von $\mathcal{K}$, $A = (A, v_A)$ ein bB von $t(X)$ und x der Träger von A. Dann gilt

i) Ist y ein Zentrum von A auf $t(X)$, so ist $\pi(y)$ ein Zentrum von $\pi_v(A)$ auf dem formalen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$.

ii) Nach (i) gibt π eine Abbildung von der Menge der Zentren von A auf $t(X)$ in die Menge der Zentren von $\pi_v(A)$ auf $(X, \mathcal{O}_X)$. Diese Abbildung ist injektiv.

iii) Gilt $A = k(x)$, so ist die Abbildung aus (ii) surjektiv.

iv) Seien Y ein weiteres Objekt von $\mathcal{K}$, $f: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ und $g: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ der durch f induzierte Morphismus formaler Schemata. Dann gilt $g_v((\pi_X)_v(A)) = (\pi_Y)_v(t(f)_v(A))$.

Beweis: i) Sei y ein Zentrum von A auf $t(X)$. Wir betrachen das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}^+_{t(X),y} & \xleftarrow{\alpha} & \mathcal{O}_{X,\pi(y)} \\
\beta \downarrow & & \downarrow \lambda \\
\mathcal{O}^+_{t(X),x} & \xleftarrow[\mu]{} & \mathcal{O}_{X,\pi(x)} \\
\gamma \downarrow & & \\
k(x)^+ & & \\
\cup & & \\
A^+ & &
\end{array}$$

Wir verwenden (1.5.2). Da y ein Zentrum von A ist, ist $(\gamma \circ \beta)(\mathcal{O}^+_{t(X),y}) \subseteq A^+$ und die Restriktion $\gamma \circ \beta: \mathcal{O}^+_{t(X),y} \to A^+$ lokal. Da α lokal ist, erhalten wir

(1) Es ist $(\gamma \circ \beta \circ \alpha)(\mathcal{O}_{X,\pi(y)}) \subseteq A^+$, und der Ringhomomorphismus

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha: \mathcal{O}_{X,\pi(y)} \longrightarrow A^+ \quad \text{ist lokal.}$$

Sei $B := \{a \in \mathcal{O}_{X,\pi(x)} \mid \pi_v(A)(a) \geq 0\}$ und seien $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ die maximalen Ideale von B und A^+. Nach Konstruktion von $\pi_v(A)$ gilt

(2) $B = (\gamma \circ \mu)^{-1}(A^+)$ und $\mathfrak{n} = (\gamma \circ \mu)^{-1}(\mathfrak{m})$.

Aus (1) und (2) folgt, daß $\lambda(\mathcal{O}_{X,\pi(y)}) \subseteq B$ und der Ringhomomorphismus $\lambda: \mathcal{O}_{X,\pi(y)} \to B$ lokal ist. Dies bedeutet gerade, daß y ein Zentrum von $\pi_v(A)$ auf dem formalen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ ist.

ii) Seien y_1, y_2 zwei Zentren von A auf $t(X)$ mit $\pi(y_1) = \pi(y_2)$. Sei U eine offene

affine Umgebung von $\pi(y_1)$ in X. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ eine offene affinoide Teilmenge von $t(X)$, die x, y_1, y_2 enthält. Nach (3.11.9) gilt $y_1 = y_2$.
iii) Sei z ein Zentrum von $\pi_v(A)$ auf $(X, \mathcal{O}_X)$. Wir wählen eine offene affine Umgebung U von z auf X. Dann ist $V := \pi^{-1}(U)$ affinoid mit $x \in V$. Sei $\varphi: \mathcal{O}_{t(X)}(V) \to k(x)$ die kanonische Abbildung. Nach (3.11.17 iii) gilt $\varphi(\mathcal{O}^+_{t(X)}(V)) \subseteq A^+$. Wegen $A = k(x)$ folgt aus (3.11.9), daß A ein Zentrum y auf V hat. Nach (i) ist $\pi(y)$ ein Zentrum von $\pi_v(A)$ auf $(X, \mathcal{O}_X)$. Da U affin und $\pi(y), z \in U$, gilt $z = \pi(y)$.
iv) Nachrechnen, ähnlich wie im Beweis von (i).

Korollar 3.11.19. Sei X ein Objekt von $\mathcal{K}$. Dann gilt
i) Sei x ein Punkt von $t(X)$. Unter der Abbildung $\pi: t(X) \to X$ wird die Menge der Sekundärspezialisierungen von x in $t(X)$ surjektiv abgebildet auf die Menge der Spezialisierungen von $\pi(x)$ in X.
ii) Die Abbildung $\pi: t(X) \to X$ ist abgeschlossen. (Da π surjektiv ist ((3.9.16)), ist π identifizierend.)

Beweis: i) folgt aus (3.11.10 i), (3.11.17 ii) und (3.11.18 iii).
ii) Ohne Einschränkung ist X affin. Für jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ gilt $\pi^{-1}(\mathcal{D}(f)) = R(\frac{1}{f})$. Deshalb ist π spektral. Aus (i) folgt, daß π abgeschlossen ist.

Proposition 3.11.20. i) Sei X ein Objekt von $\mathcal{K}$. Der adische Raum $t(X)$ ist genau dann separiert, wenn das formale Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ separiert ist.
ii) Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß der zugehörige Morphismus formaler Schemata $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ adisch ist. Der Morphismus adischer Räume $t(f): t(X) \to t(Y)$ ist genau dann separiert, wenn der Morphismus formaler Schemata $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ separiert ist.

Beweis: i) X und $t(X)$ sind quasisepariert. Aus (3.9.16), (3.11.17 ii) und (3.11.18 iii) folgt, daß $(X, \mathcal{O}_X)$ separiert ist, wenn $t(X)$ separiert ist. Aus (3.11.18 ii) folgt, daß $t(X)$ separiert ist, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ separiert ist.
ii) Der Morphismus $t(f)$ ist adisch. Deshalb ist ohne Einschränkung Y affin. Die Behauptung folgt dann aus (i).

Proposition 3.11.21. Sei k ein vollständiger topologischer Körper, dessen Topologie sich durch eine Rang 1 Bewertung definieren läßt. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer k-Varietäten. Wir betrachten den Morphismus analytischer Räume $r(f): r(X) \to r(Y)$. Es gilt
i) f ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn $r(f)$ eine abgeschlossene

Einbettung ist.
ii) f ist genau dann separiert, wenn $r(f)$ separiert ist.

Beweis: i) Sei U eine zulässige offene affinoide Teilmenge von Y. Dann ist $t(U)$ eine offene affinoide Teilmenge von $r(Y)$. Nach (3.4.15) gilt $t(f^{-1}(U)) = r(f)^{-1}(t(U))$. Weiterhin gilt $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{r(X)}(t(U))$ und $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{r(Y)}(t(f^{-1}(U))$.
Sei f eine abgeschlossene Einbettung. Dann ist $f^{-1}(U)$ affinoid und damit auch $t(f^{-1}(U))$. Der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ ist eine Quotientenabbildung. Nach [BGR], 6.3.4 Prop. 1 ist $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))^\circ$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_X(U)^\circ$ in $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$. Deshalb ist $r(f)$ eine abgeschlossene Einbettung.
Sei nun $r(f)$ eine abgeschlossene Einbettung. Dann ist $r(f)^{-1}(t(U))$ affinoid. Nach (3.4.21) ist $f^{-1}(U)$ affinoid. Da $\mathcal{O}_{r(X)}(t(U)) \to \mathcal{O}_{r(Y)}(r(f)^{-1}(t(U)))$ eine Quotientenabbildung ist, ist f eine abgeschlossene Einbettung.
ii) Da der Funktor r mit Faserprodukten vertauscht, folgt (ii) aus (i).

Bemerkung 3.11.22. Seien Y ein Schema, S ein analytischer oder adischer Raum und $g: \underline{S} \to Y$ ein Morphismus lokal geringter Räume. Seien U, V Schemata lokal von endlichem Typ über Y und $h: U \to V$ ein Y-Morphismus. Wir betrachten den Morphismus $h_{(S)}: U \times_Y S \to V \times_Y S$. Es gilt:
i) Ist h eine abgeschlossene Einbettung, so ist auch $h_{(S)}$ eine abgeschlossene Einbettung.
ii) Aus (i) folgt: Ist h separiert, so ist auch $h_{(S)}$ separiert.
iii) Ist h nicht separiert, so ist, selbst wenn h quasisepariert ist, $h_{(S)}$ im allgemeinen nicht quasisepariert.

Proposition 3.11.23. Seien $f: X \to Y$ ein separierter Morphismus zwischen analytischen oder adischen Räumen und x ein Punkt von X, so daß $k(f(x))$ dicht in $k(x)$ liegt. Seien u und v zwei Sekundärspezialisierungen von x in X mit $f(u) = f(v)$. Dann gilt $u = v$.

Beweis: Seien A und B zwei bB von $\kappa(x)$, die u und v als Zentren haben. Nach (3.11.10 iii) gilt $f_v(A) = f_v(B)$. Da $k(f(x))$ dicht in $k(x)$ liegt, folgt $A = B$. Sei W eine offene affinoide Umgebung von $f(u)$ in Y. Die Punkte x, u, v liegen in $f^{-1}(W)$. Da $f^{-1}(W)$ separiert ist, erhalten wir $u = v$.

Proposition 3.11.24. i) Für jeden Punkt x eines separierten adischen Raums X ist die Menge der Primärspezialisierungen von x eine Kette.
ii) Sei $f: X \to Y$ ein separierter Morphismus adischer Räume. Ist für jeden Punkt

von Y die Menge der Primärspezialisierungen eine Kette, so ist auch für jeden Punkt von X die Menge der Primärspezialisierungen eine Kette.

Beweis: i) Seien y_1, y_2 zwei Primärspezialisierungen von x. Nach (3.11.10) gibt es bB $(A_1, k(x)^+)$ und $(A_2, k(x)^+)$ von $\kappa(x)$, die y_1 und y_2 als Zentren haben. Es ist $A_1 \subseteq A_2$ oder $A_2 \subseteq A_1$. Sei etwa $A_1 \subseteq A_2$. Sei U eine offene affinoide Umgebung von y_1. Nach (3.11.9) hat $(A_2, k(x)^+)$ ein Zentrum z auf U. Da X separiert ist, ist $z = y_2$. Wir haben also $x, y_1, y_2 \in U$. Da (3.11.24 i) für affinoide Räume X gilt, ist (3.11.24 i) bewiesen.
ii) Seien x_1 und x_2 Primärspezialisierungen eines Punktes x von X. Dann sind $f(x_1)$ und $f(x_2)$ Primärspezialisierungen von $f(x)$. Nach Voraussetzung ist $f(x_1)$ eine Spezialisierung von $f(x_2)$ oder $f(x_2)$ eine Spezialisierung von $f(x_1)$. Sei etwa $f(x_2)$ eine Spezialisierung von $f(x_1)$. Sei U eine offene affinoide Umgebung von $f(x_2)$. Dann liegen x_1 und x_2 in $f^{-1}(U)$ und nach (i) ist x_1 eine Primärspezialisierung von x_2 oder x_2 eine Primärspezialisierung von x_1.

Beispiel 3.11.25. i) Sei X ein quasisepariertes Schema. Genau dann ist für jeden Punkt x des adischen Raumes $X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spa}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ die Menge der Primärspezialisierungen von x eine Kette, wenn X separiert ist.
ii) Sei X ein Objekt von $\mathcal{K}$. Die Menge der Primärspezialisierungen eines jeden Punktes eines affinoiden adischen Raums ist eine Kette. Deshalb folgt aus (3.9.21 i), daß für jeden Punkt x von $t(X)$ die Menge der Primärspezialisierungen von x eine Kette ist.
Ist also das formale Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ nicht separiert, so ist $t(X)$ ein adischer Raum, der nicht separiert ist, für den aber die Menge die Primärspezialisierungen eines jeden Punktes eine Kette ist.

Proposition 3.11.26. Für einen quasikompakten quasiseparierten adischen Raum X sind äquivalent
a) Zu jedem Tripel (x, u, v) von Punkten von X, wobei u eine Primärspezialisierung von x und v eine beliebige Spezialisierung von x ist, gibt es eine offene affionide Teilmenge von X, die alle drei Punkte x, u, v enthält.
b) Für jedes Tripel (x, u, v) von Punkten von X, wobei u eine Primärspezialisierung von x und v eine Primärspezialisierung oder Sekundärspezialisierung von x ist, gibt es eine offene affinoide Teilmenge von X, die alle drei Punkte x, u, v enthält.
c) Für jeden Punkt x von X ist die Menge der Primärspezialisierungen von x eine

Kette und für jedes Tripel (x, u, v) von Punkten von X, so daß u eine Primärspezialisierung von x und v eine Sekundärspezialisierung von x ist, gibt es einen Punkt y von X, so daß u eine Sekundärgeneralisierung von y und v eine Primärgeneralisierung von y ist.
d) Jeder Punkt von X, der keine echte Primärspezialisierung hat, hat ein Fundamentalsystem von offenen affinoiden Umgebungen, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen sind.
e) Jeder abgeschlossene Punkt von X hat ein Fundamentalsystem von Umgebungen, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen sind.
f) Jeder Punkt von X hat eine offene affinoide Umgebung, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen ist.

Beweis: (b) $\Longrightarrow$ (c): folgt aus (1.1.12) und (1.1.15 i).
(c) $\Longrightarrow$ (d): Aus dem nachfolgenden Lemma (3.11.29) folgt, daß es eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, so daß $(X, \mathcal{T})$ ein spektraler Raum ist, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie X hat und dessen Spezialisierungen die Primärspezialisierungen von X sind (vgl. Beweis von (1.4.6)). Aus (3.6.3 i und ii) und den Überlegungen aus dem Beweis von (1.4.7) folgt (c).
(e) $\Longrightarrow$ (f): Sei ein Punkt x von X gegeben. Sei z ein abgeschlossener Punkt von X, der eine Spezialisierung von x ist. Indem wir (3.6.3 i und ii) auf eine offene affinoide Umgebung von z anwenden und die Voraussetzung (e) benutzen, erhalten wir, daß z eine offene affinoide Umgebung U besitzt, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen ist. Es ist $x \in U$.
(f) $\Longrightarrow$ (a): Sei (x, u, v) ein Tripel wie in (a). Nach Voraussetzung gibt es eine offene affinoide Umgebung H von v, die abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen ist. Dann gilt $\{x, u, v\} \subseteq H$.

Beispiel 3.11.27. i) Für einen affinoiden adischen Raum gelten die äquivalenten Bedingungen aus (3.11.26), aber schon für offene quasikompakte Teilräume von affinoiden adischen Räumen gelten sie im allgemeinen nicht.
ii) Ist X ein Objekt der Kategorie $\mathcal{K}$, so erfüllt der adische Raum $t(X)$ die Bedingung (3.11.26 f).
iii) Im nächsten Paragraphen werden wir eigentliche Morphismen adischer Räume studieren. Aber schon hier notieren wir die folgende Beobachtung: Sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume. Hat Y die Eigenschaft (3.11.26 a), so auch X.

Beweis: ii) Ist U eine offene affine Teilmenge von X, so ist $\pi_X^{-1}(U)$ affinoid und abgeschlossen gegenüber Primärspezialisierungen (nach (3.9.21)).
iii) Sei (x,u,v) ein Tripel wie in (3.11.26 a). Nach (3.11.10) gibt es bB A und B von $\kappa(x)$, die u und v als Zentrum haben und so daß $A^+ = k(x)^+$. Dann gilt $B^+ \subseteq A$ und $B^+ \subseteq B$ und deshalb ist $C := (A \cap B, B^+)$ ein bB von $\kappa(x)$. Sei U eine offene affinoide Teilmenge von Y mit $\{f(x), f(u), f(v)\} \subseteq U$. Dann haben $f_v(A)$ und $f_v(B)$ ein Zentrum auf U. Aus (3.11.9) folgt, daß auch $f_v(C)$ ein Zentrum z auf U hat. Nach (3.12.2) hat C ein Zentrum y auf X mit $z = f(y)$. Sei V eine offene affinoide Umgebung von y in $f^{-1}(U)$. Nach (3.11.9) haben A und B ein Zentrum u' und v' auf V. Da $f^{-1}(U)$ separiert ist, gilt $u = u'$ und $v = v'$. Wir haben also $\{x,u,v\} \subseteq V$.

Bemerkung 3.11.28. Sei X ein quasikompakter quasiseparierter adischer Raum, der die Bedingungen aus (3.11.26) erfüllt. Sei S die Menge aller Punkte von X, die keine echte Primärspezialisierung haben. Dann gilt nach (1.3.1)
a) Jeder Punkt x von X hat genau eine Primärspezialisierung y, die in S liegt. Durch $x \mapsto y$ erhält man eine Retraktion $r: X \to S$.
b) Versieht man S mit der Teilraumtopologie von X, so sind S ein spektraler Raum und r eine spektrale Abbildung.

Lemma 3.11.29. Sei X ein affinoider adischer Raum. Es gibt genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß $(X,\mathcal{T})$ ein spektraler Raum ist, der dieselben konstruierbaren Mengen wie X hat und dessen Spezialisierungen die Primärspezialiserungen von X sind.

Beweis: Sei $X = \operatorname{Spa} A, A$ ein affinoider Ring. Es gilt

(1) Seien $a, b \in \tilde{A}$ und $w \in X$ gegeben mit $w(a) > w(b)$. Dann gibt es ein Element s von $\tilde{A}$ und eine endliche Teilmenge L von $\tilde{A}$, so daß $L \cdot \tilde{A}$ offen ist und $w \in \{v \in X \mid v(l) > v(s) \text{ für jedes } l \in L\} \subseteq \{v \in X \mid v(a) > v(b)\}$.

Denn: Sei H eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}^{\circ\circ}$, so daß $H \cdot \tilde{A}$ offen ist. Für jedes $h \in H$ ist $w(h)$ kofinal in $(\Gamma_w)_\infty$, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $w(h) > w(b)$ für jedes $h \in H^n$. Für $L := H^n \cup \{a\}$ und $s := b$ gilt (1).

Sei $\mathcal{T}$ die Topologie von X, die von den Mengen $\{v \in X \mid v(l) \geq v(s) \neq \infty$ für jedes $l \in L\}$ und $\{v \in X \mid v(l) > v(s)$ für jedes $l \in L\}$ erzeugt wird, wobei s ein Element von $\tilde{A}$ und L eine endliche Teilmenge von $\tilde{A}$ ist, so daß $L \cdot \tilde{A}$ offen ist. Nach (1.1.8) und (3.4.10) ist $(X,\mathcal{T})$ ein spektraler Raum, der dieselben konstruierbaren Teilmengen wie X hat. Aus (1) und (1.3.3) folgt, daß die Spezialisierungen von $(X,\mathcal{T})$ die Primärspezialisierungen von X sind.

3.12. Eigentliche Morphismen adischer Räume

Definition 3.12.1. Ein Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ heißt eigentlich, wenn er von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist. Dabei bedeutet universell abgeschlossen, daß für jeden adischen Morphismus adischer Räume $S \to Y$ die Projektion $f_{(S)}: X \times_Y S \to S$ abgeschlossen ist.

Proposition 3.12.2. Für einen Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ sind äquivalent
a) f ist eigentlich.
b)f ist von endlichem Typ und quasisepariert und sind A ein bB von X und y ein Zentrum von $f_v(A)$ auf Y, so gibt es genau ein Zentrum x von A auf X mit $y = f(x)$.

Bemerkung. Da wir einem bB im allgemeinen keinen adischen Raum zuordnen können, können wir das Bewertungskriterium für Eigentlichkeit (3.12.2) nicht entsprechend wie in der algebraischen Geometrie formulieren. Auch der Beweis ist in unserer Situation aufwendiger als in der algebraischen Geometrie. Wir müssen nämlich die zu [EGA], II. 5.6.3. analoge Aussage gleich mitbeweisen (siehe Korollar (3.12.3)).

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Ohne Einschränkung ist Y affinoid. Seien x ein Punkt von X und $A = (A, v_A)$ ein bB von $\kappa(x)$, so daß $f_v(A)$ ein Zentrum auf Y hat. Nach (3.11.12) und der Eindeutigkeitsaussage von (3.11.9) ist zu zeigen, daß A ein Zentrum auf X hat. Angenommen, A hat kein Zentrum auf X. Wir führen dies zu einem Widerspruch.
Seien $\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine offene affinoide Überdeckung von X. Ohne Einschränkung ist $x \in X_1, \ldots, X_m$ und $x \notin X_{m+1}, \ldots, X_n$. Wir versehen A mit der Teilraumtopologie von $k(x)$. Mit $\_$ deuten wir an, daß wir einen Ring mit der diskreten Topologie versehen. Seien $\bar{Y}$ der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{O}_Y(Y)_-, \mathcal{O}_Y^+(Y)), \bar{X}_i$ der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{O}_X(X_i)_-, \mathcal{O}_X^+(X_i))(i = 1, \ldots, n)$ und S der adische Raum zu dem affinoiden Ring $(\underline{A}, A^+)$. Der Morphismus f induziert einen Ringhomomorphismus $\varphi: (\mathcal{O}_Y(Y)_-, \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\mathcal{O}_X(X_i)_-, \mathcal{O}_X^+(X_i))$. Da $f_v(A)$ ein Zentrum auf Y hat, haben wir nach (3.11.9) einen Ringhomomorphismus $\psi: (\mathcal{O}_Y(Y)_-, \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\underline{A}, A^+)$. Sei

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} R_i & \longrightarrow & \bar{X}_i \\ g_i \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \bar{Y} \end{array}$$

das kartesische Diagramm zu Spa(φ) und Spa(ψ) in der Kategorie der adischen Räume. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei $r_i \in R_i$ das Bild des abgeschlossenen Punktes von Spa$\,\kappa(x)$ unter dem Morphismus Spa$\,\kappa(x) \to R_i$, der durch die kanonischen Ringhomomorphismen $(\mathcal{O}_X(X_i)_-, \mathcal{O}_X^+(X_i)) \to \kappa(x)$ und $(\underline{A}, A^+) \to \kappa(x)$ induziert wird. Der Bewertungsring $k(x)^+$ von $k(x) = \mathrm{Quot}(\underline{A})$ definiert einen Punkt r von S, ebenso gibt die Bewertung v_A von $\underline{A}$ einen Punkt s von S. Wir haben $r \succ s$ und $r = g_i(r_i)$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

(1) Es gibt keine Spezialisierung s_i von r_i auf R_i mit $s = g_i(s_i)$.

Denn: Angenommen, es gibt solch eine Spezialisierung s_i. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X(X_i)_- \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{O}_X^+(X_i) \arrow[d] \\
k(r_i) & \mathcal{O}_{R_i,s_i} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_{R_i,s_i}^+ \\
k(r) \arrow[u, "\gamma"] & \mathcal{O}_{S,s} \arrow[l, "\delta"] \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_{S,s}^+ \arrow[u, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Man kann kanonisch identifizieren: $k(r) = k(x), k(r_i) = k(x), \gamma =$ Identität von $k(x), \mathcal{O}_{S,s} = A, \mathcal{O}_{S,s}^+ = A^+, \delta =$ Inklusion von A nach $k(x)$.
Da die Bilder A und A^+ von $\mathcal{O}_{S,s}$ und $\mathcal{O}_{S,s}^+$ in $k(r_i)$ Bewertungsringe von $k(r_i)$ sind und da die Ringhomomorphismen α und λ lokal sind, erhalten wir $\beta(\mathcal{O}_{R_i,s_i}) = A$ und $\beta(\mathcal{O}_{R_i,s_i}^+) = A^+$. Für den kanonischen Ringhomomorphismus $\mu: \mathcal{O}_X(X_i) \to k(x)$ gilt dann $\mu(\mathcal{O}_X(X_i)) \subseteq A$ und $\mu(\mathcal{O}_X^+(X_i)) \subseteq A^+$. Nach (3.11.9) hat A ein Zentrum auf X_i. Widerspruch. Damit ist (1) gezeigt.

(2) Zu jedem $i \in \{1, \ldots, m\}$ gibt es Ringe $\tilde{D}_i$ und D_i^+, für die gilt

a) $\psi(\mathcal{O}_Y(Y)) \subseteq \tilde{D}_i \subseteq A$, $\psi(\mathcal{O}_Y^+(Y)) \subseteq D_i^+ \subseteq A^+, D_i^+ \subseteq \tilde{D}_i$.

b) $\tilde{D}_i$ ist endlich erzeugt über $\mathcal{O}_Y(Y)$ und D_i^+ ist endlich erzeugt über $\mathcal{O}_Y^+(Y)$.

c) Wir zerlegen das kartesische Diagramm $(*)$ in zwei kartesische Diagramme in der Kategorie der adischen Räume

$$(**)\qquad \begin{tikzcd}
R_i \arrow[r, "\beta_{D_i}"] \arrow[d, "g_i"'] & R_{D_i} \arrow[r] \arrow[d, "g_{D_i}"] & \bar{X}_i \arrow[d] \\
S \arrow[r, "\alpha_{D_i}"'] & S_{D_i} \arrow[r] & \bar{Y},
\end{tikzcd}$$

wobei S_{D_i} der adische Raum zu dem diskreten affinoiden Ring $(\tilde{D}_i, (D_i^+)^c)$ ist. Dann gilt: Es gibt keine Spezialisierung z von $\beta_{D_i}(r_i)$ in R_{D_i} mit $\alpha_{D_i}(s) = g_{D_i}(z)$.

Denn: Sei ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ fixiert. Sei M die Menge aller Paare von Ringen $D = (\tilde{D}, D^+)$, die (a) und (b) erfüllen. Für $D, E \in M$ setzen wir $D \geq E$, wenn $\tilde{D} \supseteq \tilde{E}$ und $D^+ \supseteq E^+$. Für jedes $D \in M$ haben ein zu (**) entsprechendes kommutatives Diagramm mit einem adischen Raum $R_D = \bar{X}_i \times_{\bar{Y}} \operatorname{Spa} D$ und Morphismen $g_D \colon R_D \to \operatorname{Spa} D, \alpha_D \colon S \to \operatorname{Spa} D$ und $\beta_D \colon R_i \to R_D$. Für jedes Paar D, E von Elementen von M mit $E \geq D$ haben wir kanonische Morphismen $\alpha_{DE} \colon \operatorname{Spa} E \to \operatorname{Spa} D$ und $\beta_{DE} \colon R_E \to R_D$. Der Raum S zusammen mit den Morphismen α_D ist der projektive Limes des projektiven Systems $(\operatorname{Spa} D, \alpha_{DE} \mid D, E \in M)$, ebenso ist R_i zusammen mit den Morphismen β_D der projektive Limes des projektiven Systems $(R_D, \beta_{DE} \mid D, E \in M)$. Deshalb ist $g_i^{-1}(s) = \varprojlim g_D^{-1}(\alpha_D(s))$ und $\overline{\{r_i\}} = \varprojlim \overline{\{\beta_D(r_i)\}}$. Mit (1) erhalten wir

$$\emptyset = g_i^{-1}(s) \cap \overline{\{r_i\}} = \varprojlim (g_D^{-1}(\alpha_D(s)) \cap \overline{\{\beta_D(r_i)\}})$$

Da $g_D^{-1}(\alpha_D(s)) \cap \overline{\{\beta_D(r_i)\}}$ prokonstruierbar in R_D ist und die Morphismen β_{DE} spektral sind, gibt es ein $D \in M$ mit $g_D^{-1}(\alpha_D(s)) \cap \overline{\{\beta_D(r_i)\}} = \emptyset$. Damit ist (2) gezeigt.

Wir wählen ein Element $(\tilde{D}, H)$ von M, so daß $(\tilde{D}, H) \geq (\tilde{D}_i, D_i^+) := D_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Seien E und F endliche Erzeugendensysteme von $\tilde{D}$ und H über $\mathcal{O}_Y(Y)$ und $\mathcal{O}_Y^+(Y)$. Wir betrachten den adischen Ringhomomorphismus affinoider Ringe $\psi \colon (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (A, A^+)$. Seien C ein Definitionsring von $\mathcal{O}_Y(Y)$ mit $C \subseteq \mathcal{O}_Y^+(Y)$ und I eine endliche Teilmenge von C, so daß $I \cdot C$ ein Definitionsideal von C ist. Wir wählen ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $I^k \cdot E \subseteq A^+$. Den Ring $\tilde{D}$ versehen wir mit der Gruppentopologie, so daß $\{I^n \cdot C[F \cup I^k \cdot E] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist. Dadurch wird $\tilde{D}$ zu einem f-adischen Ring. Wir setzen $D^+ := H[I^k \cdot E]^c \subseteq \tilde{D}$. Dann ist

$$D := (\tilde{D}, D^+)$$

ein affinoider Ring. (Denn: Da $C[F \cup I^k \cdot E] \subseteq D^+$, ist D^+ offen. Der Ringhomomorphismus $\psi \colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \tilde{D}$ ist adisch. Deshalb ist $\psi(\mathcal{O}_Y(Y)^\circ) \subseteq \tilde{D}^\circ$, insbesondere $\psi(\mathcal{O}_Y^+(Y)) \subseteq \tilde{D}^\circ$. Da $F \cup I^k \cdot E \subseteq C[F \cup I^k \cdot E] \subseteq \tilde{D}^\circ$, erhalten wir $H[I^k \cdot E] = \mathcal{O}_Y^+(Y)[F][I^k \cdot E] \subseteq \tilde{D}^\circ$.) Sei

$$\sigma: (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to D$$

der durch ψ induzierte adische Ringhomomorphismus affinoider Ringe. Die Vervollständigung $\hat{\sigma}: (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to \hat{D}$ ist topologisch von endlichem Typ (siehe Seite 73).
Der f-adische Ring $\tilde{D}$ hat einen noetherschen Definitionsring (denn für jeden Definitionsring B von $\mathcal{O}_Y(Y)$ ist $B[F \cup I^k \cdot E]$ ein Definitionsring von $\tilde{D}$). Deshalb haben wir einen adischen Raum V zu dem affinoiden Ring D. Sei

$$(***) \qquad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{l} & X \\ h\downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

das kartesische Diagramm in der Kategorie $(VL)_{top}$ zu den Morphismen f und Spa (σ). Der Bewertungsring $k(x)^+$ von $k(x) = \mathrm{Quot}\,(A)$ und die Bewertung v_A von A definieren zwei Punkte p und q von Spa (A, A^+). Seien $y \in V$ und $z \in V$ die Bilder von p und q unter der Abbildung Spa $(A, A^+) \to V$, die durch die stetige Inklusion $D \hookrightarrow (A, A^+)$ induziert wird. Sei $\tau_1: \mathrm{Spa}\,\kappa(x) \to X$ der kanonische Morphismus in $(VL)_{top}$. Die stetige Inklusion $D \hookrightarrow \kappa(x)$ definiert einen Morphismus in $(VL)_{top}\, \tau_2: \mathrm{Spa}\,\kappa(x) \to V$. Die beiden Morphismen τ_1 und τ_2 induzieren einen Morphismus $\tau: \mathrm{Spa}\,\kappa(x) \to U$. Sie $u \in U$ das Bild des abgeschlossenen Punktes von Spa $\kappa(x)$ unter τ. Es gilt

(3) Es gibt keine Spezialisierung v von u in U mit $h(v) = z$.

Da $h(u) = y$ und z eine Spezialisierung von y ist, ist (3) ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß f universell abgeschlossen ist. Damit ist die Richtung (a) $\Longrightarrow$ (b) aus (3.12.2) gezeigt.
Begründung von (3): Angenommen, es gibt eine Spezialisierung v von u mit $h(v) = z$. Sei i ein Element von $\{1, \ldots, n\}$ mit $l(v) \in X_i$. Da $l(u) = x$, ist $x \in X_i$ und somit $i \in \{1, \ldots, m\}$. Da $(\tilde{D}, H) \geq D_i$, haben wir eine stetige Inklusion $D_i \subseteq D$ (D_i trägt die diskrete Topologie) und somit einen Morphismus adischer Räume $d: V \to S_{D_i}$. Aus $(**)$ und $(***)$ erhalten wir das folgende kommutative Diagramm adischer Räume

$$\begin{tikzcd}
 & X_i \arrow[rr] \arrow[dd] & & \bar{X}_i \arrow[dd] \\
l^{-1}(X_i) \arrow[ur] \arrow[dd, "h"'] & & R_{D_i} \arrow[ur] \arrow[dd, "g_{D_i}"] & \\
 & Y \arrow[rr] & & \bar{Y} \\
V \arrow[ur] \arrow[rr, "d"'] & & S_{D_i} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Da $R_{D_i} = \bar{X}_i \times_{\bar{Y}} S_{D_i}$, gibt es einen Morphismus $t: l^{-1}(X_i) \to R_{D_i}$, der das obige Diagramm kommutativ ergänzt. Es ist $d(z) = \alpha_{D_i}(s)$ und $t(u) = \beta_{D_i}(r_i)$. Deshalb ist $t(v)$ eine Spezialisierung von $\beta_{D_i}(r_i)$ mit $\alpha_{D_i}(s) = g_{D_i}(t(v))$, im Widerspruch zu (2 c).

(b) $\Longrightarrow$ (a): Nach (3.11.12) ist f separiert. Seien S ein adischer Raum, $g: S \to Y$ ein adischer Morphismus und

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{p} & X \\ q\downarrow & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

das Faserprodukt zu f und g. Sei T eine abgeschlossene Teilmenge von R. Zu zeigen ist, daß $q(T)$ abgeschlossen in S ist. Da q adisch und quasikompakt ist, genügt es zu zeigen, daß $q(T)$ abgeschlossen gegenüber Spezialisierungen ist. Seien t ein Element von T und s eine Spezialisierung von $q(t)$ in S. Nach (3.11.10 ii) gibt es einen bB A von $\kappa(q(t))$, der s als Zentrum hat. Wir wählen ein bB B von $\kappa(t)$ mit $q_v(B) = A$. Der bB $f_v(p_v(B))$ von Y hat das Zentrum $g(s)$. Nach Voraussetzung hat dann $p_v(B)$ ein Zentrum r auf X mit $f(r) = g(s)$. Seien U, V, W offene affinoide Umgebungen von $r, s, g(s)$ in X, S, Y mit $f(U) \subseteq W$ und $g(V) \subseteq W$. Da $p(t) \in U$ und $q(t) \in V$, ist $t \in U \times_W V \subseteq X \times_Y S$. Nach (3.11.9) hat B ein Zentrum z auf $U \times_W V$. Es ist $q(z)$ ein Zentrum von $q_v(B) = A$ auf V. Aus (3.11.9) folgt $s = q(z)$. Da T abgeschlossen und $t \in T$ ist, ist $z \in T$.

Aus dem Beweis von (3.12.2) ergibt sich

Korollar 3.12.3. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus adischer Räume, der von endlichem Typ und separiert ist. Ist für jeden Morphismus adischer Räume $S \to Y$, der von endlichem Typ ist, die Projektion $f_{(S)}: X \times_Y S \to S$ abgeschlossen, so ist f eigentlich.

Korollar 3.12.4. Seien $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume und x ein Punkt von X. Zu jeder Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) y von $f(x)$ in Y gibt es eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) z von x in X mit $y = f(z)$.

Beweis: Sei eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) y von $f(x)$ gegeben. Nach (3.11.10 ii) gibt es einen bB A von $\kappa(f(x))$, der y als Zentrum hat und so daß $A^+ = \kappa(f(x))^+$ (bzw. $A = \kappa(f(x))$). Wir wählen einen bB B von $\kappa(x)$ mit $f_v(B) = A$ und $B^+ = \kappa(x)$ (bzw. $B = \kappa(x)$). Nach (3.12.2) hat B ein Zentrum z mit $f(z) = y$. Nach (3.11.10 i) ist z eine Primärspezialisierung (bzw. Sekundärspezialisierung) von x.

Proposition 3.12.5. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$, so daß der zugehörige Morphismus formaler Schemata $g: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von endlichem Typ ist und $\mathcal{A}_Y$ als $\mathcal{O}_Y$-Algebra von endlichem Typ ist. Dann sind äquivalent

a) Der Morphismus adischer Räume $t(f): t(X) \to t(Y)$ ist eigentlich.

b) Der Morphismus formaler Schemata $g: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist eigentlich und $\mathcal{A}_X$ ist als $\mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Typ.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Wir zeigen, daß g eigentlich ist. Ohne Einschränkung ist Y affin. Nach (3.11.20 ii) ist g separiert. Sei B ein Bewertungsring von $(X, \mathcal{O}_X)$, so daß $g_v(B)$ ein Zentrum auf $(Y, \mathcal{O}_Y)$ hat. Zu zeigen ist, daß B ein Zentrum auf $(X, \mathcal{O}_X)$ hat. Nach (3.9.16) und (3.11.17 ii) gibt es ein $x \in t(X)$ und einen bB A von $\kappa(x)$ mit $(\pi_X)_v(A) = B$ und $A = k(x)$. Nach (3.11.18 iv) hat $(\pi_Y)_v(t(f)_v(A))$ ein Zentrum auf $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Wegen $t(f)_v(A) = k(t(f)(x))$, hat $t(f)_v(A)$ ein Zentrum auf $t(Y)$ (nach (3.11.18 iii)). Aus (3.12.2) folgt, daß A ein Zentrum auf $t(X)$ hat. Nach (3.11.18 i) hat B ein Zentrum auf $(X, \mathcal{O}_X)$.

Der injektive Garbenmorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}_X$ faktorisiert in $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}_X$. Deshalb ist $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ injektiv. Wir versehen die Garbe $\mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ mit der Topologie, so daß $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ eine offene Einbettung ist. Dann ist $Z := (X, \mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ ein Objekt von $\mathcal{K}$. Wir haben kanonische Morphismen in $\mathcal{K}$ $q: X \to Z$ und $p: Z \to Y$ mit $f = p \circ q$. Da p separiert ist, ist nach (3.11.20 ii) $t(p)$ separiert. Aus $t(f) = t(p) \circ t(q)$ folgt dann, daß $t(q)$ eigentlich ist. Daß $\mathcal{A}_X$ ein $\mathcal{A}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Typ ist, ergibt sich nun aus der folgenden Aussage.

(1) Sei $h: U \to V$ ein Morphismus affinoider adischer Räume. Sei $r: \mathcal{O}_V(V) \to \mathcal{O}_U(U)$ der durch h induzierte Ringhomomorphismus. Es gelte: h ist eigentlich, $\mathcal{O}_V(V)$

ist noethersch, r ist offen und $\mathcal{O}_U^+(U) \subseteq r(\mathcal{O}_V(V))^c$. Dann ist $\mathcal{O}_U(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_V(V)$-Modul.

Begründung: Wir zeigen, daß $\operatorname{Spec}(r)\colon \operatorname{Spec}\mathcal{O}_U(U) \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_V(V)$ eigentlich ist. Nach (3.8.15) ist r topologisch von endlichem Typ. Da r offen ist, ist r von endlichem Typ (((2.3.28)). Seien $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_U(U)$ und B ein diskreter Bewertungsring des Residuenkörpers $k(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ mit

(2) $l(r(\mathcal{O}_V(V)) \subseteq B$,

wobei $l\colon \mathcal{O}_U(U) \to k(\mathfrak{p})$ die kanonische Abbildung ist. Nach [EGA], II.7.3.8 ist zu zeigen $l(\mathcal{O}_U(U)) \subseteq B$. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von B. Ist das Primideal $(l \circ r)^{-1}(\mathfrak{m})$ nicht offen in $\mathcal{O}_V(V)$, so ist $l(\mathcal{O}_U(U)) \subseteq B$ nach (3.1.11). Sei nun $(l \circ r)^{-1}(\mathfrak{m})$ offen. Dann ist die durch B gegebene Bewertung u von $\mathcal{O}_U(U)$ stetig. Wegen $\mathcal{O}_U^+(U) \subseteq r(\mathcal{O}_V(V))^c$ und (2) ist $u \in U$. Der Residuenkörper $k(u)$ ist eine Erweiterung von $k(\mathfrak{p})$ mit $k(u)^+ \cap k(\mathfrak{p}) = B$. Sei A der bB $(k(u)^+, k(u)^+)$ von $\kappa(x)$. Nach (2) und (3.11.9) hat $h_v(A)$ ein Zentrum auf V. Nach (3.12.2) hat A ein Zentrum auf U, d.h. $l(\mathcal{O}_U(U)) \subseteq B$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Ohne Einschränkung ist Y affin. Der Morphismus $t(f)$ ist von endlichem Typ. Nach (3.11.20 ii) ist $t(f)$ separiert. Seien x ein Punkt von $t(X)$ und A ein bB von $\kappa(x)$, so daß $t(f)_v(A)$ ein Zentrum auf $t(Y)$ hat. Nach (3.12.2) ist noch zu zeigen, daß A ein Zentrum auf $t(X)$ hat. Nach (3.11.18 i und iv) hat $g_v((\pi_X)_v(A))$ ein Zentrum auf $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Deshalb hat $(\pi_X)_v(A)$ ein Zentrum z auf $(X, \mathcal{O}_X)$. Sei U eine offene affine Umgebung von z auf X. Seien d und e die kanonischen Abbildungen $\mathcal{O}_{t(Y)}(t(Y)) \to \mathcal{O}_{t(X)}(\pi_X^{-1}(U))$ und $\mathcal{O}_{t(X)}(\pi_X^{-1}(U)) \to k(x)$. Nach (3.11.17 iii) gilt $e(\mathcal{O}_{t(X)}^+(\pi_X^{-1}(U))) \subseteq A^+$. Da $t(f)_v(A)$ ein Zentrum auf $t(Y)$ hat, gilt $(e \circ d)(\mathcal{O}_{t(Y)}(t(Y))) \subseteq A$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{O}_{t(X)}(\pi_X^{-1}(U))$ ganz über $\mathcal{O}_{t(Y)}(t(Y)) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(U)$. Deshalb ist $e(\mathcal{O}_{t(X)}(\pi_X^{-1}(U))) \subseteq A$. Damit ist gezeigt, daß A ein Zentrum auf $\pi_X^{-1}(U)$ hat.

Satz 3.12.6. Sei Z ein Objekt von $\mathcal{K}$, so daß $\mathcal{A}_Z$ als $\mathcal{O}_Z$-Algebra von endlichem Typ ist und Z quasikompakt ist. Seien X ein adischer Raum und $X \to t(Z)$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume. Dann gibt es einen Morphismus $g\colon Y \to Z$ in $\mathcal{K}$, so daß gilt

a) Der zu g gehörige Morphismus formaler Schemata $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ ist eigentlich.

b) $\mathcal{A}_Y$ ist als $\mathcal{A}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y$-Modul von endlichem Typ.

c) X ist über $t(Z)$ isomorph zu $t(Y)$.

Beweis: Mit $t(Z)$ ist auch X quasikompakt und quasisepariert. Nach (3.11.27) sind für X die Bedingungen aus (3.11.26) erfüllt. (3.12.6) folgt nun aus (3.9.24) und

(3.12.5).

Korollar 3.12.7. Sei S ein lokal noethersches formales Schema. Dann ist der Funktor $X \mapsto t(X)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der lokal noetherschen formalen Schemata, die eigentlch über S sind, und der Kategorie der adischen Räume, die eigentlich über $t(S)$ sind.

Beweis: Nach (3.9.15 ii) ist der angegebene Funktor volltreu. Sei Y ein adischer Raum, der eigentlich über $t(S)$ ist. Zu zeigen ist, daß ein lokal noethersches formales Schema X existiert, so daß X eigentlich über S ist und $t(X)$ über $t(S)$ isomorph zu Y ist. Ohne Einschränkung ist S affin. Nach (3.12.6) können wir annehmen $Y = t(U)$, wobei U ein Objekt von $\mathcal{K}$ und $f: U \to S$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ ist, so daß $\mathcal{A}_U$ als $\mathcal{O}_U$-Modul von endlichem Typ ist und der zu f gehörige Morphismus formaler Schemata eigentlich ist. Sei $V \to U$ die Aufblasung von $\mathcal{A}_U$. Nach (3.9.10) gilt $\mathcal{A}_V = \mathcal{O}_V$, d.h. V ist ein formales Schema. Y ist isomorph zu $t(V)$ (nach (3.9.18 i)) und V ist eigentlich über S.

Proposition 3.12.8. Seien Y ein Schema, S ein adischer Raum und $\underline{S} \to Y$ ein Morphismus lokal geringter Räume. Weiterhin seien U und V zwei Schemata lokal von endlichem Typ über Y und $h: U \to V$ ein eigentlicher Y-Morphismus. Dann ist der Morphismus adischer Räume $h_{(S)}: U \times_Y S \to V \times_Y S$ eigentlich.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen: $Y = V, Y$ affin und S affinoid. Wir setzen $R = U \times_S Y$. Seien $p: R \to S$ und $q: \underline{R} \to U$ die Projektionen. Zu zeigen ist, daß p eigentlich ist. Nach (3.11.22) ist p separiert. Aus (3.12.2) und den folgenden beiden Punkten (1) und (2) folgt, daß p eigentlich ist.

(1) p ist von endlichem Typ.

Begründung: Da p lokal von endlichem Typ ist, ist zu zeigen, daß R quasikompakt ist. Für eine offene Teilmenge W von U, eine endliche Teilmenge F von $\mathcal{O}_U(W)$ und ein Element s von $\mathcal{O}_Y(Y)$ setzen wir $T(W, F, s) = \{v \in \operatorname{Spv} W \mid v(f) \geq v(s) \neq \infty$ für jedes $f \in F\}$. Da $T(W, F, s)$ offen in $\operatorname{Spv} U$ ist und $\operatorname{Spv} U$ quasikompakt ist, folgt aus (1.4.2) und (1.4.3 ii): Es gibt offene affine Teilmengen $W_1, \ldots, W_n$ von U und für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein endliches Erzeugendensystem F_i von $\mathcal{O}_U(W_i)$ über $\mathcal{O}_Y(Y)$ und ein Element s_i von $\mathcal{O}_Y(Y)$, so daß $\operatorname{Spv} U = \bigcup_{i=1}^{n} T(W_i, F_i, s_i)$.

Sei L eine endliche Teilmenge von $\mathcal{O}_S(S)^{\circ\circ}$, so daß $L \cdot \mathcal{O}_S(S)$ offen ist. Da S quasikompakt ist und $v_x(l)$ kofinal in $(\Gamma_{v_x})_\infty$ ist für jedes $l \in L$ und jedes $x \in S$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $v_x(l \cdot s_i) \geq 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, jedes $l \in L^k$ und jedes $x \in S$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir $R_i = \{x \in q^{-1}(W_i) \mid v_x(l \cdot f) \geq 0$ für jedes $l \in L^k$ und jedes $f \in F_i\}$. Dann gilt $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$. Aus der Konstruktion von R im Beweis von (3.10.5) folgt, daß jedes R_i affinoid ist. Deshalb ist R quasikompakt.

(2) Sei A ein bB von R, so daß $p_v(A)$ ein Zentrum auf S hat. Dann hat A ein Zentrum auf R.

Begründung: Sei x der Träger von A. Wir betrachten $k(x)$ als Erweiterung von $k(q(x))$ und erhalten durch $B := A \cap k(q(x))$ einen Bewertungsring von $k(q(x))$. Da $p_v(A)$ ein Zentrum auf S hat, ist das Bild von $\mathcal{O}_Y(Y)$ unter der von h induzierten Abbildung $\mathcal{O}_Y(Y) \to k(q(x))$ in B enthalten. Da h eigentlich ist, gibt es eine offene affine Umgebung W von $q(x)$ in U, so daß
(a) $s(q(x)) \in B$ für jedes $s \in \mathcal{O}_U(W)$.
Seien L eine endliche Teilmenge von $\mathcal{O}_S(S)^{\circ\circ}$, so daß $L \cdot \mathcal{O}_S(S)$ offen ist, und F ein endliches Erzeugendensystem von $\mathcal{O}_U(W)$ über $\mathcal{O}_Y(Y)$. Da $v_x(l)$ kofinal in $(\Gamma_{v_x})_\infty$ ist für jedes $l \in L$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $v_x(l \cdot f) > 0$ für jedes $l \in L^k$ und jedes $f \in F$. Da $A^+ \subseteq k(x)^+$ und somit das maximale Ideal von $k(x)^+$ in A^+ enthalten ist, erhalten wir
(b) $(l \cdot f)(x) \in A^+$ für jedes $l \in L^k$ und jedes $f \in F$.
Die offene Teilmenge $T := \{z \in q^{-1}(W) \mid v_z(l \cdot f) \geq 0$ für jedes $l \in L^k$ und jedes $f \in F\}$ von R ist affinoid und enthält x. Der von $\mathcal{O}_S(S)$ und $\mathcal{O}_U(W)$ erzeugte Unterring von $\mathcal{O}_R(T)$ ist dicht in $\mathcal{O}_R(T)$, und der von $\mathcal{O}_S^+(S)$ und $\{l \cdot f \mid l \in L^k, f \in F\}$ erzeugte ganz abgeschlossene Unterring von $\mathcal{O}_R(T)$ ist dicht in $\mathcal{O}_R^+(T)$. Da $p_v(A)$ ein Zentrum auf S hat, folgt aus (a) und (b): $s(x) \in A$ für jedes $s \in \mathcal{O}_R(T)$ und $s(x) \in A^+$ für jedes $s \in \mathcal{O}_R^+(T)$. Deshalb hat A ein Zentrum auf T.

Definition 3.12.9. i) Ein Ringhomomorphismus vollständiger affinoider Ringe $A \to B$ heißt endlich, wenn er topologisch von endlichem Typ ist und die Ringhomomorphismen $\tilde{A} \to \tilde{B}$ und $A^+ \to B^+$ ganz sind.
ii) Ein Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ heißt endlich, wenn es zu jedem $y \in Y$ eine offene affinoide Umgebung U von y in Y gibt, so daß $f^{-1}(U)$ affinoid ist und der Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(\mathcal{O}_Y(U), \mathcal{O}_Y^+(U)) \to (\mathcal{O}_X(f^{-1}(U)), \mathcal{O}_X^+(f^{-1}(U)))$ endlich ist.

Unmittelbar aus (3.12.2) und (3.11.9) folgt, daß ein endlicher Morphismus adischer Räume eigentlich ist.

Lemma 3.12.10. i) Sei $(A, A^+) \to (B, B^+)$ ein endlicher Ringhomomorphismus vollständiger affinoider Ringe. Dann ist B ein endlich erzeugter A-Modul und die Topologie von B die f-adische A-Modultopologie.
ii) Sei (A, A^+) ein vollständiger affinoider Ring, so daß A tatesch und noethersch ist oder einen noetherschen Definitionsring hat, und sei B eine endliche A-Algebra. Wir versehen B mit der f-adischen A-Modultopologie. Sei B^+ der ganze Abschluß von A^+ in B. Dann gilt: B ist ein vollständiger f-adischer Ring, B^+ ist ein Ganzheitsring von B und der Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(A, A^+) \to (B, B^+)$ ist topologisch von endlichem Typ und damit endlich.

Beweis: i) Seien A_0 und B_0 Definitionsringe von A^+ und B^+, so daß B_0 topologisch von endlichem Typ über A_0 ist. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Elemente von B_0, so daß $A_0[x_1, \ldots, x_n]$ dicht in B_0 ist. Da B^+ ganz über A^+ ist, gibt es einen Ring A_1, so daß $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A^+, A_1$ endlich erzeugt über A_0 und $x_1, \ldots, x_n$ ganz über A_1. Wir setzen $B_1 := A_1 \cdot B_0$. Dann sind A_1 und B_1 Definitionsringe von A und B. Der Ringhomomorphismus $A_1 \to B_1$ ist adisch. Sei I ein Definitionsideal von A_1. Da $A_1[x_1, \ldots, x_n]$ dicht in B_1 ist, wird B_1/IB_1 als A_1-Algebra von den durch $x_1, \ldots, x_n$ gegebenen Elementen $y_1, \ldots, y_n \in B_1/IB_1$ erzeugt. Da $y_1, \ldots, y_n$ ganz über A_1 sind, ist B_1/IB_1 ein endlich erzeugter A_1-Modul. Nach [B], III. 2.9 Cor. 3 (ii) folgt hieraus, daß B_1 ein endlich erzeugter A_1-Modul ist. Damit ist gezeigt, daß die Topologie von B die f-adische A-Modultopologie ist, wenn B ein endlich erzeugter A-Modul ist. Nach (2.3.28) ist B endlich erzeugt über $A \cdot B_1$ und damit endlich erzeugt über A. Da B ganz über A ist, ist B ein endlich erzeugter A-Modul.
ii) Nach (2.3.33 iii) und (2.2.16) ist B vollständig. Es gilt

(1) Zu jedem $b \in B$ und jedem offenen Unterring D von A gibt es eine Nullumgebung U von A, so daß $u \cdot b$ ganz über D ist für jedes $u \in U$.

Denn: Sei

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

eine ganze Gleichung von b über A. Sei U eine Nullumgebung von A, so daß $Ua_i \subseteq D$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $U^2 \subseteq U$. Dann ist

$$(ub)^n + (ua_1)(ub)^{n-1} + \ldots + (u^n a_n) = 0$$

eine ganze Gleichung von ub über D für jedes $u \in U$.

(2) Zu jedem Definitionstupel (D, I) von A gibt es eine D-Unteralgebra E von B, für die gilt: E ist ein endlich erzeugter D-Modul; E ist offen in B und die Teilraumtopologie von B auf E ist die $I \cdot E$-adische Topologie. (Also ist E topologisch von endlichem Typ über D.)

Denn: Seien G und H endliche Teilmengen von I und B, so daß $I = D \cdot G$ und $B = A \cdot H$. Nach (1) gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß jedes Element von $G^k \cdot H$ ganz über D ist. Für die von $G^k \cdot H$ erzeugte D-Unteralgebra E von B gilt (2).

Nach (2) ist die Topologie auf B eine f-adische Ringtopologie. Nach (1) ist B^+ offen in B. Da der Ringhomomorphismus $A \to B$ adisch ist, ist $B^+ \subseteq B^\circ$. Deshalb ist B^+ ein Ganzheitsring von B. Aus (2) folgt, daß der Ringhomomorphismus affinoider Ringe $(A, A^+) \to (B, B^+)$ topologisch von endlichem Typ ist.

Seien X ein adischer Raum und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe, die als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe quasikohärent und von endlichem Typ ist. Indem wir einem Morphismus $f: Y \to X$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Alg.}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{O}_Y)$ zuordnen, erhalten wir einen (kontravarianten) Funktor von der Kategorie $(VL)_{top}/X$ in die Kategorie der Mengen. Wir versehen $\mathcal{A}$ mit seiner kanonischen Topologie (3.8.11). Nach (3.12.10 ii) ist dann $\mathcal{A}$ eine Garbe topologischer Ringe. Jedes Element aus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Alg.}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{O}_Y)$ ist automatisch ein stetiger Garbenmorphismus.

Proposition 3.12.11. Dieser Funktor ist darstellbar durch einen Morphismus adischer Räume $g: Z \to X$ und einen $\mathcal{O}_X$-Algebrahomomorphismus $\varphi: \mathcal{A} \to g_*\mathcal{O}_Z$. Dabei gilt: g ist endlich, φ ist ein Isomorphismus topologischer Garben und der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_X^+$ in $\mathcal{A}$ wird unter φ auf $g_*\mathcal{O}_Z^+$ abgebildet.

Beweis: Wir können annehmen: X ist affinoid, $\mathcal{A}(X)$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul und $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) \otimes \mathcal{O}_X$. Sei $\mathcal{A}(X)^+$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_X^+(X)$ in $\mathcal{A}(X)$. Wir versehen $\mathcal{A}(X)$ mit der f-adischen $\mathcal{O}_X(X)$-Modultopologie. Nach (3.12.10 ii) ist $(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(X)^+)$ ein affinoider Ring, der einen noetherschen Definitionsring hat. Sei Z der adische Raum zu $(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(X)^+)$ und sei $g: Z \to X$ der kanonische Morphismus. Für jede $\mathcal{O}_X$-Algebragarbe $\mathcal{F}$ gilt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-\mathrm{Alg.}}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)-\mathrm{Alg.}}(\mathcal{A}(X), \mathcal{F}(X))$. Deshalb haben wir einen kanonischen $\mathcal{O}_X$-Algebrahomomorphismus $\varphi: \mathcal{A} \to g_*\mathcal{O}_Z$. Jeder $\mathcal{O}_X(X)$-Modulhomomorphismus $\mathcal{A}(X) \to M$ von $\mathcal{A}(X)$ in einen topologischen $\mathcal{O}_X(X)$-Modul M ist stetig. Damit folgt aus (3.2.9) und (3.2.10), daß g und φ den obigen Funktor darstellen.
Nach (3.12.11 ii) ist g endlich. Durch leichtes Nachrechnen zeigt man die restlichen beiden Behauptungen aus (3.12.11).

Der adische Raum Z in (3.12.11) wird mit $\operatorname{Spa}\mathcal{A}$ bezeichnet.

Korollar 3.12.12. Sei X ein adischer Raum. Der Funktor $\mathcal{A} \mapsto \operatorname{Spa}\mathcal{A}$ ist eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Algebrengarben, die als $\mathcal{O}_X$-Modulgarben von endlichem Typ und quasikohärent sind, und der Kategorie der adischen Räume, die endlich über X sind.

Beweis: Da in (3.12.11) der Morphismus φ immer bijektiv ist, ist der angegebene Funktor volltreu. Sei $f: Y \to X$ ein endlicher Morphismus adischer Räume. Zu zeigen ist, daß es eine $\mathcal{O}_X$-Algebrengarbe $\mathcal{A}$ gibt, so daß $\mathcal{A}$ als $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe quasikohärent und von endlichem Typ ist und $\operatorname{Spa}\mathcal{A}$ über X isomorph zu Y ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen: X und Y sind affinoid und der Ringhomorphismus affinoider Ringe $(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)) \to (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y))$ ist endlich. Sei $\mathcal{A} := \mathcal{O}_Y(Y) \otimes \mathcal{O}_X$. Nach (3.12.10) und dem Beweis von (3.12.11) ist $\mathcal{A}$ eine Garbe der gewünschten Art und $\operatorname{Spa}\mathcal{A}$ X-isomorph zu Y.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist der Kohärenzsatz für eigentliche Morphismen adischer Räume.

Satz 3.12.13. Sei Y ein affinoider adischer Raum mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{O}_Y(Y)$ endlich erzeugt ist über einem noetherschen Definitionsring von $\mathcal{O}_Y(Y)$, sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume und sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ der $\mathcal{O}_Y$-Modul $R^p f_* \mathcal{F}$ kohärent mit $(R^p f_* \mathcal{F})(Y) = H^p(X, \mathcal{F})$.

(3.12.13) kann man verallgemeinern zu dem folgenden Satz.

Satz 3.12.14. Die Situation sei wie in (3.12.13). Weiterhin sei $\mathcal{J}$ eine kohärente Idealgarbe auf Y. Wir betrachten die Garbe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{J}^n\mathcal{F}$ auf X als Modul über der Ringgarbe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{J}^n$ auf Y. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ ist dann $H^p(X, \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{J}^n\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} H^p(X, \mathcal{J}^n\mathcal{F})$ ein endlich erzeugter Modul über dem Ring $(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{J}^n)(Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{J}(Y)^n$ und es gilt $R^p f_*(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{J}^n\mathcal{F}) = H^p(X, \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{J}^n\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_Y$.

(3.12.13) ist der Spezialfall von (3.12.14) mit $\mathcal{J} = 0$. (3.12.14) gilt entsprechend auch für mehrere kohärente Idealgarben. Beweisen werden wir (3.12.14) erst im übernächsten Abschnitt.

Für einen adischen Raum X betrachten wir die Eigenschaft

$(*)$ Jeder Punkt von X hat eine offene affinoide Umgebung U, so daß $\mathcal{O}_X(U)$ endlich erzeugt ist über einem noetherschen Definitionsring von $\mathcal{O}_X(U)$.

Ist $f: X \to Y$ ein Morphismus adischer Räume, der lokal von endlichem Typ ist, und erfüllt Y die Eigenschaft $(*)$, so erfüllt auch X die Eigenschaft $(*)$. Um im folgenden (3.12.14) anwenden zu können, setzen wir ab jetzt für diesen Paragraphen voraus, daß alle auftretenden adischen Räume die Eigenschaft $(*)$ erfüllen.

Proposition 3.12.15. Seien $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Wir versehen $\mathcal{F}$ mit seiner kanonischen Topologie (3.8.11) und haben damit auch eine Topologie auf $f_*\mathcal{F}$. Nach (3.12.13) ist $f_*\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul und wir erhalten somit erneut gemäß (3.8.11) eine Topologie auf $f_*\mathcal{F}$. Diese beiden Topologien auf $f_*\mathcal{F}$ stimmen überein.

(3.12.15) wird sich als Korollar aus den Beweisen in Abschnitt (3.14) ergeben. Wie im Beweis von [EGA], III. 4.1.7 kann man aus (3.12.14) folgern

Proposition 3.12.16. Die Situation sei wie in (3.12.14). Dann ist für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ die $\mathcal{J}(Y)$-adische Vervollständigung des $\mathcal{O}_Y(Y)$-Moduls $H^p(X,\mathcal{F})$ kanonisch isomorph zu dem projektiven Limes $\varprojlim_n H^p(X,\mathcal{F}/\mathcal{J}^n\mathcal{F})$.

Sei

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{v} & X \\ u\downarrow & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm adischer Räume, wobei f eigentlich und g adisch ist. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X. Wir nehmen an, daß S und Y affinoid sind und der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_S(S)$ flach ist. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ haben wir den Basiswechselmorphismus

$$\varphi: g^* R^p f_*(\mathcal{F}) \to R^p u_*(v^*\mathcal{F}).$$

In der algebraischen Geometrie ist in der entsprechenden Situation φ ein Isomorphismus (aus trivialen Gründen). Ich weiß nicht, ob bei uns hier φ immer ein Isomorphismus ist. Sind S und Y geometrische Räume über einem diskret Rang 1 bewerteten vollständigen Körper, so folgt aus einem Ergebnis von Raynaud ([Me]), daß φ ein Isomorphismus ist. In (3.14) werden wir folgenden einfachen Fall zeigen.

Proposition 3.12.17. Ist $\mathcal{O}_S(S)$ adisch, so ist φ ein Isomorphismus.

Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus adischer Räume. Sei $\mathcal{I}$ der Kern des Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. Ist f abgeschlossen, so gilt $f(X) = V(\mathcal{I}) := \{y \in Y \mid \mathcal{I}_y \neq \mathcal{O}_{Y,y}\}$. Ist f eigentlich, so ist $\mathcal{I}$ kohärent und deshlab gibt es für jede offene affinoide Teilmenge U von Y Schnitte $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_Y(U)$ mit $f(X) \cap U = \{x \in U \mid a_1(x) = \ldots = a_n(x) = 0\}$.

Sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume. Da $f_*\mathcal{O}_X$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul ist, haben wir den adischen Raum $Z := \operatorname{Spa} f_*\mathcal{O}_X$ über Y. Sei $h: Z \to Y$ der Strukturmorphismus. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\operatorname{Spa} f_*\mathcal{O}_X$ induziert die Identität $f_*\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_X$ einen Morphismus $g: X \to Z$, so daß kommutiert

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z = \operatorname{Spa} f_*\mathcal{O}_X \\ & f \searrow \quad \swarrow h & \\ & Y & \end{array}$$

Der Morphismus h ist endlich und der Morphismus g ist eigentlich. Der Garbenmorphismus $\varphi: \mathcal{O}_Z \to g_*\mathcal{O}_X$ ist bijektiv, denn: Sei U eine offene affinoide Teilmenge von Y. Es gilt $\Gamma(h^{-1}(U), \mathcal{O}_Z) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) = \Gamma(h^{-1}(U), g_*\mathcal{O}_X)$. Da $h^{-1}(U)$ affinoid und $g_*\mathcal{O}_X$ kohärent ist, ist $\varphi \mid h^{-1}(U)$ bijektiv.

Das Diagramm $(*)$ ist die Steinfaktorisierung von f, denn es gilt

Proposition 3.12.18. Sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume, so daß der Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ bijektiv ist. Dann ist f surjektiv und für jedes $y \in Y$ die adische Faser X_y zusammenhängend.

Beweis: Ist y ein analytischer Punkt, so ist X_y zusammenhängend nach (3.13.21). Sei nun y ein nichtanalytischer Punkt. Der nachfolgende Beweis für den Zusammenhang von X_y verläuft analog zu dem Beweis von [EGA], III.4.3.2. Wir versehen den Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ mit der adischen Topologie, so daß für eine (und damit jede) offene affinoide Umgebung U von y in Y der kanonische Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_{Y,y}$ adisch ist. Es ist $\mathcal{O}_{Y,y}^+$ ein Ganzheitsring von $\mathcal{O}_{Y,y}$. Nach (3.6.7 iii) ist $\mathcal{O}_{Y,y}$ noethersch. Deshalb haben wir einen adischen Raum S zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{O}_{Y,y}, \mathcal{O}_{Y,y}^+)$.

Der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_{Y,y}$ induziert einen adischen Morphismus $g: S \to Y$. Sei

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{q} & X \\ p\downarrow & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

das Faserprodukt zu f und g. Der kanonische Morphismus $\operatorname{Spa}\kappa(y) \to Y$ faktorisiert eindeutig in $\operatorname{Spa}\kappa(y) \xrightarrow{h} S \xrightarrow{g} Y$. Sei $s \in S$ das Bild des abgeschlossenen Punktes von $\operatorname{Spa}\kappa(y)$ unter h. Die Transitivität des Faserprodukts ergibt $X_y = R_s$.
Der Ring $\mathcal{O}_S(S)$ ist lokal. Sei $\mathcal{I}$ die von dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_S(S)$ erzeugte Idealgarbe von $\mathcal{O}_R$. Es ist $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_R/\mathcal{I}) = \operatorname{supp}(\mathcal{O}_R/\mathcal{I}^n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_R/\mathcal{I})$ ist homöomorph zu dem R_s zugrundeliegenden topologischen Raum (nach (3.10.4)). Angenommen, es sei X_y nicht zusammenhängend. Dann ist $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_R/\mathcal{I})$ nicht zusammenhängend und deshalb ist der Ring $\varprojlim_n \Gamma(R, \mathcal{O}_R/\mathcal{I}^n)$ nicht zusammenhängend. Aus (3.12.16) folgt

(1) Die Vervollständigung von $(p_*\mathcal{O}_R)(S)$ nach dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}_S(S)$ ist nicht zusammenhängend.

Da $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ bijektiv ist, ist nach (3.12.17) auch $\mathcal{O}_S \to p_*\mathcal{O}_R$ bijektiv. Also $\mathcal{O}_S(S) \xrightarrow{\sim} (p_*\mathcal{O}_R)(S)$. Die Vervollständigung des lokalen Rings $\mathcal{O}_S(S)$ nach seinem maximalen Ideal ist lokal und damit zusammenhängend. Widerspruch zu (1).

Bemerkung 3.12.19. i) Sei $f: X \to Y$ ein adischer Morphismus zwischen adischen Räumen. Sei S die Menge aller Punkte von Y die keine echte Sekundärgeneralisierung besitzen (d.h. $S = \{y \in Y_a \mid v_y \text{ hat Rang } 1\} \cup \{y \in Y_{na} \mid v_y \text{ hat Rang } 0\}$). Es gilt: Ist X_y zusammenhängend für jedes $y \in S$, so ist X_y zusammenhängend für jedes $y \in Y$.
Denn: Sei $y \in Y$ fixiert. Sei $s \in S$ die minimale Sekundärgeneralisierung von y. Nach (3.8.9) und (3.10.4) ist Y_s dicht in Y_y.
ii)Sei $g: S = \operatorname{Spa}(\mathcal{O}_{Y,y}, \mathcal{O}^+_{Y,y}) \to Y$ der Morphismus aus dem Beweis von (3.12.18). g induziert einen Homöomorphismus zwischen dem S zugrundeliegenden topologischen Raum und dem durch die Menge aller Generalisierungen von y gegebenen topologischen Teilraum von Y.

Proposition 3.12.20. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus adischer Räume. Sei T die Menge aller Punkte von Y die keine echte Sekundärgeneralisierung haben. Dann sind äquivalent

a) f ist endlich.

b) f ist eigentlich und die Menge $f^{-1}(y)$ ist endlich für jeden Punkt y von Y.

c) f ist eigentlich und die Menge $f^{-1}(y)$ ist endlich für jeden Punkt y von T.

d) f ist eigentlich und der topologische Raum X_y ist diskret für jeden Punkt y von T.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) klar.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Sei $y \in T$ gegeben. Sei U eine offene affinoide Teilmenge von X_y. Der Ring $A := \mathcal{O}_{X_y}(U)$ ist topologisch von endlichem Typ über $k(y)^\wedge$. Da U endlich ist, folgt aus der noetherschen Normalisierung von A, daß A eine endliche $k(y)^\wedge$-Algebra ist. Hieraus ergibt sich, daß U diskret ist.

(d) $\Longrightarrow$ (a): Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z = \operatorname{Spa} f_*\mathcal{O}_X \\ f \searrow & & \swarrow h \\ & Y & \end{array}$$

die Steinfaktorisierung von f. Wir zeigen, daß g ein Isomorphismus ist. Es gilt

(1) g ist injektiv.

Denn: Seien x und y zwei Punkte von X mit $g(x) = g(y)$. Sei $z \in Z$ die minimale Sekundärgeneralisierung von $g(x)$. Nach (3.8.9) ist $h(z)$ ein Element von T. Da $X_{h(z)}$ diskret ist, ist auch X_z diskret. Nach (3.12.18) ist X_z einpunktig, $X_z = \{u\}$. Da g abgeschlossen ist, folgt aus $g^{-1}(z) = \{u\}$, daß es zu jeder Umgebung U von u in X eine Umgebung V von z in Z gibt mit $g^{-1}(V) \subseteq U$. Da $\mathcal{O}_Z \to g_*\mathcal{O}_X$ bijektiv ist, erhalten wir, daß $\mathcal{O}_{Z,z} \to \mathcal{O}_{X,u}$ bijektiv ist. Insbesondere ist $k(z) \to k(u)$ bijektiv. Nach (3.8.9) sind x und y Sekundärspezialisierungen von u. Da g separiert ist, folgt aus (3.11.23) $x = y$.

Da g surjektiv und abgeschlossen ist, folgt mit (1), daß g ein Homöomorphismus ist. Nach (3.12.15) ist der bijektive Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Z \to g_*\mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus topologischer Garben. Deshalb ist g ein Isomorphismus.

Proposition 3.12.21. Sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus adischer Räume. Dann ist $f_*\mathcal{O}_X^+$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_Y^+$ in $f_*\mathcal{O}_X$.

Beweis: Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z = \operatorname{Spa} f_*\mathcal{O}_X \\ f \searrow & & \swarrow h \\ & Y & \end{array}$$

die Steinfaktorisierung von f. Sei U eine offene affinoide Teilmenge von Y. Wir setzen $V := h^{-1}(U)$ und $A := (f_*\mathcal{O}_X^+)(U) \subseteq (f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_Z(V)$. Es ist $\mathcal{O}_Z^+(V) \subseteq A$. Deshalb ist A offen in $\mathcal{O}_Z(Z)$. Nach (3.2.10) ist A ganz abgeschlossen in $\mathcal{O}_Z(V)$. Nach (3.2.1) gilt $\mathcal{O}_X^+(f^{-1}(U)) \subseteq \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))^\circ$. Aus (3.12.15) folgt somit $A \subseteq \mathcal{O}_Z(V)^\circ$. Also ist A ein Ganzheitsring von $\mathcal{O}_Z(V)$. Sei $S := \{z \in V \mid v_z(a) \geq 0$ für jedes $a \in A\}$. Es ist $g(f^{-1}(U)) \subseteq S$. Da g surjektiv ist, gilt $S = V$. Mit (3.2.6) erhalten wir $A = \mathcal{O}_Z^+(V)$. Da $\mathcal{O}_Z^+(V)$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_X^+(U)$ in $\mathcal{O}_Z(V)$ ist, folgt die Behauptung.

Korollar 3.12.22. Ein Morphismus zwischen affinoiden adischen Räumen ist genau dann eigentlich, wenn er endlich ist.

3.13. Eigentliche Morphismen analytischer Räume

Für analytische Räume definieren wir eigentliche Morphismen vollkommen analog zu (3.12.1). In [K] hat Kiehl eigentliche Morphismen für analytische Varietäten definiert. Das Ziel dieses Paragraphen ist, diese beiden Definitionen zu vergleichen.

Definition 3.13.1. Ein Morphismus analytischer Räume $f: X \to Y$ heißt eigentlich, wenn er von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist. Dabei bedeutet universell abgeschlossen, daß für jeden Morphismus analytischer Räume $S \to Y$ die Projektion $f_{(S)}: X \times_Y S \to S$ abgeschlossen ist.

In diesem Paragraphen verstehen wir unter einem bB eines analytischen Raumes X immer einen bB (A, v_A) von X mit der Eigenschaft $A = k(x)$ (x der Träger von (A, v_A)). (Wegen (3.11.13 i) spielen auf analytischen Räumen nur bB mit dieser Eigenschaft eine Rolle.)

Proposition 3.13.2. Für einen Morphismus analytischer Räume $f: X \to Y$ sind äquivalent

a) f ist eigentlich.

b) f ist von endlichem Typ und quasisepariert und sind A ein bB von X und y ein Zentrum von $f_v(A)$ auf Y, so gibt es genau ein Zentrum x von A auf X mit $y = f(x)$.

c) f ist von endlichem Typ und quasisepariert und zu jedem kommutativen Diagramm analytischer Räume

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spa}(k, A) & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \operatorname{Spa}(k, B) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

gibt es genau einen Morphismus analytischer Räume $\operatorname{Spa}(k, B) \to X$, der das Diagramm kommutativ ergänzt. Dabei ist k ein topologischer Körper, dessen Topologie sich durch eine Rang 1 Bewertung definieren läßt, sind A und B Bewertungsringe von k mit $B \subseteq A \subseteq k^\circ$ und wird g durch die Identität $k \to k$ induziert.

Der Beweis von (3.13.2) ist klar: Man beachte (3.11.10 ii) und (3.11.12). Mit f ist auch jede Projektion $f_{(S)}: X \times_Y S \to S$ quasikompakt. Deshalb ist $f_{(S)}$ genau dann abgeschlossen, wenn $f_{(S)}$ spezialisierend ist.

Wie im Beweis von (3.12.2) zeigt man

Proposition 3.13.3. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus analytischer Räume, der lokal von endlichem Typ und separiert ist. Ist die Projektion $f_{(S)}: X \times_Y S \to S$ abgeschlossen für jeden Morphismus analytischer Räume $S \to Y$, der von endlichem Typ ist, so ist f eigentlich.

Endliche Morphismen zwischen analytischen Räumen werden entsprechend zu (3.12.9 ii) definiert. (3.12.11) und (3.12.12) gelten dann analog auch für analytische Räume. Ist $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus analytischer Räume und hat jeder Punkt von Y eine offene affinoide Umgebung U, so daß $\mathcal{O}_Y(U)$ einen noetherschen Definitionsring hat, so gilt der Kohärenzsatz für f (da Y ein adsicher Raum ist). Ich weiß nicht, ob der Kohärenzsatz allgemein für eigentliche Morphismen analytischer Räume gilt.

Lemma 3.13.4. Seien X und Y zwei analytische Räume über einem analytischen Raum S, wobei X und S affinoid sind und Y lokal von endlichem Typ und separiert über S ist. Sei $f: X \to Y$ ein S-Morphismus. Sei E ein Ganzheitsring von $\mathcal{O}_X(X)$, der das Bild von $\mathcal{O}_S^+(S)$ in $\mathcal{O}_X(X)$ enthält und in $\mathcal{O}_X^+(X)$ enthalten ist. Seien Z der analytische Raum zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{O}_X(X), E)$ und $i: X \to Z$ der kanonische Morphismus. Z ist auf kanonische Weise ein Raum über S und i dann ein S-Morphismus. Es gilt

i) Genau dann gibt es einen Morphismus $g: Z \to Y$ mit $f = g \circ i$, wenn jeder bB von X, der ein Zentrum auf Z hat, auch ein Zentrum auf Y hat. Der Morphismus g ist eindeutig bestimmt und ein S-Morphismus.

ii) Ist f eine offene Einbettung und existiert der Morphismus g aus (i), so ist g ein Homöomorphismus auf sein Bild.

Beweis: Wir benutzen wiederholt (3.3.13).

i) Die Richtung $\Longrightarrow$ ist klar ((3.11.11 i)). Zum Beweis von $\Longleftarrow$ zeigen wir

a) Zu jedem $z \in Z$ gibt es eine offene Umgebung U von z in Z und einen S-Morphismus $h: U \to Y$ mit $f \mid i^{-1}(U) = h \circ (i \mid i^{-1}(U))$.

b) Zu jeder offenen Teilmenge U von Z gibt es höchstens einen Morphismus $h: U \to Y$ mit $f \mid i^{-1}(U) = h \circ (i \mid i^{-1}(U))$.

Aus (a) und (b) folgt die Behauptung.

Zu (a): Sei $z \in Z$ gegeben. Sei x das größte Element von X, so daß $i(x)$ nach z spezialisiert ((3.3.13)). Sei A ein bB von $\kappa(x)$, so daß z das Zentrum von $i_v(A)$ auf Z ist. Nach Voraussetzung hat $f_v(A)$ ein Zentrum y auf Y. Sei V eine offene affinoide Umgebung von y in Y. Nach dem Beweis von (3.3.13 iii) gibt es eine rationale Teilmenge

W von Z mit $z \in W$ und $i^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V)$. Seien $a_1, \ldots, a_n$ Elemente von $\mathcal{O}_Y(V)$, so daß $\mathcal{O}_Y^+(V)$ der ganze Abschluß des topologischen Abschlusses von $\mathcal{O}_S^+(S)[a_1, \ldots, a_n]$ in $\mathcal{O}_Y(V)$ ist. Durch Komposition der Abbildung $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(i^{-1}(W))$ mit der Umkehrung des Isomorphismus $\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(i^{-1}(W))$ erhält man eine Abbildung $\varphi: \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_Z(W)$. Sei U die rationale Teilmenge $R(\frac{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n), 1}{1})$ von W. Es ist $z \in U$. Sei $\psi: \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_Z(U)$ die Komposition von φ mit der Restriktion $\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_Z(U)$. Es ist $\psi(a_i) \in \mathcal{O}_Z^+(U)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, also auch $\psi(\mathcal{O}_S^+(S)[a_1, \ldots, a_n]) \subseteq \mathcal{O}_Z^+(U)$ und damit $\psi(\mathcal{O}_Y^+(V)) \subseteq \mathcal{O}_Z^+(U)$. Der stetige Ringhomomorphismus affinoider Ringe $\psi: (\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)) \to (\mathcal{O}_Z(U), \mathcal{O}_Z^+(U))$ induziert einen Morphismus $h: U \to V \subseteq Y$ mit $f \mid i^{-1}(U) = h \circ (i \mid i^{-1}(U))$.

Zu (b): Seien U eine offene Teilmenge von Z und $h: U \to Y$ ein Morphismus mit $f \mid i^{-1}(U) = h \circ (i \mid i^{-1}(U))$. Sei $z \in U$ gegeben. Sei x ein Element von $i^{-1}(U)$, so daß $i(x)$ nach z spezialisiert. Sei A ein bB von $\kappa(x)$, so daß z das Zentrum von $i_v(A)$ auf Z ist. Dann ist $h(z)$ ein Zentrum von $f_v(A)$ auf Y. Da Y separiert ist, hat $f_v(A)$ höchstens ein Zentrum auf Y. Deshalb ist $h(z)$ eindeutig bestimmt. Da $i^*: \mathcal{O}_{Z,i(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv ist, ist $h^*: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{Z,i(x)}$ eindeutig bestimmt. Nach (3.3.9 iii) ist $\mathcal{O}_{Z,z} \to \mathcal{O}_{Z,i(x)}$ injektiv. Deshalb ist $h^*: \mathcal{O}_{Y,h(z)} \to \mathcal{O}_{Z,z}$ eindeutig bestimmt.

ii) Da Z quasikompakt und Y quasisepariert ist, ist g quasikompakt. Nach (3.3.20) reicht es zu zeigen, daß g injektiv ist. Zunächst gilt

(1) Für jedes $x \in X$ ist $g^{-1}(g(i(x))) = \{i(x)\}$.

Denn: Sei $z \in Z$ gegeben mit $g(z) = f(x)$. Wir wählen ein $y \in X$, so daß $i(y) \succ z$. Dann $f(y) = g(i(y)) \succ g(z) = f(x)$ und somit $y \succ x$. Wir haben also $i(y) \succ z, i(y) \succ i(x)$ und $g(z) = g(i(x))$. Aus (3.11.23) folgt $z = i(x)$.

Seien u und v Punkte von Z mit $g(u) = g(v)$. Da jeder Punkt von Z Spezialisierung eines Punktes von $i(X)$ ist, gibt es einen Punkt x von X mit $g(i(x)) \succ g(u)$. Nach (3.3.11) und (1) sind u und v Spezialisierungen von $i(x)$. Wieder mit (3.11.23) erhalten wir $u = v$.

Definition 3.13.5. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen Räumen, der von endlichem Typ ist. Sei E der kleinste Ganzheitsring von $\mathcal{O}_X(X)$, so daß $f^*: (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y)) \to (\mathcal{O}_X(X), E)$ ein Morphismus affinoider Ringe ist. Der analytische Raum

$$\bar{X}^Y := \mathrm{Spa}\,(\mathcal{O}_X(X), E)$$

heißt der Abschluß von X relativ Y.

Sei $f: X \to Y$ wie in (3.13.5). Die Bezeichnung „Abschluß von X relativ Y" ist motiviert durch die folgende Eigenschaft von $\bar{X}^Y$. Wir haben ein kanonisches kommutatives Dreieck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & \bar{X}^Y \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Der Morphismus i ist eine offene Einbettung. Via i betrachten wir X häufig als offenen Teilraum von $\bar{X}^Y$.

Ist $l: S \to Y$ ein beliebiger Morphismus analytischer Räume, so haben wir zu g und l das Faserprodukt $\bar{X}^Y \times_Y S$ (siehe (3.10.2)). Wir können (3.13.2) entsprechend auch auf g anwenden und erhalten, daß g universell abgeschlossen ist (d.h. alle Projektionen $\bar{X}^Y \times_Y S \to S$ sind abgeschlossen).

Sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & Z \arrow[dl, "h"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

eine Faktorisierung von f, wobei h eigentlich ist. Nach (3.13.4 i) und (3.13.2) gibt es genau einen Morphismus $k: \bar{X}^Y \to Z$, so daß kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, "j"] \arrow[dd, "f"'] & & \\ & \bar{X}^Y \arrow[r, "k"] \arrow[dl, "g"] & Z \arrow[dll, "h"] \\ Y & & \end{tikzcd}$$

Für einen beliebigen Morphismus $f: X \to Y$ affinoider analytischer Räume definieren wir einen analytischen Raum $\bar{X}^Y$ genauso wie in (3.13.5). Im allgemeinen ist jedoch dann $i: X \to \bar{X}^Y$ keine offene Einbettung.

Beispiel 3.13.6. i) Ist $f: X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung (oder allgemeiner ein endlicher Morphismus), so gilt $\bar{X}^Y = X$.

ii) Sind X eine offene affinoide Teilmenge von Y und $f: X \to Y$ die Inklusion, so induziert $g: \bar{X}^Y \to Y$ einen Homöomorphismus zwischen dem $\bar{X}^Y$ zugrundeliegenden topologischen Raum und dem Abschluß von X in Y. (Ist X eine rationale Teilmenge von Y, so ist dies in (3.3.15 ii) explizit nachgerechnet.)

Bemerkung 3.13.7. i) Seien $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus analytischer Räume und U und V offene affinoide Teilmengen von X und Y mit $f(U) \subseteq V$. Dann setzt sich die Inklusion $U \to f^{-1}(V)$ fort zu einem Morphismus $\bar{U}^V \to f^{-1}(V)$. Dieser gibt einen Homöomorphismus zwischen dem $\bar{U}^V$ zugrundeliegenden topologischen Raum und dem Abschluß von U in $f^{-1}(V)$.
ii) Für einen Morphismus analytischer Räume $f: X \to Y$ sind äquivalent
a) f ist eigentlich.
b) f ist von endlichem Typ und separiert und zu jedem Paar (x, y), wobei $y \in Y$ und $x \in X_y$, gibt es offene affinoide Umgebungen U und V von x und y in X und Y mit $f(U) \subseteq V$, so daß sich die Inklusion $U \to f^{-1}(V)$ fortsetzt zu einem Morphismus $\bar{U}^V \to f^{-1}(V)$.

Beweis: Alles folgt direkt aus (3.13.2) und (3.13.4) bis auf die Aussage über das Bild von $\bar{U}^V \to f^{-1}(V)$. Hierzu beachte man einerseits , daß U dicht in $\bar{U}^V$ ist, und andererseits, daß U eine konstruierbare Teilmenge des spektralen Raums $f^{-1}(V)$ ist und deshalb jeder Punkt des Abschlusses von U in $f^{-1}(V)$ eine Spezialisierung eines Punktes von U ist. Man benutze (3.11.10 ii) und (3.11.12).

Definition 3.13.8. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen Räumen, der von endlichem Typ ist. Sei T die Menge aller Generalisierungen aller Punkte von $\bar{X}^Y \backslash X$ in $\bar{X}^Y$ und sei $\bar{T}$ der Abschluß von T in $\bar{X}^Y$. Die offene Teilmenge von X

$$\mathring{X}^Y := \bar{X}^Y \backslash \bar{T}$$

heißt das Innere von X relativ Y. Da X eine offene konstruierbare Teilmenge von $\bar{X}^Y$ ist, gilt $\mathring{X}^Y = \{x \in X \mid \text{jede Generalisierung von } x \text{ hat keine Spezialisierung in } \bar{X}^Y \backslash X\}$.

Beispiel 3.13.9. Seien X und Y affinoide analytische Räume. Aus (3.13.6) folgt
i) Ist $f: X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung (oder allgemeiner ein endlicher Morphismus), so gilt $\mathring{X}^Y = X$.
ii) Sind X eine offene affinoide Teilmenge von Y und $f: X \to Y$ die Inklusion, so gilt $\mathring{X}^Y = \{x \in X \mid \text{jede Generalisierung von } x \text{ hat keine Spezialisierung in } Y \backslash X\}$.

Bemerkung 3.13.10. Aus (3.3.9 i) folgt, daß $\mathring{X}^Y$ abgeschlossen ist gegenüber Spezialisierungen in $\bar{X}^Y$.

Bemerkung 3.13.11. Seien Y ein affinoider analytischer Raum, $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus analytischer Räume, U eine offene affinoide Teilmenge von X und Z eine prokonstruierbare Teilmenge von U, die abgeschlossen gegenüber Generalisierungen ist. Sei $\bar{Z}$ der Abschluß von Z in X. Dann sind äquivalent

a) $Z \subseteq \mathring{U}^Y$.
b) $\bar{Z} \subseteq \mathring{U}^Y$.
c) $\bar{Z} \subseteq U$.

Beweis: Nach (3.13.7 i) können wir $\bar{U}^Y$ mit dem Abschluß von U in X identifizieren.
(a) $\Longrightarrow$ (b): (3.13.10)
(b) $\Longrightarrow$ (c): klar
(c) $\Longrightarrow$ (a): (3.13.8)

Bemerkung 3.13.12. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen Räumen, der von endlichem Typ ist, und sei S ein affinoider analytischer Raum.
i) Für einen Morphismus $g: S \to X$ sind äquivalent

a) $\operatorname{im}(g) \subseteq \mathring{X}^Y$.
b) g setzt sich fort zu einem Morphismus $h: \bar{S}^Y \to X$.

Sind (a) und (b) erfüllt, so gilt $\operatorname{im}(h) \subseteq \mathring{X}^Y$.
ii) Sei $g: Y \to S$ ein Morphismus von endlichem Typ. Dann gilt

$$\mathring{X}^S = \mathring{X}^Y \cap f^{-1}(\mathring{Y}^S).$$

iii) Sei $g: S \to Y$ ein beliebiger Morphismus und sei

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{p} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & Y \end{array}$$

das Faserprodukt zu f und g. Dann gilt

$$p^{-1}(\mathring{X}^Y) \subseteq \mathring{R}^S.$$

iv) Seien $f_1: X_1 \to Y_1$ und $f_2: X_2 \to Y_2$ Morphismen von endlichem Typ zwischen affinoiden analytischen Räumen über S und $U := X_1 \times_S X_2 \to Y_1 \times_S Y_2 =: V$ der Morphismus $(f_1, f_2)_S$. Seien $p_1: X_1 \times_S X_2 \to X_1$ und $p_2: X_1 \times_S X_2 \to X_2$ die Projektionen. Dann gilt

$$p_1^{-1}(\mathring{X}_1^{Y_1}) \cap p_2^{-1}(\mathring{X}_2^{Y_2}) \subseteq \mathring{U}^V.$$

Beweis: i) (a) $\Longrightarrow$ (b): Der Morphismus g setzt sich fort zu einem Morphismus $\bar{g}\colon \bar{S}^Y \to \bar{X}^Y$. Da jeder Punkt von $\bar{S}^Y$ eine Spezialisierung eines Punktes von S ist, ist jeder Punkt von $\operatorname{im}(\bar{g})$ eine Spezialisierung eines Punktes von $\operatorname{im}(g) \subseteq \mathring{X}^Y$. Aus (3.13.10) folgt $\operatorname{im}(\bar{g}) \subseteq \mathring{X}^Y$.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Unter der Abbildung $\bar{S}^Y \to \bar{X}^Y$ wird der Abschluß $\overline{\{s\}}$ eines Punktes $s \in S$ in $\bar{S}^Y$ abgebildet auf den Abschluß $\overline{\{g(s)\}}$ von $g(s)$ in $\bar{X}^Y$. Mit (3.3.11) folgt die Behauptung.

ii) Sei Z eine offene affinoide Teilmenge von X. Wir zeigen:

$$Z \subseteq \mathring{X}^S \Longleftrightarrow Z \subseteq \mathring{X}^Y \cap f^{-1}(\mathring{Y}^S)$$

Sei $G(S)$ bzw. $G(Y)$ bzw. $G(X)$ der kleinste Ganzheitsring von $\mathcal{O}_X(Z)$, der das Bild von $\mathcal{O}_S^+(S)$ bzw. $\mathcal{O}_Y^+(Y)$ bzw. $\mathcal{O}_X^+(X)$ in $\mathcal{O}_X(Z)$ enthält. Es gilt $G(S) \subseteq G(Y) \subseteq G(X)$. Aus (i) folgt:
$Z \subseteq \mathring{X}^Y$ und $Z \subseteq f^{-1}(\mathring{Y}^S) \Longleftrightarrow$ die Morphismen $Z \to X$ und $Z \to Y$ setzen sich fort zu Morphismen $\bar{Z}^Y \to X$ und $\bar{Z}^S \to Y \Longleftrightarrow G(X) \subseteq G(Y)$ und $G(Y) \subseteq G(S) \Longleftrightarrow G(X) \subseteq G(S) \Longleftrightarrow$ der Morphismus $Z \to X$ setzt sich fort zu einem Morphismus $\bar{Z}^S \to X \Longleftrightarrow Z \subseteq \mathring{X}^S$.

iii) Sei Z eine offene affinoide Teilmenge von $p^{-1}(\mathring{X}^Y)$. Nach (i) läßt sich der Morphismus $Z \to X$ fortsetzen zu einem Morphismus $\bar{Z}^Y \to X$. Die Komposition $\bar{Z}^S \to \bar{Z}^Y \to X$ und der Morphismus $\bar{Z}^S \to S$ definieren einen Morphismus $\bar{Z}^S \to R$. Nach (i) folgt $Z \subseteq \mathring{R}^S$.

iv) Sei Z eine offene affinoide Teilmenge von $p_1^{-1}(\mathring{X}_1^{Y_1}) \cap p_2^{-1}(\mathring{X}_2^{Y_2})$. Nach (i) setzen sich die Morphismen $Z \to X_1$ und $Z \to X_2$ fort zu Morphismen $\bar{Z}^{Y_1} \to X_1$ und $\bar{Z}^{Y_2} \to X_2$. Die Kompositionen $\bar{Z}^V \to \bar{Z}^{Y_1} \to X_1$ und $\bar{Z}^V \to \bar{Z}^{Y_2} \to X_2$ definieren einen Morphismus $\bar{Z}^V \to U$, der die Inklusion $Z \to U$ fortsetzt. Aus (i) folgt $Z \subseteq \mathring{U}^V$.

Die folgende Definition von Kiehl-eigentlich ist eine Verschärfung der Bedingung (b) aus (3.13.7 ii).

Definition 3.13.13. Ein Morphismus analytischer Räume $f\colon X \to Y$ heißt Kiehl-eigentlich, wenn er von endlichem Typ und separiert ist und es zu jedem Paar (x, y), wobei $y \in Y$ und $x \in X_y$, offene affinoide Umgebungen U und V von x und y in X und Y mit $f(U) \subseteq V$ gibt, so daß $x \in \mathring{U}^V$.

Eine einfache Umformulierung von (3.13.13) ergibt

Proposition 3.13.14. Für einen Morphismus analytischer Räume $f: X \to Y$ sind äquivalent
a) f ist Kiehl-eigentlich.
b) f ist eigentlich und zu jedem Paar (x, y), wobei $y \in Y$ und $x \in X_y$, gibt es offene affinoide Umgebungen U und V von x und y in X und Y mit $f(U) \subseteq V$, so daß der Abschluß von $\{x\}$ in $f^{-1}(V)$ in U liegt.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei ein Paar (x, y) mit $y \in Y$ und $x \in X_y$ gegeben. Seien U und V offene affinoide Umgebungen von x und y in X und Y, so daß $f(U) \subseteq V$ und $x \in \mathring{U}^V$. Sei Z eine offene affinoide Umgebung von x in $\mathring{U}^V$. Nach (3.13.12 i) setzt sich die Inklusion $Z \to U$ fort zu einem Morphismus $\bar{Z}^V \to U$. Aus (3.13.7 ii) folgt, daß f eigentlich ist. Nach (3.13.11) liegt der Abschluß von Z in $f^{-1}(V)$ in U.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei ein Paar (x, y) mit $y \in Y$ und $x \in X_y$ gegeben. Sei $z \in X$ die minimale Generalisierung von x in X. Es ist $z \in X_y$. Seien U und V offene affinoide Umgebungen von z und y in X und Y, so daß $f(U) \subseteq V$ und der Abschluß von $\{z\}$ in $f^{-1}(V)$ in U liegt. Aus (3.13.11) folgt $x \in \mathring{U}^V$.

Aus (3.13.12) und (3.13.9 i) folgt
a) Sind $f_1: X_1 \to Y_1$ und $f_2: X_2 \to Y_2$ zwei Kiehl-eigentliche Morphismen zwischen analytischen Räumen über einem analytischen Raum S, so ist auch $(f_1, f_2)_S: X_1 \times_S X_2 \to Y_1 \times_S Y_2$ Kiehl-eigentlich.
b) Sind $f: X \to Y$ ein Kiehl-eigentlicher und $g: S \to Y$ ein beliebiger Morphismus analytischer Räume, so ist auch die Projektion $f_{(S)}: X \times_Y S \to S$ Kiehl-eigentlich.
c) Endliche Morphismen sind Kiehl-eigentlich.
d) Sind $f: X \to Y$ ein endlicher Morphismus und $g: Y \to Z$ ein Kiehl-eigentlicher Morphismus analytischer Räume, so ist auch $g \circ f: X \to Z$ Kiehl-eigentlich.
Aus (b) und (d) folgt wie üblich
e) Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Morphismen analytischer Räume, so daß $g \circ f$ Kiehl-eigentlich und g lokal von endlichem Typ und separiert ist, so ist auch f Kiehl-eigentlich.

Wir wollen (3.13.13) mit Kiehls Definition eigentlicher Morphismen vergleichen. Seine Definition in [K] ist die folgende. Sei k ein vollständiger topologischer Körper, dessen Topologie durch eine Rang 1 Bewertung $\alpha: k \to \mathbb{R}_\infty$ gegeben wird. Ist $X = \mathrm{Sp}A$ eine affinoide analytische Varietät über k, so bezeichnet $E_X^n = \mathrm{Sp}A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$

den n-dimensionalen Einheitspolyzylinder über X und $E_X^n(r)$ die offene Teilmenge $\{x \in E_X^n \mid \alpha(X_i(x)) \geq r \text{ für } i = 1, \ldots, n\} (r \in \mathbb{R})$.

Definition 3.13.15. i) Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus affinoider analytischer Varietäten über k und U eine offene affinoide Teilmenge von X. Man sagt U liegt im Inneren von X bezüglich Y, geschrieben $U \underset{Y}{\subset} X$, wenn es eine abgeschlossene Einbettung $g: X \to E_Y^n$ über Y gibt, so daß $g(U) \subseteq E_Y^n(r)$ für ein $r > 0$.
ii) Ein Morphismus analytischer k-Varietäten $f: X \to Y$ heißt eigentlich, wenn er separiert ist und es eine zulässige offene affinoide Überdeckung $\mathfrak{U}$ von Y und zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ zwei zulässige offene affinoide Überdeckungen $(V_i \mid i = 1, \ldots, n)$ und $(W_i \mid i = 1, \ldots, n)$ von $f^{-1}(U)$ gibt, so daß $V_i \underset{U}{\subset} W_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Zunächst vergleichen wir (3.13.8) und (3.13.15 i). Dazu dient uns das folgende Lemma.

Lemma 3.13.16. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen Räumen, der von endlichem Typ ist. Sei s eine topologisch nilpotente Einheit von $\mathcal{O}_Y(Y)$. Wir setzen $A := (\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_Y^+(Y))$ und wählen eine Darstellung $(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X)) = A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle / I$ ((2.4.12) und (2.4.13 ii)). Für jedes $a \in \tilde{A}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ bezeichnet $\bar{a}$ das Bild von a in $\tilde{A}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle / I$. Sie $\mathfrak{U}$ die Menge aller rationalen Teilmengen von X der Form $R(\frac{\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, s}{s})$, wobei $p_i \in A^+[X_i] \subseteq \tilde{A}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ ein normiertes Polynom ist für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt
i) Zu jedem $U, V \in \mathfrak{U}$ gibt es ein $W \in \mathfrak{U}$ mit $U \cup V \subseteq W$.
ii) $\mathring{X}^Y = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$.

Beweis: i) Seien $U, V \in \mathfrak{U}$ gegeben. Schreibe $U = R(\frac{\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, s}{s})$ und $V = R(\frac{\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, s}{s})$ mit $p_i, q_i \in A^+[X_i]$ normiert. Setze $W := R(\frac{\overline{p_1 q_1}, \ldots, \overline{p_n q_n}, s}{s})$. Dann ist $W \in \mathfrak{U}$. Da für jedes $x \in X$ gilt $v_x(\overline{p_i}) \geq 0$ und $v_x(\overline{q_i}) \geq 0$, ist $U \cup V \subseteq W$.
ii) Sei $p_i \in A^+[X_i]$ normiert für $i = 1, \ldots, n$. Wir zeigen, daß $U := R(\frac{\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, s}{s})$ in $\mathring{X}^Y$ liegt. Seien x ein Element von U und y eine Spezialisierung von x in $\bar{X}^Y$. Zu zeigen ist $y \in X$. Da $v_x(\overline{p_i}) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$, gilt auch $v_y(\overline{p_i}) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Da p_i normiert ist, folgt hieraus $v_y(\overline{X_i}) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Deshalb $y \in X$.
Sei $x \in \mathring{X}^Y$ gegeben. Wir zeigen, daß es ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt mit $x \in U$. Sei $y \in X$ die minimale Generalisierung von x ((3.3.9 i)). Seien k der Residuenkörper von $\mathcal{O}_X(X)$ zum Primideal $\operatorname{supp}(y)$, B der durch y gegebene Bewertungsring von k, l der Residuenkörper von B und $\lambda: B \to l$ die kanonische Abbildung. Unter der Abbildung $\mathcal{O}_X(X) \to k$ wird $\mathcal{O}_X^+(X)$ nach B abgebildet. Zusammen mit den Abbildungen $\tilde{A}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$ und λ erhalten wir somit eine Abbildung

$\varphi: A^+[X_1,\ldots,X_n] \to l$. Sei D ein Bewertungsring von l, der $\varphi(A^+)$ umfaßt. Die durch den Bewertungsring $\lambda^{-1}(D)$ gegebene Bewertung von $\mathcal{O}_X(X)$ definiert einen Punkt z von $\bar{X}^Y$, der eine Spezialisierung von y ist. Da x ein Element von $\mathring{X}^Y$ ist, liegt z in X. Also gilt $v_z(\overline{X_i}) \geq 0$ für $i = 1,\ldots,n$ und damit $\varphi(X_i) \in D$ für $i = 1,\ldots,n$. Deshalb folgt mit [B], VI.1.3. Th. 3, daß $\varphi(X_i)$ ganz über $\varphi(A^+)$ ist für $i = 1,\ldots,n$. Sei $p_i \in A^+[X_i]$ ein normiertes Polynom mit $\varphi(p_i) = 0$. Es ist dann $v_y(\overline{p_i}) > 0$. Da v_y Rang 1 hat ((3.3.9 ii)), gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $v_y(\overline{p_i^m}) > v_y(s)$ für $i = 1,\ldots,n$. Da x eine Spezialisierung von y ist, gilt $v_x(\overline{p_i^m}) > v_x(s)$ für $i = 1,\ldots,n$ und damit $x \in R(\frac{p_1^m,\ldots,p_n^m,s}{s}) \in \mathfrak{U}$.

Ist Y ein affinoider analytischer Raum, so bezeichnet E_Y^n den analytischen Raum zu dem affinoiden Ring $(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_Y^+(Y))\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$ und $E_Y^n(f_1,\ldots,f_k)$ die rationale Teilmenge $R(\frac{f_1,\ldots,f_k,1}{1})$ von E_Y^n.

Proposition 3.13.17. Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen Räumen, der von endlichem Typ ist, und s eine topologisch nilpotente Einheit von $\mathcal{O}_Y(Y)$. Für eine quasikompakte Teilmenge Z von X sind äquivalent

a) $Z \subseteq \mathring{X}^Y$.

b) Es gibt eine abgeschlossene Einbettung $g: X \hookrightarrow E_Y^n$ über Y, so daß $g(Z) \subseteq E_Y^n(\frac{X_1}{s},\ldots,\frac{X_n}{s})$.

c) Es gibt eine abgeschlossene Einbettung $g: X \hookrightarrow E_Y^n$ über Y und ein $l \in \mathbb{N}$, so daß $g(Z) \subseteq E_Y^n(\frac{X_1^l}{s},\ldots,\frac{X_n^l}{s})$.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Wir übernehmen die Notation aus (3.13.16). Da Z quasikompakt ist, gibt es nach (3.13.16) normierte Polynome $p_i \in A^+[X_i] (i = 1,\ldots,n)$, so daß $Z \subseteq R(\frac{p_1,\ldots,p_n,s}{s})$. Wir betrachten die affinoiden Ringe $A[X_1,\ldots,X_n]_U$ und $A[X_1,\ldots,X_{2n}]_V$ mit $U = (\{1\},\ldots,\{1\})$ und $V = (\{1\},\ldots,\{1\})$. Es gilt

(1) Der stetige Ringhomomorphismus affinoider Ringe $\varphi: A[X_1,\ldots,X_{2n}]_V \to A[X_1,\ldots,X_n]_U$ über A mit $\varphi(X_i) = p_i$ und $\varphi(X_{n+i}) = sX_i$ für $i = 1,\ldots,n$ ist eine Quotientenabbildung.

Denn: Da s eine Einheit in $\tilde{A}$ ist, ist $\varphi: \tilde{A}[X_1,\ldots,X_{2n}] \to \tilde{A}[X_1,\ldots,X_n]$ surjektiv. Da jedes p_i normiert ist, ist $A^+[X_1,\ldots,X_n]$ ganz über $\varphi(A^+[X_1,\ldots,X_{2n}])$. Es ist noch zu zeigen, daß φ eine offene Abbildung ist. Sei B ein Definitionsring von $\tilde{A}$, der s und die Koeffizienten von $p_1,\ldots,p_n$ enthält. φ gibt per Restriktion eine Abbildung $\psi: B[X_1,\ldots,X_{2n}] \to B[X_1,\ldots,X_n]$. Da $B[X_1,\ldots,X_n]$ ein endlich erzeugter Modul über $\mathrm{im}(\psi)$ ist und da $sX_i \in \mathrm{im}(\psi)$ für $i = 1,\ldots,n$, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $s^k \cdot B[X_1,\ldots,X_n] \subseteq \mathrm{im}(\psi)$. Die Ringe $B[X_1,\ldots,X_n]$ und $B[X_1,\ldots,X_{2n}]$ sind offen in $\tilde{A}[X_1, \ldots, X_n]$ und $\tilde{A}[X_1, \ldots, X_{2n}]$ und die Teilraumtopologie auf $B[X_1, \ldots, X_n]$ und $B[X_1, \ldots, X_{2n}]$ ist jeweils die s-adische Topologie. Deshalb ist φ offen.

Durch Übergang zu den Vervollständigungen ergibt φ eine Quotientenabbildung $\hat{\varphi}: A\langle X_1, \ldots, X_{2n}\rangle \to A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$. Die Komposition von $\hat{\varphi}$ mit dem Ringhomomorphismus $A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))$ liefert einen Ringhomomorphismus $\sigma: A\langle X_1, \ldots, X_{2n}\rangle \to (\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X^+(X))$. Sei $g: X \to E_Y^{2n}$ der durch σ definierte Morphismus. g ist eine abgeschlossene Einbettung mit $g(Z) \subseteq E_Y^{2n}(\frac{X_1}{s}, \ldots, \frac{X_{2n}}{s})$.

(b) $\Longrightarrow$ (c): klar.

(c) $\Longrightarrow$ (a): folgt aus (3.13.16).

Damit können wir nun (3.13.8) und (3.13.15 i) miteinander vergleichen.

Proposition 3.13.18. Seien $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen k-Varietäten und U eine offene affinoide Teilmenge von X. Wir betrachten den von f induzierten Morphismus analytischer Räume $r(f): r(X) \to r(Y)$. Dann sind äquivalent

a) $U \underset{Y}{\subset} X$.

b) $t(U) \subset r(\overset{\circ}{X})^{r(Y)}$.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): folgt aus (3.11.21 i) und (3.13.17).

(b) $\Longrightarrow$ (a): folgt aus (3.13.17).

Bemerkung. Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus zwischen affinoiden analytischen k-Varietäten. Wir betrachten X als Teilmenge von $r(X)$. Dann gilt

$$X \subseteq r(\overset{\circ}{X})^{r(Y)},$$

da jeder Punkt von X sowohl ein minimaler als auch ein maximaler Punkt von $\overline{r(X)}^{r(Y)}$ ist.

Proposition 3.13.19. Ein Morphismus analytischer k-Varietäten $f: X \to Y$ ist genau dann eigentlich, wenn der Morphismus analytischer Räume $r(f): r(X) \to r(Y)$ Kiehl-eigentlich ist.

Beweis: Ohne Einschränkung ist Y affinoid. Ist f eigentlich, so folgt aus (3.11.21 ii) und (3.13.18), daß $r(f)$ Kiehl-eigentlich ist. Wir nehmen nun an, daß $r(f)$ Kiehl-eigentlich ist. Nach (3.11.21 ii) ist f separiert. Wir fixieren ein $y \in r(Y)$. Zu jedem $x \in r(X)_y$ wählen wir offene affinoide Umgebungen X_x und Z_x von x in $r(X)$ und eine offene affinoide Umgebung Y_x von y in $r(Y)$, so daß $r(f)(X_x) \subseteq Y_x$ und $Z_x \subseteq \mathring{X}_x^{Y_x}$. Da $r(X)_y$ quasikompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_n \in r(X)_y$, so daß

(1) $r(X)_y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Z_{x_i}$.

Sei $\mathfrak{U}$ die Menge aller offenen affinoiden Umgebungen von y in $r(Y)$. Nach (1) gilt

$$r(f)^{-1}(\bigcap_{S \in \mathfrak{U}} S) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Z_{x_i}.$$

Deshalb gibt es ein $S \in \mathfrak{U}$, so daß $S \subseteq Y_{x_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $r(f)^{-1}(S) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Z_{x_i}$. Wir setzen $X_i := X_{x_i} \cap r(f)^{-1}(S)$ und $Z_i := Z_{x_i} \cap r(f)^{-1}(S)$ für $i = 1, \ldots, n$. Die X_i und Z_i sind offene affinoide Teilmengen von $r(X)$. Aus (3.13.12 iii) folgt $Z_i \subseteq \mathring{X}_i^S$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach der Diskussion im Anschluß von (3.4.20) gibt es eine offene affinoide Teilmenge U von Y und offene affinoide Teilmengen $V_1, \ldots, V_n$ und $W_1, \ldots, W_n$ von X, so daß $S = t(U)$ und $Z_i = t(V_i)$ und $X_i = t(W_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Es sind $\{V_1, \ldots, V_n\}$ und $\{W_1, \ldots, W_n\}$ zulässige Überdeckungen von $f^{-1}(U)$ und nach (3.13.18) gilt $V_i \underset{U}{\subset} W_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit ist gezeigt, daß f eigentlich ist.

Ich weiß nicht, ob jeder eigentliche Morphismus analytischer Räume Kiehl-eigentlich ist. Dei Schwierigkeit hierbei ist die Konstruktion möglichst großer offener affinoider Teilmengen (siehe (3.13.14)). Dieses Problem hat Lütkebohmert in der geometrischen Situation über einem diskret bewerteten Körper gelöst. Aus seinem Ergebnis folgt

Satz 3.13.20. Sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus analytischer Räume, wobei Y geometrisch über einem diskret Rang 1 bewerteten Körper k ist. Dann ist f Kiehl-eigentlich.

Beweis: Ohne Einschränkung ist Y affinoid. Sei B ein Definitionsring von $\mathcal{O}_Y(Y)$, der topologisch von endlichem Typ über k° ist. Sei Z das Objekt von $\mathcal{K}$, das durch $(\mathcal{O}_Y(Y), B)$ gegeben wird. Es ist dann $Y = t(Z)$. Nach (3.12.6) können wir annehmen $X \doteq t(S)$ und $f = t(g)$, wobei S ein Objekt von $\mathcal{K}$ und $g: S \to Z$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ ist, so daß der zu g gehörige Morphismus formaler Schemata $\varphi: U := (S, \mathcal{O}_S) \to (Z, \mathcal{O}_Z) =: V$ eigentlich ist. Seien $U \otimes k$ und $V \otimes k$ die zu U und V gehörigen analytischen Varietäten über k und $\varphi \otimes k: U \otimes k \to V \otimes k$ der durch φ induzierte Morphismus. Nach [Lü] ist $\varphi \otimes k$ eigentlich. Mit (3.13.19) erhalten wir, daß f Kiehl-eigentlich ist.

Abschließend noch eine einfache Bemerkung im Zusammenhang mit der Steinfaktorisierung analytischer Morphismen.

Proposition 3.13.21. Sei $f: X \to Y$ ein quasikompakter quasiseparierter Morphismus analytischer Räume. Für jedes $y \in Y$ sind äquivalent
a) Die analytische Faser X_y ist zusammenhängend.
b) Der Ring $(f_*\mathcal{O}_X)_y$ ist zusammenhängend.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Seien U eine offene affinoide Umgebung von y in Y und e ein idempotentes Element $(f_*\mathcal{O}_X)(U)$. Die offene Menge $f^{-1}(U)$ ist die disjunkte Vereinigung der beiden offenen Mengen $U_0 := \{x \in f^{-1}(U) \mid e_x = 0 \text{ in } \mathcal{O}_{X,x}\}$ und $U_1 := \{x \in f^{-1}(U) \mid e_x = 1 \text{ in } \mathcal{O}_{X,x}\}$. Da X_y zusammenhängend ist, ist $U_0 \cap X_y = \emptyset$ oder $U_1 \cap X_y = \emptyset$. Sei etwa $U_0 \cap X_y = \emptyset$. Sei $\mathfrak{W}$ die Menge aller offenen quasikompakten Umgebungen von y in U. Wegen $\emptyset = U_0 \cap X_y = U_0 \cap \bigcap_{V \in \mathfrak{W}} f^{-1}(V)$ gibt es ein $V \in \mathfrak{W}$ mit $U_0 \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, d.h. $f^{-1}(V) \subseteq U_1$. Also $e \mid V = 1$ in $(f_*\mathcal{O}_X)(V)$.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Angenommen, X_y ist nicht zusammenhängend. Schreibe X_y als die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen U_0 und U_1. Sei U eine offene affinoide Umgebung von y in Y und sei $\mathfrak{W}$ die Menge aller offenen quasikompakten Umgebungen von y in U. Da U_0 und U_1 quasikompakt sind, gibt es offene quasikompakte Teilmengen W_0 und W_1 von $f^{-1}(U)$ mit $U_0 = W_0 \cap X_y$ und $U_1 = W_1 \cap X_y$. Wegen $\emptyset = W_0 \cap W_1 \cap X_y = W_0 \cap W_1 \cap \bigcap_{V \in \mathfrak{W}} f^{-1}(V)$ und $\bigcap_{V \in \mathfrak{W}} f^{-1}(V) = X_y \subseteq W_0 \cup W_1$ gibt es ein $V \in \mathfrak{W}$ mit $W_0 \cap W_1 \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ und $f^{-1}(V) \subseteq W_0 \cup W_1$, d.h. $f^{-1}(V)$ ist die disjunkte Vereinigung der beiden offenen Teilmengen $W_0 \cap f^{-1}(V)$ und $W_1 \cap f^{-1}(V)$. Sei e das Element von $(f_*\mathcal{O}_X)(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ mit $e \mid W_0 \cap f^{-1}(V) = 0$ und $e \mid W_1 \cap f^{-1}(V) = 1$. Es ist dann e_y ein idempotentes Element von $(f_*\mathcal{O}_X)_y$. Da $U_0 \neq \emptyset$ und $U_1 \neq \emptyset$, ist e_y weder das Nullelement noch das Einselement in $(f_*\mathcal{O}_X)_y$. Widerspruch.

In [BGR], 9.6.3 Lemma 4 wird mit Hilfe des Satzes über formale Funktionen bewiesen

$(*)$ Sei $f: X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus analytischer Varietäten, so daß $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ bijektiv ist. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Faser X_y zusammenhängend.

Zu dem Morphismus $f: X \to Y$ in $(*)$ betrachten wir den Morphismus analytischer Räume $r(f): r(X) \to r(Y)$. Der Garbenmorphismus $\mathcal{O}_{r(Y)} \to r(f)_*\mathcal{O}_{r(X)}$ ist bijektiv. Wir fassen Y als Teilmenge von $r(Y)$ auf. Für jedes $y \in Y$ gilt $r(X_y) = r(X)_y$. Da nach (3.13.21) $r(X)_y$ zusammenhängend ist, erhalten wir nochmals die Aussage $(*)$. Wie der Beweis von (3.13.21) zeigt, ist diese Begründung von $(*)$ ein rein topologisches

Argument. Weiterhin zeigt (3.13.21), daß (*) schon gilt, wenn man, statt f eigentlich, nur fordert f quasikompakt und quasisepariert.

3.14. Beweis des Kohärenzsatzes

Dieser Abschnitt dient dem Beweis von (3.12.13). Die Aussagen (3.12.14), (3.12.15) und (3.12.17) ergeben sich dabei als Korollare. Wir greifen Raynaud's Anregung aus [R] auf und führen (3.12.13) auf Grothendieck's Kohärenzsatz für formale Schemata zurück. Der Beweisplan von (3.12.13) ist der folgende:

a) Mit einigen Limesschlüssen und Kompaktheitsargumenten reduzieren wir (3.12.13) auf den Fall, daß $\mathcal{O}_Y^+(Y)$ der ganze Abschluß eines noetherschen Definitionsrings B von $\mathcal{O}_Y(Y)$ ist. Dabei können wir B so wählen, daß $\mathcal{O}_Y(Y)$ eine endlich erzeugte B-Algebra ist.
b) Nach (a) gilt $Y = t(S)$, wobei S ein affines Objekt der Kategorie $\mathcal{K}$ ist, so daß $\mathcal{A}_S$ als $\mathcal{O}_S$-Algebra von endlichem Typ ist. Wir wenden nun (3.12.6) an und können dann annehmen: $X = t(R)$ und $f = t(g)$, wobei R ein Objekt von $\mathcal{K}$ und $g: R \to S$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ ist, so daß $\mathcal{A}_R$ als $\mathcal{A}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_R$-Modul von endlichem Typ ist und der zu g gehörige Morphismus formaler Schemata $(R, \mathcal{O}_R) \to (S, \mathcal{O}_S)$ eigentlich ist.
c) Sei $\pi: t(R) \to R$ der kanonische Morphismus in $\bar{\mathcal{K}}$. Nach (3.6.20) und (3.6.2) gilt $R^n\pi_*\mathcal{F} = 0$ für jedes $n > 0$, und deshalb $H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(R, \pi_*\mathcal{F})$. Nach dem Kohärenzsatz für formale Schemata ist $H^p(R, \mathcal{G})$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_S(S)$-Modul für jeden kohärenten $\mathcal{O}_R$-Modul $\mathcal{G}$. In unserer Situation ist $\pi_*\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{A}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_R$-Modul. Man kann den Kohärenzsatz für formale Schemata verallgemeinern auf kohärente $\mathcal{A}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_R$-Moduln. Wir erhalten, daß $H^p(R, \pi_*\mathcal{F})$ ein endlich erzeugter $\mathcal{A}_S(S)$-Modul ist.
d) Es ist noch zu zeigen, daß für jede rationale Teilmenge U von Y gilt: $H^p(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_Y(U)$. Eine wesentliche Rolle beim Beweis hiervon spielen die schon in (c) benutzte Verallgemeinerung des Kohärenzsatzes für formale Schemata und die Beweismethoden aus [EGA], III.4.1.

Seien A ein vollständiger f-adischer Ring, der einen noetherschen Definitionsring besitzt, B und D offene Unterringe von A mit $B \subseteq D \subseteq A^\circ$ und $\mathfrak{N}$ die Menge aller Unterringe E von A, so daß $B \subseteq E \subseteq D$ und E endlich erzeugt über B ist.
Für jedes $E \in \mathfrak{N} \cup \{D\}$ sei $\mathrm{Spa}(A, E)$ der adische Raum zu dem affinoden Ring (A, E^c). Sind X ein adischer Raum über $\mathrm{Spa}(A, B)$ und E ein Element von $\mathfrak{N} \cup \{D\}$, so bezeichnet X_E den adischen Raum $X \times_{\mathrm{Spa}(A,B)} \mathrm{Spa}(A, E)$ und $p_E = p_{E,X}$ die Projektion $X_E \to X$. Sind $f: X \to Y$ ein Morphismus adischer Räume über $\mathrm{Spa}(A, B)$ und E ein Element von $\mathfrak{N} \cup \{D\}$, so bezeichnet f_E den von f induzierten

Morphismus $X_E \to Y_E$. In dem folgenden Lemma stellen wir einige offensichtliche Eigenschaften zusammen.

(A.1) i) $p_E: X_E \to X$ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.
ii) $\mathcal{O}_X \to (p_E)_*\mathcal{O}_X$ ist ein Isomorphismus topologischer Garben.
iii) Ist $E \in \mathfrak{R}$, so ist $p_E(X_E)$ offen und konstruierbar in X.
iv) $p_D(X_D)$ ist prokonstruierbar in X und es gilt $p_D(X_D) = \bigcap_{E \in \mathfrak{R}} p_E(X_E)$.

(A.2) Seien X und Y zwei quasiseparierte adische Räume von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$. Dann gilt
i) Sind $f, g: X \rightrightarrows Y$ zwei Morphismen über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$ mit $f_D = g_D$, so gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$ mit $f_E = g_E$.
ii) Zu jedem Isomorphismus $f: X_D \to Y_D$ über $\mathrm{Spa}\,(A, D)$ gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$ und einen Isomorphismus $g: X_E \to Y_E$ über $\mathrm{Spa}\,(A, E)$, so daß $g_D: X_D = (X_E)_D \to (Y_E)_D = Y_D$ mit f übereinstimmt.

Beweis: i) Zu jedem $E \in \mathfrak{R} \cup \{D\}$ haben wir die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_E & \xrightarrow{p_{E,X}} & X \\ f_E \downarrow & & \downarrow f \\ Y_E & \xrightarrow[p_{E,Y}]{} & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X_E & \xrightarrow{p_{E,X}} & X \\ g_E \downarrow & & \downarrow g \\ Y_E & \xrightarrow[p_{E,Y}]{} & Y \end{array}$$

Sei $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine offene affionide Überdeckung von Y. Aus $f_D = g_D$ folgt $p_{D,X}^{-1}(f^{-1}(U_i)) = p_{D,X}^{-1}(g^{-1}(U_i))$. Deshalb gibt es nach (A.1) ein $E \in \mathfrak{R}$ mit $p_{E,X}^{-1}(f^{-1}(U_i))$
$= p_{E,X}^{-1}(g^{-1}(U_i))$ für $i = 1, \ldots, n$, d.h.

(1) $f_E^{-1}(p_{E,Y}^{-1}(U_i)) = g_E^{-1}(p_{E,Y}^{-1}(U_i)) =: V_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aus $f_D = g_D$ und (A.1 ii) folgt

(2) f_E und g_E induzieren denselben Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y_E}(p_{E,Y}^{-1}(U_i)) \to \mathcal{O}_{X_E}(V_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aus (1) und (2) folgt $f_E = g_E$.

ii) Wir führen den Beweis in drei Schritten.

1. Schritt: X und Y affinoid.

Wir wählen $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_X(X)$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{O}_Y(Y)$ mit $\mathcal{O}_X^+(X) = \overline{B[a_1, \ldots, a_n]}^c$ und $\mathcal{O}_Y^+(Y) = \overline{B[b_1, \ldots, b_n]}^c$. Der Isomorphismus $f: X_D \to Y_D$ wird gegeben durch einen Isomorphismus $h: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ über A mit $h((\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot D)^c) = (\mathcal{O}_X^+(X) \cdot D)^c$. Sei E ein Element von $\mathfrak{R}$, so daß $h(b_i) \in (\mathcal{O}_X^+(X) \cdot E)^c$ und $h^{-1}(a_i) \in (\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot E)^c$ für $i = 1, \ldots, n$. Es gilt dann $h((\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot E)^c) \subseteq (\mathcal{O}_X^+(X) \cdot E)^c$ und $h^{-1}((\mathcal{O}_X^+(X) \cdot E)^c) \subseteq (\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot E)^c$. Wir haben also einen Isomorphismus affinoider Ringe $(\mathcal{O}_Y(Y), (\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot E)^c) \to (\mathcal{O}_X(X), (\mathcal{O}_X^+(X) \cdot E)^c)$, der einen Isomorphismus $g: X_E \to Y_E$ induziert mit $g_D = f$.

2. Schritt: X beliebig und Y affinoid.

Sei $(U_j \mid j \in J)$ eine offene affinoide Überdeckung von X. Sei $(V_i \mid i \in I)$ eine endliche Überdeckung von Y_D durch rationale Teilmengen von Y_D, die die Überdeckung $(f(p_{D,X}^{-1}(U_j)) \mid j \in J)$ verfeinert, mit Verfeinerungsabbildung $\varphi: I \to J$. Nach (A.1 ii) und (3.8.4 ii) gibt es zu jedem $i \in I$ eine rationale Teilmenge X_i von $U_{\varphi(i)}$ und eine rationale Teilmenge Y_i von Y mit $p_{D,X}^{-1}(X_i) = f^{-1}(V_i)$ und $p_{D,Y}^{-1}(Y_i) = V_i$. Es ist $p_{D,X}^{-1}(\bigcup_{i \in I} X_i) = X_D$ und $p_{D,Y}^{-1}(\bigcup_{i \in I} Y_i) = Y_D$. Deshalb gibt es nach (A.1) ein $E \in \mathfrak{R}$, so daß $p_{E,X}^{-1}(\bigcup_{i \in I} X_i) = X_E$ und $p_{E,Y}^{-1}(\bigcup_{i \in I} Y_i) = Y_E$. Indem wir X und Y durch X_E und Y_E ersetzen, können wir annehmen $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ und $\bigcup_{i \in I} Y_i = Y$. Für jedes $i \in I$ gibt f per Restriktion einen Isomorphismus $f_i: (X_i)_D = p_{D,X}^{-1}(X_i) \to p_{D,Y}^{-1}(Y_i) = (Y_i)_D$. Nach Schritt 1 können wir X und Y durch X_E und Y_E ersetzen ($E \in \mathfrak{R}$ geeignet gewählt), so daß es dann zu jedem $i \in I$ einen Isomorphismus $g_i: X_i \to Y_i$ gibt mit $f_i = (g_i)_D$. Für jedes $i, j \in I$ gilt $p_{D,Y}^{-1}(g_i(X_i \cap X_j)) = p_{D,Y}^{-1}(Y_i \cap Y_j)$. Durch Übergang zu X_E, Y_E ($E \in \mathfrak{R}$ geeignet gewählt) können wir nach (A.1) annehmen $g_i(X_i \cap X_j) = Y_i \cap Y_j$ für jedes $i, j \in I$. Also induzieren g_i und g_j per Restriktion Isomorphismen $g_{ij}: X_i \cap X_j \to Y_i \cap Y_j$ und $g_{ji}: X_i \cap X_j \to Y_i \cap Y_j$. Ein letztmaliges Übergehen zu einem geeigneten $E \in \mathfrak{R}$ und Anwendung von (i) liefert $g_{ij} = g_{ji}$ für alle $i, j \in I$. Also verkleben sich die g_i zu einem Isomorphismus $g: X \to Y$. Es gilt $g_D = f$.

3. Schritt: X und Y beliebig.

Wir setzen voraus, daß die Behauptung bewiesen ist, falls sich Y durch n offene affinoide Teilmengen überdecken läßt, und nehmen nun an, daß sich Y durch $n+1$ offene affinoide Teilmengen $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ überdecken läßt. Wir setzen $Z := Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$. Seien U und V offene quasikompakte Teilmengen von X mit $p_{D,X}^{-1}(U) = f^{-1}(p_{D,Y}^{-1}(Z))$

und $p_{D,X}^{-1}(V) = f^{-1}(p_{D,Y}^{-1}(Y_{n+1}))$. Wegen $p_{D,X}^{-1}(U \cup V) = X_D$ können wir ohne Einschränkung annehmen $U \cup V = X$ (nach Übergang zu geeignetem $E \in \mathfrak{R}$). Nach Induktionsvoraussetzung und Schritt 2 können wir annehmen, daß es Isomorphismen $l: U \to Z$ und $h: V \to Y_{n+1}$ gibt mit $l_D = f \mid p_{D,X}^{-1}(U): p_{D,X}^{-1}(U) \to p_{D,Y}^{-1}(Z)$ und $h_D = f \mid p_{D,X}^{-1}(V): p_{D,X}^{-1}(V) \to p_{D,Y}^{-1}(Y_{n+1})$. Wie im Schritt 2 zeigt man, daß nach Übergang zu einem geeigneten $E \in \mathfrak{R}$ gilt: $l(U \cap V) = Z \cap Y_{n+1} = h(U \cap V)$ und $l \mid U \cap V = h \mid U \cap V$. Also verkleben sich l und h zu einem Isomorphismus $g: X \to Y$ mit $g_D = f$.

(A.3) Sei X ein affinoider adischer Raum von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, D)$. Dann gibt es einen affinoiden adischen Raum Y von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$, so daß X und Y_D $\mathrm{Spa}\,(A, D)$-isomorph sind.

Beweis: (2.4.9)

(A.4) Sei X ein quasiseparierter adischer Raum von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, D)$. Dann gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$ und einen quasiseparierten adischen Raum Y von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, E)$, so daß X und Y_D $\mathrm{Spa}\,(A, D)$-isomorph sind.

Beweis: Wir nehmen an, daß (A.4) gilt, wenn X durch n offene affinoide Teilmengen überdeckt werden kann, und nehmen nun an, daß X durch $n + 1$ offene affinoide Teilmengen $X_1, \ldots, X_{n+1}$ überdeckt wird. Sei $Z := X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Nach Induktionsvoraussetzung und (A.3) können wir annehmen, daß es quasiseparierte Räume R und S von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$ und $\mathrm{Spa}\,(A, D)$-Isomorphismen $f: R_D \to Z$ und $g: S_D \to X_{n+1}$ gibt. Seien U und V offene quasikompakte Teilmengen von R und S mit $p_{D,R}^{-1}(U) = f^{-1}(Z \cap X_{n+1})$ und $p_{D,S}^{-1}(V) = g^{-1}(Z \cap X_{n+1})$. Sei $h: p_{D,R}^{-1}(U) \to p_{D,S}^{-1}(V)$ die Komposition der beiden Isomorphismen $f: f^{-1}(Z \cap X_{n+1}) \to Z \cap X_{n+1}$ und $g^{-1}: Z \cap X_{n+1} \to g^{-1}(Z \cap X_{n+1})$. Wegen $p_{D,R}^{-1}(U) = U_D$ und $p_{D,S}^{-1}(V) = V_D$ können wir nach (A.2 ii) annehmen, daß es einen $\mathrm{Spa}\,(A, B)$-Isomorphismus $l: U \to V$ gibt mit $h = l_D$. Sei Y der adische Raum über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$, der durch Verkleben von R und S längs l entsteht. Y ist quasisepariert und von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$ und Y_D ist $\mathrm{Spa}\,(A, D)$-isomorph zu X.

(A.5) Sei X ein quasiseparierter adischer Raum von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$, so daß X_D affinoid ist. Dann gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$, so daß X_E affinoid ist.

Beweis: Nach (A.3) gibt es einen affinoiden adischen Raum Y von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}\,(A, B)$, so daß X_D und Y_D $\mathrm{Spa}\,(A, D)$-isomorph sind. Nach (A.2 ii) gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$, so daß X_E und Y_E isomorph sind. Deshalb ist X_E affinoid.

(A.6) Seien X und Y quasiseparierte adische Räume von endlichem Typ über Spa(A, B) und $f: X \to Y$ ein Spa(A, B)-Morphismus, so daß $f_D: X_D \to Y_D$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Dann gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$, so daß $f_E: X_E \to Y_E$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

Beweis: Wir führen den Beweis in drei Schritten.
1. Schritt: X und Y affinoid.
Sei $g: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ der durch f induzierte Ringhomomorphismus. Nach (3.6.27) ist g eine Quotientenabbildung mit $g(\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot D)^c = (\mathcal{O}_X^+(X) \cdot D)^c$. Wir wählen $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $\mathcal{O}_X^+(X) = \overline{B[a_1, \ldots, a_n]}^c$. Sei E ein Element von $\mathfrak{R}$, so daß $a_i \in g(\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot E)^c$ für $i = 1, \ldots, n$. Es ist dann $g(\mathcal{O}_Y^+(Y) \cdot E)^c = (\mathcal{O}_X^+(X) \cdot E)^c$ und deshalb f_E eine abgeschlossene Einbettung.
2. Schritt: X beliebig und Y affinoid.
Nach (3.6.27) ist X_D affinoid. Nach (A.5) können wir annehmen, daß X affinoid ist. Die Behauptung folgt nun nach Schritt 1.
3. Schritt: X und Y beliebig.
Sei $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ eine offene affinoide Überdeckung von Y. Nach Schritt 2 können wir annehmen, daß alle Restriktionen von f $f^{-1}(U_i) \to U_i$ abgeschlossene Einbettungen sind. Nach (3.6.25) ist f eine abgeschlossene Einbettung.

(A.7) Sei X ein quasiseparierter adischer Raum von endlichem Typ über Spa(A, B), so daß X_D separiert (über Spa(A, D)) ist. Dann gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$, so daß X_E separiert (über Spa(A, E)) ist.

Beweis: (A.6)

(A.8) Sei X ein adischer Raum. Mit X_v bezeichnen wir die Menge aller bB von X. Wir versehen X_v mit der Topologie, die von den Mengen der Form $D(U, f, g) := \{A \in X_v \mid$ der Träger x von A liegt in $U, f(x) \in A$ und $g(x) \in A^+\}$ erzeugt wird, wobei U eine offene Teilmenge von X und $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$. Jeder Morphismus adischer Räume $f: X \to Y$ induziert eine stetige Abbildung $f_v: X_v \to Y_v, A \mapsto f_v(A)$. Ist $f: X \to Y$ eine offene Einbettung adischer Räume, so ist $f_v: X_v \to Y_v$ eine offene Einbettung topologischer Räume. Mit den Methoden aus Kapitel 1 (insbesondere (1.3)) kann man zeigen:

Sei X ein affinoider adischer Raum. Dann ist X_v ein spektraler topologischer Raum. Für jede rationale Teilmenge U von X und jedes $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ ist die Menge $D(U, f, g)$ konstruierbar in X_v.

(A.9) Sei X ein quasiseparierter adischer Raum von endlichem Typ über $\mathrm{Spa}(A,B)$, so daß X_D eigentlich über $\mathrm{Spa}(A,D)$ ist. Dann gibt es ein $E \in \mathfrak{R}$, so daß X_E eigentlich über $\mathrm{Spa}(A,E)$ ist.

Beweis: Zunächst zeigen wir

(1) Sei $f: R \to S$ ein Morphismus adischer Räume, wobei S affinoid und f von endlichem Typ und quasisepariert ist. Dann ist R_v ein spektraler Raum und die Menge $W := \{A \in R_v \mid A$ hat kein Zentrum auf R und $f_v(A)$ hat ein Zentrum auf $S\}$ prokonstruierbar in R_v.

Denn: Da R quasisepariert und quasikompakt ist, folgt aus (A.8), daß R_v ein spektraler Raum ist. Sei $\{U_1,\dots,U_n\}$ eine offene affinoide Überdeckung von R. Wir setzen $T := \{A \in R_v \mid f_v(A)$ hat ein Zentrum auf $S\}$, $H := \{A \in R_v \mid A$ hat ein Zentrum auf $R\}$ und $H_i := \{A \in R_v \mid A$ hat ein Zentrum auf R, das in U_i liegt $\}$ $(i = 1,\dots,n)$. Es gilt $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$, $H \subseteq T$ und $W = T \setminus H$. Es genügt deshalb zu zeigen

α) T ist prokonstruierbar in R_v.

β) H_i ist konstruierbar in T für $i = 1,\dots,n$.

Zu (α): Nach (3.11.9) gilt $T = \{A \in R_v \mid f^*(s)(\mathrm{supp}(A)) \in A$ für jedes $s \in \mathcal{O}_S(S)$ und $f^*(s)(\mathrm{supp}(A)) \in A^+$ für jedes $s \in \mathcal{O}_S^+(S)\}$. Aus (A.8) folgt, daß T prokonstruierbar in R_v ist.

Zu (β): Sei $i \in \{1,\dots,n\}$ fixiert. Wir wählen Elemente $a_1,\dots,a_m$ und $b_1,\dots,b_m$ von $\mathcal{O}_R(U_i)$, so daß $\mathcal{O}_R(U_i) = \overline{\mathcal{O}_S(S)[a_1,\dots,a_m]}$ und $\mathcal{O}_R^+(U_i) = \overline{\mathcal{O}_S^+(S)[b_1,\dots,b_m]}^c$. Dann gilt $H_i = \{A \in T \mid \mathrm{supp}(A) \in U_i, a_i(\mathrm{supp}(A)) \in A$ und $b_i(\mathrm{supp}(A)) \in A^+$ für $i = 1,\dots,m\}$. Deshalb ist H_i konstruierbar in T.

Nach (A.1) und (A.8) können wir $(X_E)_v$ als prokonstruierbare Teilmenge von X_v auffassen. Sei $W_E \subseteq X_v$ die Menge $\{Q \in (X_E)_v \mid Q$ hat kein Zentrum auf X_E und Q hat ein Zentrum auf $\mathrm{Spa}(A,E)\}$. Es gilt

(2) $W_{E'} \subseteq W_E$ für $E, E' \in \mathfrak{R} \cup \{D\}$ mit $E \subseteq E'$ und

$$W_D = \bigcap_{E \in \mathfrak{R}} W_E.$$

Denn: Seien E, E' Elemente von $\mathfrak{R} \cup \{D\}$ mit $E \subseteq E'$. Sei $Q \in W_{E'}$ gegeben. Da Q ein Zentrum auf $\mathrm{Spa}(A,E')$ hat, hat Q auch ein Zentrum auf $\mathrm{Spa}(A,E)$. Angenommen, Q hat ein Zentrum z auf X_E. Sei U eine offene affinoide Umgebung von z in X_E. Da $\mathcal{O}_{X_{E'}}(U \cap X_{E'}) = \mathcal{O}_{X_E}(U)$, $\mathcal{O}^+_{X_{E'}}(U \cap X_{E'}) = (\mathcal{O}^+_{X_E}(U) \cdot E')^c$ und Q ein Zentrum auf $\mathrm{Spa}(A,E')$ hat, hat Q ein Zentrum auf $U \cap X_{E'}$, Widerspruch. Also gilt $W_{E'} \subseteq W_E$.

Wie eben gezeigt, gilt $W_D \subseteq \bigcap_{E \in \mathfrak{N}} W_E$. Sei $Q \in \bigcap_{E \in \mathfrak{N}} W_E$ gegeben. Es ist dann $Q \in (X_D)_v$. Da Q ein Zentrum auf Spa(A, E) für alle $E \in \mathfrak{N}$ hat, hat Q ein Zentrum auf Spa(A, D). Q hat kein Zentrum auf X_D, da Q kein Zentrum auf $X = X_B$ hat. Also $\bigcap_{E \in \mathfrak{N}} W_E \subseteq W_D$.

Nach (A.7) können wir annehmen, daß X separiert (über Spa(A, B)) ist. Nach (3.12.2) ist $W_D = \emptyset$. Für jedes $E \in \mathfrak{N} \cup \{D\}$ ist nach (1) W_E prokonstruierbar in $(X_E)_v$ und damit auch prokonstruierbar in dem spektralen Raum X_v. Nach (2) gibt es ein $E \in \mathfrak{N}$ mit $W_E = \emptyset$. Es ist X_E eigentlich über Spa(A, E) nach (3.11.9) und (3.12.2).

(A.10) Sei X ein adischer Raum über Spa(A, B). Wir betrachten das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_D & \xrightarrow{p} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Spa}(A, D) & \xrightarrow[u]{} & \mathrm{Spa}(A, B) \end{array}$$

Es gilt

i) Der Funktor $\mathcal{F} \mapsto p_*\mathcal{F}$ ist eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_{X_D}$-Moduln von endlichem Typ und der Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln von endlichem Typ. Der dazu quasiinverse Funktor ist $\mathcal{G} \mapsto p^*\mathcal{G}$.

ii) Seien $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_{X_D}$-Modul von endlichem Typ und $\mathcal{G}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Typ, die einander gemäß (i) entsprechen. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $H^p(X_D, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{G})$.

iii) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ wie in (ii). Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ sind die kanonischen Garbenmorphismen $u^* R^p f_* \mathcal{G} \to R^p g_* \mathcal{F}$ und $R^p f_* \mathcal{G} \to u_* R^p g_* \mathcal{F}$ Isomorphismen.

Beweis: (i) und (ii) folgen aus (3.6.2) und (3.6.20). (iii) folgt aus (ii) und den Überlegungen aus dem Beweis von (3.6.17 i).

Die Punkte (A.1) - (A.10) dienen uns für den Reduktionsschritt (a) in der obigen Beweisskizze. Die nachfolgenden Punkte (B.1) - (B.8) benötigen wir für die Beweisschritte (c) und (d).

Seien A ein Ring und I ein Ideal von A. Ein A-Modul M heißt I-Torsionsmodul, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $I^n \cdot x = 0$. Eine A-Modulprägarbe (bzw.

A-Modulgarbe) $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X heißt I-Torsionsprägarbe (bzw. I-Torsionsgarbe), wenn $\mathcal{G}(U)$ ein I-Torsionsmodul ist für jede offene Teilmenge U von X. Ist $\mathcal{G}$ eine A-Modulgarbe auf einem noetherschen topologischen Raum X, so daß $\mathcal{G}(U)$ ein I-Torsionsmodul für jedes Element U einer Basis der Topologie von X ist, so ist $\mathcal{G}$ eine I-Torsionsgarbe. Ist $\mathcal{G}$ eine I-Torsionsprägarbe auf einem noetherschen topologischen Raum, so ist die zu $\mathcal{G}$ assoziierte Garbe eine I-Torsionsgarbe.

(B.1) Für einen noetherschen topologischen Raum X gilt

i) Ist $\mathcal{G}$ eine I-Torsionsgarbe auf X, so ist $H^p(X,\mathcal{G})$ ein I-Torsionsmodul für jedes $p \in \mathbb{N}_0$.

ii) Sind $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ A-Modulgarben auf X, so daß $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ eine I-Torsionsgarbe ist, so ist coker $(H^p(X,\mathcal{G}) \to H^p(X,\mathcal{F}))$ ein I-Torsionsmodul für jedes $p \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{G}_n$ die Untergarbe von $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G}_n(U) = \{x \in \mathcal{G}(U) \mid I^n \cdot x = 0\}$. Dann gilt $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$ und $\mathcal{G} = \varinjlim_n \mathcal{G}_n$. Da X noethersch ist, folgt $H^p(X,\mathcal{G}) = \varinjlim_n H^p(X,\mathcal{G}_n)$. Es ist $I^n \cdot H^p(X,\mathcal{G}_n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
ii) Es ist coker $(H^p(X,\mathcal{G}) \to H^p(X,\mathcal{F}))$ ein Untermodul von $H^p(X,\mathcal{F}/\mathcal{G})$. Nach (i) ist $H^p(X,\mathcal{F}/\mathcal{G})$ ein I-Torsionsmodul.

(B.2) Seien $B = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} B_{m,n}$ ein bigraduierter Ring mit $B = B_{0,0}[B_{1,0} \cup B_{0,1}]$ und $M = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} M_{m,n}$ ein endlich erzeugter bigraduierter B-Modul. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß für alle $(r,s),(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\min\{k,r\} \leq x \leq r$ und $\min\{k,s\} \leq y \leq s$ gilt $M_{r,s} = B_{r-x,s-y} \cdot M_{x,y}$.

Beweis: Aus $B = B_{0,0}[B_{1,0} \cup B_{0,1}]$ folgt

(1) $B_{m,n} = 0$ für $m \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ oder $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ und $B_{m,n} \cdot B_{p,q} = B_{m+p,n+q}$ für $m,n,p,q \in \mathbb{N}_0$.

Sei $d_1,\ldots,d_l$ ein Erzeugendensystem von M über B mit $d_i \in M_{m_i,n_i}$ für $i \in L := \{1,\ldots,l\}$. Wir setzen $k := \max\{m_1,\ldots,m_l,n_1,\ldots,n_l\}$. Seien $(r,s),(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\min\{k,r\} \leq x \leq r$ und $\min\{k,s\} \leq y \leq s$ und $f \in M_{r,s}$ gegeben. Schreibe $f = \sum_{i\in L} b_i d_i$ mit $b_i \in B$. Wir können annehmen $b_i \in B_{r-m_i,s-n_i}$ für $i = 1,\ldots,l$. Sei $K := \{i \in L \mid m_i \leq r \text{ und } n_i \leq s\} = \{i \in L \mid m_i \leq \min\{k,r\} \text{ und } n_i \leq \min\{k,s\}\}$. Nach (1) gilt $f = \sum_{i\in K} b_i d_i$ und läßt sich jedes b_i mit $i \in K$ schreiben als Summe von Elementen der Form $c \cdot d$ mit $c \in B_{r-x,s-y}$ und $d \in B_{x-m_i,y-n_i}$. Hieraus folgt $f \in B_{r-x,s-y} \cdot M_{x,y}$.

(B.3) Sei $K^{\cdot}$ ein Komplex abelscher topologischer Gruppen. Die Differentiale von $K^{\cdot}$ seien strikt und jedes K^p habe ein abzählbares Fundamentalsystem von Nullumgebungen. Wir versehen $Z^p(K^{\cdot})$ und $B^p(K^{\cdot})$ mit der Teilraumtopologie von K^p, $Z^p((K^{\cdot})^\wedge)$ und $B^p((K^{\cdot})^\wedge)$ mit der Teilraumtopologie von $(K^p)^\wedge$, und $H^p(K^{\cdot})$ und $H^p((K^{\cdot})^\wedge)$ mit der Quotiententopologie von $Z^p(K^{\cdot}) \to H^p(K^{\cdot})$ und $Z^p((K^{\cdot})^\wedge) \to H^p((K^{\cdot})^\wedge)$. Dann ist $H^p((K^{\cdot})^\wedge)$ vollständig und die kanonische Abbildung $H^p(K^{\cdot}) \to H^p((K^{\cdot})^\wedge)$ setzt sich fort zu einem Ismorphismus $(H^p(K^{\cdot}))^\wedge \xrightarrow{\sim} H^p((K^{\cdot})^\wedge)$.

Beweis: Wir wenden [B], III.2.12 Lemma 2 an. Alle in diesem Beweis auftretenden Abbildungen sind strikt. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to Z^p(K^{\cdot}) \to K^p \to K^{p+1}$$

erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \to (Z^p(K^{\cdot}))^\wedge \to (K^p)^\wedge \to (K^{p+1})^\wedge.$$

Also gilt

(1) $Z^p((K^{\cdot})^\wedge) = (Z^p(K^{\cdot}))^\wedge$.

Aus

$$K^{p-1} \twoheadrightarrow B^p(K^{\cdot}) \hookrightarrow K^p$$

folgt

$$(K^{p-1})^\wedge \twoheadrightarrow (B^p(K^{\cdot}))^\wedge \hookrightarrow (K^p)^\wedge$$

und somit

(2) $B^p((K^{\cdot})^\wedge) = (B^p(K^{\cdot}))^\wedge$.

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to B^p(K^{\cdot}) \to Z^p(K^{\cdot}) \to H^p(K^{\cdot}) \to 0$$

folgt die exakte Sequenz

(3) $$0 \to (B^p(K^{\cdot}))^\wedge \to (Z^p(K^{\cdot}))^\wedge \to (H^p(K^{\cdot}))^\wedge \to 0.$$

Aus (1), (2) und (3) folgt die Behauptung.

Für die folgenden Punkte (B.4) - (B.8) fixieren wir einen noetherschen adischen vollständigen Ring A mit Definitionsideal I und ein formales Schema X, das eigentlich über $\operatorname{Spf} A$ ist.

(B.4) Sei $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$ eine endlich erzeugte graduierte A-Algebra, so daß der Ringhomomorphismus $A \to S_0$ endlich ist, und sei $\mathcal{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_n$ ein graduierter $\mathcal{O}_X \otimes_A S$-Modul, der quasikohärent und von endlichem Typ über $\mathcal{O}_X \otimes_A S$ ist. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ ist dann $H^p(X, \mathcal{M})$ ein endlich erzeugter S-Modul.

Beweis: Für den ersten Teil des Beweises kann man die Graduierungen von S und $\mathcal{M}$ vergessen. Auf S betrachten wir die Filtrierung $(I^k S)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und auf $H^p(X, \mathcal{M})$ die Filtrierung $(F^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $F^k := \ker(H^p(X, \mathcal{M}) \to H^p(X, \mathcal{M}/I^k\mathcal{M}))$. Für jedes $x \in I^n$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \to & \mathcal{M}/I^m\mathcal{M} \\ x\cdot \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}/I^{m+n}\mathcal{M} \end{array}$$

Deshalb ist $H^p(X, \mathcal{M})$ ein filtrierter S-Modul. Seien $\operatorname{gr}(S) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} I^k S / I^{k+1} S$ und $\operatorname{gr}(H^p(X, \mathcal{M})) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} F^k / F^{k+1}$ die assoziierten graduierten Objekte. Es gilt

(1) $\operatorname{gr}(H^p(X, \mathcal{M}))$ ist ein endlich erzeugter $\operatorname{gr}(S)$-Modul.

Denn: Sei $\hat{S}$ die Vervollständigung von S in der IS-adischen Topologie. Wir haben dann ein kartesisches Diagramm formaler Schemata

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{r} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spf} \hat{S} & \longrightarrow & \operatorname{Spf} A \end{array}$$

Der Garbenmorphismus $\mathcal{O}_X \to r_*\mathcal{O}_Y$ setzt sich kanonisch fort zu einem Garbenmorphismus $\mathcal{O}_X \otimes_A S \to r_*\mathcal{O}_Y$. Wir haben deshalb die Garbe $\hat{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \otimes_{(\mathcal{O}_X \otimes_A S)} \mathcal{O}_Y$ auf Y. Sie ist ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Auf $H^p(Y, \hat{\mathcal{M}})$ betrachten wir die Filtrierung $(G^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $G^k := \ker(H^p(Y, \hat{\mathcal{M}}) \to H^p(Y, \hat{\mathcal{M}}/I^k\hat{\mathcal{M}}))$. Für den durch r induzierten affinen Morphismus von Schemata $q: (Y, \mathcal{O}_Y/I^k\mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X/I^k\mathcal{O}_X)$ gilt $q_*(\hat{\mathcal{M}}/I^k\hat{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}/I^k\mathcal{M}$ und somit $H^p(X, \mathcal{M}/I^k\mathcal{M}) = H^p(Y, \hat{\mathcal{M}}/I^k\hat{\mathcal{M}})$. Also gilt $F^k = t^{-1}(G^k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $t: H^p(X, \mathcal{M}) \to H^p(Y, \hat{\mathcal{M}})$ die kanonische Abbildung ist. Deshalb ist $\mathrm{gr}(H^p(X, \mathcal{M}))$ ein $\mathrm{gr}(S)$-Untermodul von $\mathrm{gr}(H^p(Y, \hat{\mathcal{M}})) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} G^k/G^{k+1}$. Nach [EGA], III. 3.4.4 ist $H^p(Y, \hat{\mathcal{M}})$ ein endlich erzeugter $\hat{S}$-Modul und $(G^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine I-gute Filtrierung von $H^p(Y, \hat{\mathcal{M}})$. Deshalb ist $\mathrm{gr}(H^p(Y, \hat{\mathcal{M}}))$ ein endlich erzeugter Modul über dem Ring $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} I^k\hat{S}/I^{k+1}\hat{S} = \mathrm{gr}(S)$. Da $\mathrm{gr}(S)$ eine endlich erzeugte S/IS-Algebra ist, ist $\mathrm{gr}(S)$ noethersch und deshalb ist $\mathrm{gr}(H^p(X, \mathcal{M}))$ ein endlich erzeugter $\mathrm{gr}(S)$-Modul. Damit ist (1) gezeigt.

Wir wählen Elemente $a_i \in F^{k(i)}, i = 1, \ldots, l$, so daß die durch a_i gegebenen Elemente $\bar{a}_i \in \mathrm{gr}_{k(i)}(H^p(X, \mathcal{M}))(i = 1, \ldots, l)$ den $\mathrm{gr}(S)$-Modul $\mathrm{gr}(H^p(X, \mathcal{M}))$ erzeugen. Sei N der von $a_1, \ldots, a_l$ erzeugte S-Untermodul von $H^p(X, \mathcal{M})$. Wir versehen N mit der von $H^p(X, \mathcal{M})$ induzierten Filtrierung $(F^k \cap N)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Damit ist N ein filtrierter S-Modul. Es gilt

(2) Die kanonische Abbildung $\mathrm{gr}(N) \to \mathrm{gr}(H^p(X, \mathcal{M}))$ ist surjektiv.

Wir zeigen, daß bei geeigneter Wahl von $a_1, \ldots, a_l$ gilt $N = H^p(X, \mathcal{M})$. Nun kommen die Graduierungen von S und $\mathcal{M}$ ins Spiel. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\mathcal{M}_n$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Nach [B], III. 1.2 Cor. ist $\mathcal{M}_n$ ein $\mathcal{O}_X \otimes_A S_0$-Modul von endlichem Typ. Da S_0 endlich über A ist, folgt, daß $\mathcal{M}_n$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist. Die Graduierung von $\mathcal{M}$ induziert eine Graduierung von $H^p(X, \mathcal{M})$, $H^p(X, \mathcal{M}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^p(X, \mathcal{M}_n)$. Dadurch wird $H^p(X, \mathcal{M})$ zu einem graduierten S-Modul. Wir nehmen an, daß die Elemente $a_1, \ldots, a_l$ von $H^p(X, \mathcal{M})$ homogen sind. Dann ist N ein graduierter S-Untermodul von $H^p(X, \mathcal{M}), N = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} N_n$ mit $N_n = N \cap H^p(X, \mathcal{M}_n)$. Die Filtrierung von $H^p(X, \mathcal{M})$ ist mit der Graduierung von $H^p(X, \mathcal{M})$ verträglich (d.h. jedes F^k ist ein graduierter Untermodul von $H^p(X, \mathcal{M})$). Deshalb ist auch die Filtrierung von N mit der Graduierung von N verträglich. Sei ein $n \in \mathbb{Z}$ fixiert. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $F^k \cap H^p(X, \mathcal{M}_n) = \ker(H^p(X, \mathcal{M}_n) \to H^p(X, \mathcal{M}_n/I^k\mathcal{M}_n))$. Nach [EGA], III. 3.4.4 ist $H^p(X, \mathcal{M}_n)$ ein endlich erzeugter A-Modul und die Filtrierung auf $H^p(X, \mathcal{M}_n)$ I-gut. Deshalb sind die von den Filtrierungen auf $H^p(X, \mathcal{M}_n)$ und N_n induzierten Topologien von $H^p(X, \mathcal{M}_n)$ und N_n vollständig. Nach (2) ist $\mathrm{gr}(N_n) \to \mathrm{gr}(H^p(X, \mathcal{M}_n))$ surjektiv. Mit [B], III. 2.8 Cor. 2 erhalten wir $N_n = H^p(X, \mathcal{M}_n)$.

(B.5) Seien S eine endlich erzeugte A-Algebra und $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X \otimes_A S$-Modul von endlichem Typ. Es gebe A-Untermoduln $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$, so daß gilt:

a) $\mathcal{F}$ wird als $\mathcal{O}_X \otimes_A S$-Modul von $\mathcal{M}$ erzeugt (d.h. der kanonische Garbenmorphismus $\mathcal{M} \otimes_A (\mathcal{O}_X \otimes_A S) \to \mathcal{F}$ ist surjektiv).

b) $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ ist eine I-Torsionsgarbe.

c) $\mathcal{M}_0$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{F}$.

Dann ist $H^p(X, \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter S-Modul für jedes $p \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Sei $\mathcal{G}$ der von $\mathcal{M}_0$ erzeugte $(\mathcal{O}_X \otimes_A S)$-Untermodul von $\mathcal{F}$ (d.h. $\mathcal{G}$ ist das Bild des kanonischen Garbenmorphismus $\mathcal{M}_0 \otimes_A S \to \mathcal{F}$). Die exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{G} \to 0$$

induziert die exakte Sequenz von S-Moduln

$$H^p(X, \mathcal{G}) \to H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}/\mathcal{G}).$$

Es genügt also zu zeigen, daß $H^p(X, \mathcal{G})$ und $H^p(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$ endlich erzeugte S-Moduln sind.

Zunächst zeigen wir, daß $H^p(X, \mathcal{G})$ ein endlich erzeugter S-Modul ist. Sei L ein endlich erzeugter A-Untermodul von S, der das Einselement von S enthält und der S als A-Algebra erzeugt. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{L}_n$ das Bild des Garbenmorphismus $\mathcal{M}_0 \otimes_A L^n \to \mathcal{F}, m \otimes s \mapsto m \cdot s$ (wobei wir hier im Gegensatz zur Definition in (2.1) setzen $L^0 = A$). Auf kanonische Weise sind $R := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} L^n$ eine graduierte A-Algebra und $\mathcal{L} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}_n$ ein graduierter $\mathcal{O}_X \otimes_A R$-Modul. Nach Voraussetzung (c) ist $\mathcal{L}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X \otimes_A R$-Modul von endlichem Typ. Aus (B.4) folgt, daß $H^p(X, \mathcal{L})$ ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Die Inklusionen $\mathcal{L}_n \hookrightarrow \mathcal{G}$ definieren einen Garbenmorphismus

$$s: \mathcal{L} \to \mathcal{G}.$$

Aufgrund der Wahl von L gilt $L^n \subseteq L^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L^n$. Dem entsprechend haben wir $\mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{L}_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{G} = \varinjlim_n \mathcal{L}_n$. Die durch s induzierte Abbildung

$$t: \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} H^p(X, \mathcal{L}_n) = H^p(X, \mathcal{L}) \to H^p(X, \mathcal{G}) = \varinjlim_n H^p(X, \mathcal{L}_n)$$

ist surjektiv. Da s ein Garbenmorphismus über dem kanonischen Ringhomomorphismus $R \to S$ ist, ist t ein Modulhomomorphismus über dem Ringhomomorphismus

$R \to S$. Daraus ergibt sich, daß $H^p(X, \mathcal{G})$ ein endlich erzeugter S-Modul ist.
Nun zeigen wir, daß $H^p(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$ ein endlich erzeugter S-Modul ist. Sei $g: (\mathcal{M}/\mathcal{M}_0) \otimes_A (\mathcal{O}_X \otimes_A S) \to \mathcal{F}/\mathcal{G}$ der $\mathcal{O}_X \otimes_A S$-Modulhomomorphismus, der das folgende Diagramm mit exakten Zeilen kommutativ macht

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_0 \otimes_A (\mathcal{O}_X \otimes_A S) & \to & \mathcal{M} \otimes_A (\mathcal{O}_X \otimes_A S) & \to & (\mathcal{M}/\mathcal{M}_0) \otimes_A (\mathcal{O}_X \otimes_A S) \to 0 \\ \mathrm{id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{M}_0 \otimes_A (\mathcal{O}_X \otimes_A S) & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}/\mathcal{G} \to 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung (b) ist $(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0) \otimes_A (\mathcal{O}_X \otimes_A S)$ eine I-Torionsgarbe und nach Voraussetzung (a) ist g surjektiv. Deshalb ist $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ eine I-Torsionsgarbe. Da $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X \otimes_A S$-Modul von endlichem Typ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I^n \cdot (\mathcal{F}/\mathcal{G}) = 0$. Dann ist $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ ein quasikohärenter Modul von endlichem Typ über der Ringgarbe $(\mathcal{O}_X/I^n\mathcal{O}_X) \otimes_A S$. Das Schema $(X, \mathcal{O}_X/I^n\mathcal{O}_X)$ ist eigentlich über dem Schema $\operatorname{Spec} A$. Deshalb ist $H^p(X, \mathcal{F}/\mathcal{G})$ ein endlich erzeugter S-Modul.

(B.6) Seien S eine A-Algebra, J ein Ideal von A, K ein endlich erzeugter A-Untermodul von S, $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X \otimes_A S$-Modul und $\mathcal{M}_0$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{M}$, so daß K das Bild von J unter der Abbildung $\varphi: A \to S$ enthält und $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ eine J-Torsionsgarbe ist. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $J^m K^n \mathcal{M}_0$ das Bild des Garbenmorphismus $\mathcal{M}_0 \otimes_A J^m K^n \to \mathcal{M}, m \otimes s \mapsto m \cdot s$ (dabei setzen wir $J^0 = A$ und $K^0 = \varphi(A)$). Sei $p \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\operatorname{im}(H^p(X, \mathcal{M}/J^{m+r}K^n\mathcal{M}_0) \to H^p(X, \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0)) \subseteq \\ &\qquad \operatorname{im}(H^p(X, \mathcal{M}) \to H^p(X, \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0)). \end{aligned}$$

Beweis: Für jedes $m, n \in \mathbb{N}_0$ haben wir die exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to J^m K^n \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0 \to 0$$

Wir setzen

$$R_{m,n} := J^m K^n, \qquad R := \bigoplus_{m,n \in \mathbb{N}_0} R_{m,n}$$

$$N_{m,n} := H^{p+1}(X, J^m K^n \mathcal{M}_0), \qquad N := \bigoplus_{m,n \in \mathbb{N}_0} N_{m,n}$$

$$Q_{m,n} := \operatorname{im}(H^p(X, \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0) \to H^p(X, J^m K^n \mathcal{M}_0)), \qquad Q := \bigoplus_{m,n \in \mathbb{N}_0} Q_{m,n}$$

Auf kanonische Weise sind R ein bigraduierter Ring und $\mathcal{F} := \bigoplus_{m,n\in\mathbb{N}_0} J^m K^n \mathcal{M}_0$ ein bigraduierter $\mathcal{O}_X \otimes_A R$-Modul. Dadurch wird $N = H^{p+1}(X, \mathcal{F})$ zu einem bigraduierten R-Modul. $\mathcal{F}$ ist ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X \otimes_A R$-Modul von endlichem Typ. Indem wir die zu R und $\mathcal{F}$ assoziierten einfachgraduierten Objekte betrachten, folgt aus (B.4)

(1) N ist ein endlich erzeugter R-Modul.

Weiterhin gilt

(2) Q ist ein bigraduierter R-Untermodul von N.

Denn: Sei $x \in J^m K^n$ gegeben. Wir haben das kommutative Diagramm

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{x\cdot} & \mathcal{M} \\ \uparrow & & \uparrow \\ J^s K^t M_0 & \rightarrow & J^{m+s} K^{n+t} \mathcal{M}_0 \end{array}$$

Aus der exakten Sequenz $(*)$ folgt $Q_{a,b} = \ker(H^{p+1}(X, J^a K^b \mathcal{M}_0) \to H^{p+1}(X, \mathcal{M}))$. Hieraus und aus dem Diagramm $(**)$ folgt (2).

Aus (1) und (2) folgt

(3) Q ist ein endlich erzeugter bigraduierter R-Modul.

Da $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ eine J-Torsionsgarbe ist und $\varphi(J) \subseteq K$, ist $\mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0$ eine J-Torsionsgarbe. Deshalb folgt aus (B.1 i)

(4) Zu jedem $x \in H^p(X, \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0)$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $J^k x = 0$.

Für jedes $s \in \mathbb{N}_0$ sei $\alpha_s \colon R_{s,0} \to R_{0,0}$ die Inklusion. Für jedes $m, n, s \in \mathbb{N}_0$ sei $\beta_s^{m,n} \colon N_{m+s,n} \to N_{m,n}$ die durch die Inklusion $J^{m+s} K^n \mathcal{M}_0 \to J^m K^n \mathcal{M}_0$ induzierte Kohomologieabbildung.

Aus (3) und (4) folgt

(5) Es gibt ein $t \in \mathbb{N}_0$, so daß $\alpha_s(R_{s,0}) \cdot Q = 0$ für jedes $s \geq t$.

Aus (3) und (B.2) folgt

(6) Es gibt ein $i \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m, n, s \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq i$ gilt: $Q_{m+s,n} = R_{s,0} \cdot Q_{m,n}$.

Für $a \in R_{s,0}$ und $x \in N_{m,n}$ gilt $\beta_s^{m,n}(a \cdot x) = \alpha_s(a) \cdot x$. Deshalb folgt aus (2), (5) und (6)

(7) Es gibt $i, t \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m, n, s \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq i$ und $s \geq t$ gilt: $\beta_s^{m,n}(Q_{m+s,n}) = 0$.

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & J^m K^n \mathcal{M}_0 & \to & \mathcal{M} & \to & \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0 & \to 0 \\
& \uparrow & & \mathrm{id} \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & J^{m+s} K^n \mathcal{M}_0 & \to & \mathcal{M} & \to & \mathcal{M}/J^{m+s} K^n \mathcal{M}_0 & \to 0
\end{array}$$

erhalten wir das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(X, \mathcal{M}) \to & H^p(X, \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0) & \to & N_{m,n} \\
& \uparrow & & \uparrow \gamma \\
& H^p(X, \mathcal{M}/J^{m+s} K^n \mathcal{M}_0) & \to & Q_{m+s,n},
\end{array}$$

wobei γ die Restriktion von $\beta_s^{m,n}$ auf $Q_{m+s,n}$ ist. Damit folgt aus (7): $\mathrm{im}(H^p(X, \mathcal{M}/J^{m+s}K^n\mathcal{M}_0) \to H^p(X, \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0)) \subseteq \mathrm{im}(H^p(X, \mathcal{M}) \to H^p(X, \mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0))$ für alle $m, n, s \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq i$ und $s \geq t$. Also gilt (B.6) für $r := i + t$.

(B.7) Die Situation sei wie in (B.6). Wir betrachten $H^p(X, \mathcal{M})$ als S-Modul und bezeichnen die Skalarmultiplikation mit $\cdot$.

i) Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
J^m K^n \cdot \mathrm{im}(H^p(X, \mathcal{M}_0) \to H^p(X, \mathcal{M})) \subseteq \\
\mathrm{im}(H^p(X, J^m K^n \mathcal{M}_0) \to H^p(X, \mathcal{M})).
\end{aligned}$$

ii) Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(H^p(X, J^r K^n \mathcal{M}_0) \to H^p(X, \mathcal{M})) \subseteq \\
J^m K^n \cdot \mathrm{im}(H^p(X, \mathcal{M}_0) \to H^p(X, \mathcal{M})).
\end{aligned}$$

Beweis: Wir übernehmen die Notationen aus dem Beweis von (B.6), wobei wir jedoch überall p durch $p-1$ ersetzen.

Weiterhin setzen wir $P_{m,n} := \mathrm{im}(H^p(X, J^m K^n \mathcal{M}_0) \to H^p(X, \mathcal{M}))$ und $P := \bigoplus_{m,n \in \mathbb{N}_0} P_{m,n}$. Aus dem Diagramm (**) im Beweis von (B.6) folgt

(1) $R_{m,n} \cdot P_{s,t} \subseteq P_{m+s,n+t}$.

Speziell für $s = t = 0$ ist (1) die Aussage (i). Nach (1) kann man P zu einem bigraduierten R-Modul machen. Aus dem Diagramm (**) im Beweis von (B.6) folgt, daß die kanonische surjektive Abbildung $N \to P$ ein R-Modulhomomorphismus ist. Nach (1) im Beweis von (B.6) ist P ein endlich erzeugter R-Modul. Mit (B.2) erhalten wir

(2) Es gibt ein $a \in \mathbb{N}_0$, so daß

i) $P_{m+s,n} = R_{s,0} \cdot P_{m,n}$ für alle $m, n, s \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq a$.

ii) $P_{m,n+s} = R_{0,s} \cdot P_{m,n}$ für alle $m, n, s \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq a$.

Sei ein $m \in \mathbb{N}_0$ fixiert. Es gilt

(4) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß $P_{r,n} \subseteq R_{m,n} \cdot P_{0,0}$ für $n = 0, \ldots, a$.

Denn: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Da $J^a K^n \mathcal{M}_0$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist, ist $P_{a,n}$ ein endlich erzeugter A-Modul. Nach (B.1 ii) ist $H^p(X, \mathcal{M})/P_{0,0}$ ein J-Torsionsmodul. Deshalb gibt es ein $b \in \mathbb{N}_0$ mit $J^b \cdot P_{a,n} \subseteq P_{0,0}$. Wegen (2 i) und $\varphi(J) \subseteq K$ folgt damit für $r(n) := a + b + m + n$

$$P_{r(n),n} = R_{b+m+n,0} \cdot P_{a,n} = R_{m+n,0} \cdot R_{b,0} \cdot P_{a,n} \subseteq R_{m+n,0} \cdot P_{0,0} \subseteq R_{m,n} \cdot P_{0,0}.$$

Also gilt (4) für $r := \max\{r(0), \ldots, r(a)\}$.

Wir wenden (4) speziell für $n = a$ an und erhalten $P_{r,a} \subseteq R_{m,a} \cdot P_{0,0}$. Damit gilt nach (2 ii) für jedes $n \geq a$

$$P_{r,n} = R_{0,n-a} \cdot P_{r,a} \subseteq R_{0,n-a} \cdot R_{m,a} \cdot P_{0,0} = R_{m,n} \cdot P_{0,0}.$$

Mit (4) erhalten wir $P_{r,n} \subseteq R_{m,n} \cdot P_{0,0}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dies ist gerade die Aussage (ii) in (B.7).

(B.8) Die Situation sei wie in (B.6). Sei $\mathfrak{U}$ eine offene affine Überdeckung von X, so daß $\mathcal{M} \mid U = \mathcal{M}(U) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U)$ und $\mathcal{M}_0 \mid U = \mathcal{M}_0(U) \otimes (\mathcal{O}_X \mid U)$ für jedes $U \in \mathfrak{U}$. Seien $M^\cdot$ und $M_0^\cdot$ die Cech-Komplexe von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_0$ zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$. Der Unterkomplex $J^m K^n M_0^\cdot$ von $M^\cdot$ ist der Cech-Komplex von $J^m K^n \mathcal{M}_0$ zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$. Es gilt: Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$J^{m+r} K^n M_0^p \cap B^p(M^\cdot) \subseteq B^p(J^m K^n M_0^\cdot).$$

Beweis: Da X separiert ist, sind die Garben $\mathcal{M}, \mathcal{M}_0, J^m K^n \mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0$ V-azyklisch für jeden endlichen Durchschnitt V von Elementen von $\mathfrak{U}$. Deshalb läßt sich die Kohomologie dieser Garben als Cech-Kohomologie zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$ berechnen. Der Komplex $M^\cdot/J^m K^n M_0^\cdot$ ist der Cech-Komplex von $\mathcal{M}/J^m K^n \mathcal{M}_0$ zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$.

Für $p \leq 0$ ist die Behauptung klar. Sei $p > 0$. Zunächst zeigen wir

(1) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\operatorname{im}(Z^{p-1}(M^\cdot/J^{m+r}K^nM_0^\cdot) \to Z^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot)) \subseteq$$
$$\operatorname{im}(Z^{p-1}(M^\cdot) \to Z^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot)).$$

Denn: Wir wählen $r \in \mathbb{N}_0$ so, daß (B.6) für $p-1$ gilt. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}(M^\cdot/J^{m+r}K^nM_0^\cdot) \arrow[r, "\varphi"] & H^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot) & H^{p-1}(M^\cdot) \arrow[l, "\nu"'] \\
Z^{p-1}(M^\cdot/J^{m+r}K^nM_0^\cdot) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "\sigma"'] & Z^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot) \arrow[u, "\eta"'] & Z^{p-1}(M^\cdot) \arrow[u, "\mu"'] \arrow[l, "\psi"] \\
 & B^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot) \arrow[u] & B^{p-1}(M^\cdot). \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sei $a \in Z^{p-1}(M^\cdot/J^{m+r}K^nM_0^\cdot)$ gegeben. Zu zeigen ist, daß es ein $x \in Z^{p-1}(M^\cdot)$ gibt mit $\sigma(a) = \psi(x)$. Nach (B.6) gibt es ein $y \in H^{p-1}(M^\cdot)$ mit $\nu(y) = \varphi(\rho(a)) = \eta(\sigma(a))$. Sei z ein Element von $Z^{p-1}(M^\cdot)$ mit $\mu(z) = y$. Dann gilt $\eta(\sigma(a)) = \eta(\psi(z))$, oder $\eta(\sigma(a) - \psi(z)) = 0$. Also liegt $\sigma(a) - \psi(z)$ in $B^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot)$. Wegen $\psi(B^{p-1}(M^\cdot)) = B^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot)$, gibt es ein $w \in Z^{p-1}(M^\cdot)$ mit $\psi(w) = \sigma(a) - \psi(z)$. Für $x := w + z \in Z^{p-1}(M^\cdot)$ gilt $\sigma(a) = \psi(x)$. Damit ist (1) gezeigt.

Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & M^p/J^{m+r}K^nM_0^p & M^p \arrow[l, "\mu"'] \\
M^{p-1}/J^mK^nM_0^{p-1} & M^{p-1}/J^{m+r}K^nM_0^{p-1} \arrow[u, "\nu"] \arrow[l, "\varphi"'] & M^{p-1} \arrow[u, "\lambda"'] \arrow[l, "\rho"'] \\
Z^{p-1}(M^\cdot/J^mK^nM_0^\cdot) \arrow[u] & Z^{p-1}(M^\cdot/J^{m+r}K^nM_0^\cdot) \arrow[u] \arrow[l] & Z^{p-1}(M^\cdot) \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sei ein $a \in J^{m+r}K^nM_0^p \cap B^p(M^\cdot)$ gegeben. Sei x ein Element von M^{p-1} mit $a = \lambda(x)$. Wegen $0 = \mu(a) = \nu(\rho(x))$, liegt $\rho(x)$ in $Z^{p-1}(M^\cdot/J^{m+r}K^nM_0^\cdot)$. Nach (1) gibt es ein $y \in Z^{p-1}(M^\cdot)$ mit $\varphi(\rho(y)) = \varphi(\rho(x))$. Sei $z := x - y$. Dann gilt $\varphi(\rho(z)) = 0$, d.h. $z \in J^mK^nM_0^{p-1}$. Damit folgt $a = \lambda(x) = \lambda(x) - \lambda(y) = \lambda(z) \in B^p(J^mK^nM_0^\cdot)$.

Für die Beweise von (3.12.13), (3.12.14), (3.12.15) und (3.12.17) fixieren wir einen vollständigen affinoiden Ring (A, A^+), einen noetherschen Definitionsring B von A, so daß A endlich erzeugt über B ist, ein Ideal J von A, ein Definitionsideal I von B, einen adischen Raum X, der eigentlich über $\operatorname{Spa}(A, A^+)$ ist, und einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$.

Nach (A.4) und (A.9) können wir ohne Einschränkung annehmen, daß es einen adischen Raum $f: Y \to \mathrm{Spa}(A,B)$ über $\mathrm{Spa}(A,B)$ gibt, so daß f eigentlich ist und $X_{A^\circ} = Y_{A^\circ}$. Wir setzen $\mathcal{G} := q_* p^* \mathcal{F}$, wobei $p: X_{A^\circ} \to X$ und $q: Y_{A^\circ} \to Y$ die Projektionen sind. $\mathcal{G}$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul (nach (A.10 i)).

Sei W das affine Objekt der Kategorie $\mathcal{K}$ zu dem Paar von Ringen (A,B). Es gilt $\mathrm{Spa}(A,B) = t(W)$. Nach (3.12.6) können wir annehmen $Y = t(Z)$ und $f = t(g)$, wobei $g: Z \to W$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ ist, so daß $\mathcal{A}_Z$ als $\mathcal{A}_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z$-Modul von endlichem Typ ist und der zugehörige Morphismus formaler Schemata $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (W, \mathcal{O}_W)$ eigentlich ist. Sei $\varphi: t(Z) \to Z$ der kanonische Morphismus in $\bar{\mathcal{K}}$. Wir setzen $\mathcal{M} := \varphi_* \mathcal{G}$. Es ist $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter $\mathcal{A}_Z$-Modul von endlichem Typ (nach (3.6.20)). Nach (3.9.4) gibt es einen offenen kohärenten $\mathcal{O}_Z$-Untermodul $\mathcal{M}_0$ von $\mathcal{M}$. Die Garbe $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ ist eine I-Torsionsgarbe. Da $\mathcal{A}_Z$ ein $\mathcal{A}_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z$-Modul von endlichem Typ ist, ist $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter $\mathcal{A}_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z$-Modul von endlichem Typ.

(C.1) Wir zeigen

a) $H^p(Y, \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n \mathcal{G})$ ist ein endlich erzeugter Modul über dem Ring $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n$.

b) Für jede rationale Teilmenge U von $\mathrm{Spa}(A,B)$ gilt $H^p(f^{-1}(U), \mathcal{G}) = H^p(Y, \mathcal{G}) \otimes_A D$, wobei D der Ring der adischen Funktionen auf U ist.
Mit (A.10) folgt hieraus (3.12.14).

(C.2) Beweis von (a): Es ist $\varphi_*(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n \mathcal{G}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n \mathcal{M} =: \mathcal{N}$. Nach (3.6.2) gilt $R^i\varphi_*(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n \mathcal{G}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R^i\varphi_* J^n \mathcal{G} = 0$ für jedes $i > 0$ und deshalb $H^p(Y, \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n \mathcal{G}) = H^p(Z, \mathcal{N})$. Der Ring $S := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} J^n$ ist eine endlich erzeugte B-Algebra. $\mathcal{N}$ ist ein quasikohärenter $\mathcal{O}_Z \otimes_B S$-Modul. Wir betrachten $\mathcal{M} = J^0 \mathcal{M}$ als Untergarbe von $\mathcal{N}$. Der kanonische Garbenmorphismus $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Z \otimes_B A} (\mathcal{O}_Z \otimes_B S) \to \mathcal{N}$ ist surjektiv. Da $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_Z \otimes_B A$-Modul von endlichem Typ ist, ist $\mathcal{N}$ ein $\mathcal{O}_Z \otimes_B S$-Modul von endlichem Typ. Nach (B.5) ist $H^p(Z, \mathcal{N})$ ein endlich erzeugter S-Modul.

(C.3) Beweis von (b): Sei U eine rationale Teilmenge von $\mathrm{Spa}(A,B)$. Wir schreiben $U = R(\frac{T}{s})$, wobei s ein Element von A und T eine endliche Teilmenge von A ist, so daß $T \cdot A$ offen ist. Sei $L := T \cdot B + s \cdot B$. Nach (2.3.10) ist $I^n \subseteq L$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir ersetzen I durch I^n und haben dann $I \subseteq L$. Sei $\mathcal{M}_s$ die Prägarbe auf Z mit $\mathcal{M}_s(V) := \mathcal{M}(V)_s$ für jede offene Teilmenge V von Z. Sei $\mathfrak{W}$ eine endliche offene affine Überdeckung von

Z. Die Kohomologie der Garben $\mathcal{M}$ und $I^m L^n \mathcal{M}_0$ läßt sich als Cech-Kohomologie zu der Überdeckung $\mathfrak{W}$ berechnen (man beachte (3.9.5)). Seien $K^\cdot, M^\cdot, M_0^\cdot$ die Cech-Komplexe von $\mathcal{M}_s, \mathcal{M}, \mathcal{M}_0$ zu der Überdeckung $\mathfrak{W}$. Der Unterkomplex $I^m L^n M_0^\cdot$ von $M^\cdot$ ist der Cech-Komplex von $I^m L^n \mathcal{M}_0$ zu der Überdeckung $\mathfrak{W}$. Es gilt $K^\cdot = (M^\cdot)_s$ und deshalb

(1) $H^p(K^\cdot) \cong H^p(M^\cdot)_s$.

Ist V ein endlicher Durchschnitt von Elementen von $\mathfrak{W}$, so ist V eine affine Teilmenge von Z und $\mathcal{M}_s(V)$ ein endlich erzeugter Modul über dem f-adischen Ring $\mathcal{A}_Z(V)_s = \mathcal{A}_Z(V)(\frac{T}{s})$. Wir versehen $\mathcal{M}_s(V)$ mit der f-adischen Topologie bezüglich $\mathcal{A}_Z(V)(\frac{T}{s})$ und die Komponenten K^p des Komplexes $K^\cdot$ jeweils mit der Produkttopologie. Die Differentiale von $K^\cdot$ sind dann stetig. Nach (2.3.33 iv) ist die Vervollständigung $(K^\cdot)^\wedge$ des Komplexes $K^\cdot$ der Cech-Komplex von $\mathcal{G}$ zu der affinoiden Überdeckung $\{\varphi^{-1}(V) \cap f^{-1}(U) \mid V \in \mathfrak{W}\}$ von $f^{-1}(U)$. Deshalb gilt nach (3.6.2): $H^p(Y, \mathcal{G}) = H^p(M^\cdot)$ und $H^p(f^{-1}(U), \mathcal{G}) = H^p((K^\cdot)^\wedge)$. Also haben wir zu zeigen

$$(*) \qquad H^p((K^\cdot)^\wedge) = H^p(M^\cdot) \otimes_A A\langle\frac{T}{s}\rangle.$$

Es gilt

(2) Die Differentiale von $K^\cdot$ sind strikt.

Denn: In der Lokalisation A_s haben wir den Unterring $B[\frac{t}{s} \mid t \in T]$. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und jedes $p \in \mathbb{Z}$ setzen wir $S_m^p := \operatorname{im}(I^m \cdot B[\frac{t}{s} \mid t \in T] \otimes_B M_0^p \to K^p)$. Dann ist $\{S_m^p \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von K^p. Sei ein $p \in \mathbb{Z}$ fixiert. Sei $d: K^{p-1} \to K^p$ das Differential. Nach (B.8) gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß

(3) $I^{m+r} L^n M_0^p \cap B^p(M^\cdot) \subseteq B^p(I^m L^n M_0^\cdot)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Wir werden hieraus folgern

(4) $S_{m+r}^p \cap B^p(K^\cdot) \subseteq d(S_m^{p-1})$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Damit ist dann (2) gezeigt.

Zum Beweis von (4). In A_s haben wir die Mengen $s^{-i}L^i, i \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $s^{-i}L^i \subseteq s^{-(i+1)}L^{i+1}$ und $B[\frac{t}{s} \mid t \in T] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} s^{-i}L^i$. Dem entsprechend haben wir die Teilmengen $s^{-i}I^{m+r}L^i M_0^p$ von $K^p = (M^p)_s$ mit $s^{-i}I^{m+r}L^i M_0^p \subseteq s^{-(i+1)}I^{m+r}L^{i+1}M_0^p$ und $S_{m+r}^p = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} s^{-i}I^{m+r}L^i M_0^p$. Es gilt $B^p(K^\cdot) = B^p(M^\cdot)_s$. Sei ein $x \in S_{m+r}^p \cap B^p(K^\cdot)$ gegeben. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}_0, a \in I^{m+r}L^i M_0^p$ und $b \in B^p(M^\cdot)$ mit

$$x = s^{-i}a = s^{-i}b.$$

In M^p gilt $s^l a = s^l b$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ und somit

$$x = s^{-n}c$$

mit $n := i + l$ und $c := s^l a = s^l b \in I^{m+r}L^n M_0^p \cap B^p(M^\cdot)$. Aus (3) folgt $c \in B^p(I^m L^n M_0^\cdot)$. Da $s^{-n}I^m L^n M_0^{p-1} \subseteq S_m^{p-1}$, erhalten wir

$$x = s^{-n}c \in s^{-n}B^p(I^m L^n M_0^\cdot) = d(s^{-n}I^m L^n M_0^{p-1}) \subseteq d(S_m^{p-1}).$$

Damit ist (4) gezeigt.

Nach (C.2) ist $H^p(M^\cdot)_s (= H^p(Y, \mathcal{G})_s)$ ein endlich erzeugter Modul über $A_s = A(\frac{T}{s})$. Wir versehen $H^p(M^\cdot)_s$ mit der f-adischen Topologie bezüglich $A(\frac{T}{s})$. Auf $Z^p(K^\cdot)$ betrachten wir die Teilraumtopologie von K^p und auf $H^p(K^\cdot)$ die Quotiententopologie von $Z^p(K^\cdot) \to H^p(K^\cdot)$. Dann gilt

(5) Der Isomorphismus $g: H^p(K^\cdot) \to H^p(M^\cdot)_s$ aus (1) ist ein Homöomorphismus.

Denn: Sei $P := \operatorname{im}(H^p(M_0^\cdot) \to H^p(M^\cdot))$. Nach (B.1 ii) ist $H^p(M^\cdot)/P$ ein I-Torsionsmodul, d.h. P ist offen in der f-adischen A-Modultopologie von $H^p(M^\cdot)$. Weiterhin ist P ein endlich erzeugter B-Modul. Deshalb ist $\{P_m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ mit $P_m := \operatorname{im}(I^m \cdot B[\frac{t}{s} \mid t \in T] \otimes_B P \to H^p(M^\cdot)_s)$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von $H^p(M^\cdot)_s$. Es gilt

(6) $P_m = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} s^{-i}I^m L^i P$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$.

(7) $S_m^p \cap Z^p(K^\cdot) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} s^{-i}Z^p(I^m L^i M_0^\cdot)$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$.

Begründung von (7): Wir haben $S_m^p = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} s^{-i}I^m L^i M_0^p$. Deshalb gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} s^{-i}Z^p(I^m L^i M_0^\cdot) \subseteq S_m^p \cap Z^p(K^\cdot)$. Sei ein $x \in s^{-i}I^m L^i M_0^p \cap Z^p(K^\cdot)$ gegeben. Schreibe $x = s^{-i}a$ mit $a \in I^m L^i M_0^p$. Es ist $s^{-i}d(a) = 0$, wobei $d: M^p \to M^{p+1}$ das Differential ist. Es gibt ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit $d(s^l a) = 0$. Dann gilt $x = s^{-n}b$ mit $n := i + l$ und $b := s^l a \in I^m L^n M_0^p \cap Z^p(M^\cdot) = Z^p(I^m L^n M_0^p)$.

Sei T_m das Bild von $S_m^p \cap Z^p(K^\cdot)$ in $H^p(K^\cdot)$. Dann ist $\{T_m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von $H^p(K^\cdot)$. Aus (7) folgt

(8) $g(T_m) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} s^{-i} \cdot \operatorname{im}(H^p(I^m L^i M_0^\cdot) \to H^p(M^\cdot))$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$.

Wir vergleichen nun (6) und (8). Nach (B.7 i) gilt $P_m \subseteq g(T_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und nach (B.7 ii) gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $g(T_r) \subseteq P_m$. Also gilt (5).

Aus (B.3), (2), (5) und (2.3.33 iv) folgt $H^p((K^\cdot)^\wedge) = (H^p(K^\cdot))^\wedge = (H^p(M^\cdot)_s)^\wedge = H^p(M^\cdot) \otimes_A A\langle\frac{T}{s}\rangle$. Damit ist (*) gezeigt.

(C.4) Beweis von (3.12.15): Gemäß (3.8.11) und (3.9.3) sind $\Gamma(Y, \mathcal{G})$ und $\Gamma(Z, \mathcal{M})$ topologische A-Moduln. Unter der Identifikation $\Gamma(Y, \mathcal{G}) = \Gamma(Z, \mathcal{M})$ stimmen diese Topologien überein. Da $\mathcal{M}_0$ ein offener kohärenter $\mathcal{O}_Z$-Untermodul von $\mathcal{M}$ ist, ist $\{\Gamma(Z, I^m\mathcal{M}_0) \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von $\Gamma(Z, \mathcal{M})$. Trivialerweise gilt $I^m \cdot \Gamma(Z, \mathcal{M}_0) \subseteq \Gamma(Z, I^m\mathcal{M}_0)$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$. Nach (B.7 ii) gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $\Gamma(Z, I^r\mathcal{M}_0) \subseteq I^m \cdot \Gamma(Z, \mathcal{M}_0)$. Da $\Gamma(Z, \mathcal{M}_0)$ ein endlich erzeugter B-Modul ist, folgt, daß die Topologie auf $\Gamma(Z, \mathcal{M})$ die f-adische A-Modultopologie ist. Mit (A.10) erhalten wir (3.12.15).

(C.5) Beweis von (3.12.17): Wir setzen nun speziell $J = I \cdot A$. Nach (C.1) ist $H^p(Y, \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} J^n\mathcal{G})$ ein endlich erzeugter Modul über dem Ring $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} J^n$. Analog zu (B.6) und (B.7) folgt hieraus

(1) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(H^{p-1}(Y, \mathcal{G}/J^{m+r}\mathcal{G}) \to H^{p-1}(Y, \mathcal{G}/J^m\mathcal{G})) &\subseteq \\ \operatorname{im}(H^{p-1}(Y, \mathcal{G}) \to H^{p-1}(Y, \mathcal{G}/J^m\mathcal{G})).&\end{aligned}$$

(2) a) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$J^m \cdot H^p(Y, \mathcal{G}) \subseteq \operatorname{im}(H^p(Y, J^m\mathcal{G}) \to H^p(Y, \mathcal{G})).$$

b) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\operatorname{im}(H^p(Y, J^{m+r}\mathcal{G}) \to H^p(Y, \mathcal{G})) \subseteq J^m \cdot H^p(Y, \mathcal{G}).$$

Sei $\mathfrak{U}$ eine endliche Überdeckung von Y durch Mengen der Form $\varphi^{-1}(V)$, wobei V eine offene affine Teilmengen von Z ist. Sei $G^\cdot$ der Cech-Komplex von $\mathcal{G}$ zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$. Entsprechend wie in (B.8) folgt aus (1)

(3) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$J^{m+r}G^p \cap B^p(G^\cdot) \subseteq B^p(J^mG^\cdot).$$

Aussage (2) läßt sich umschreiben in

(4) a) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$J^m \cdot H^p(G^\cdot) \subseteq \operatorname{im}(H^p(J^m G^\cdot) \to H^p(G^\cdot)).$$

b) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\operatorname{im}(H^p(J^{m+r} G^\cdot) \to H^p(G^\cdot)) \subseteq J^m \cdot H^p(G^\cdot).$$

Sei $g\colon \operatorname{Spa}(D, D^+) \to \operatorname{Spa}(A, B)$ ein adischer Morphismus adischer Räume. (Wir nehmen an, daß D vollständig ist.) Sei $\mathcal{G} \otimes D$ die Prägarbe auf Y mit $(\mathcal{G} \otimes D)(U) = \mathcal{G}(U) \otimes_A D$ für jede offene Teilmenge U von Y. Sei $K^\cdot$ der Cech-Komplex von $\mathcal{G} \otimes D$ zu der Überdeckung $\mathfrak{U}$. Ist U ein endlicher Durchschnitt von Elementen von $\mathfrak{U}$, so ist U affinoid und $(\mathcal{G} \otimes D)(U)$ ein endlich erzeugter Modul über dem f-adischen Ring $\mathcal{O}_Y(U) \otimes_A D = \mathcal{O}_Y(U) \overset{t}{\otimes}_A D$. Wir versehen $(\mathcal{G} \otimes D)(U)$ mit der f-adischen Topologie bezüglich $\mathcal{O}_Y(U) \overset{t}{\otimes}_A D$ und jede Komponente K^p von $K^\cdot$ mit der Produkttopologie. Die Differentiale von $K^\cdot$ sind dann stetig. Sei

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{r} & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \operatorname{Spa}(D, D^+) & \xrightarrow[g]{} & \operatorname{Spa}(A, B) \end{array}$$

das Faserprodukt zu f und g. Nach (2.3.33 iv) ist $(K^\cdot)^\wedge$ der Cech-Komplex von $r^*\mathcal{G}$ zu der affinoiden Überdeckung $\{r^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ von S. Deshalb gilt

(5) $H^p((K^\cdot)^\wedge) = H^p(S, r^*\mathcal{G})$.

Wir nehmen nun an, daß die Topologie von D adisch ist. Sei V eine offene affine Teilmenge von Z. Der Ring $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(V)) = \mathcal{A}_Z(V)$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Z(V) \otimes_B A$-Modul. Deshalb hat $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(V)) \overset{t}{\otimes}_A D$ einen Definitionsring, über dem $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(V)) \overset{t}{\otimes}_A D$ ein endlich erzeugter Modul ist. Daraus folgt, daß die Topologie auf $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(V)) \overset{t}{\otimes}_A D$, und damit auch die Topologie auf $(\mathcal{G} \otimes D)(\varphi^{-1}(V))$, die J-adische Topologie ist. Wir erhalten

(6) Die Topologie auf K^p ist die J-adische für jedes $p \in \mathbb{Z}$.

Wir nehmen nun weiterhin an, daß D flach über A ist. Wegen $K^\cdot = G^\cdot \otimes_A D$ folgt dann aus (3) und (4)

(7) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$J^{m+r} K^p \cap B^p(K^\cdot) \subseteq B^p(J^m K^\cdot).$$

(8) a) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$J^m \cdot H^p(K^\cdot) \subseteq \mathrm{im}\,(H^p(J^m K^\cdot) \to H^p(K^\cdot)).$$

b) Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathrm{im}\,(H^p(J^{m+r}K^\cdot) \to H^p(K^\cdot)) \subseteq J^m \cdot H^p(K^\cdot).$$

Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ versehen wir $H^p(K^\cdot)$ mit der J-adischen Topologie und $Z^p(K^\cdot)$ mit der Teilraumtopologie von K^p. Aus (6) und (7) folgt, daß die Differentiale von $K^\cdot$ strikt sind, und aus (6) und (8) folgt, daß die Abbildung $Z^p(K^\cdot) \to H^p(K^\cdot)$ eine Quotientenabbildung ist. Mit (B.3) und (5) erhalten wir

(9) $(H^p(K^\cdot))^\wedge = H^p(S, r^*\mathcal{G})$.

Da D flach über A ist, gilt $H^p(K^\cdot) = H^p(G^\cdot) \otimes_A D) = H^p(G^\cdot) \otimes_A D = H^p(Y, \mathcal{G}) \otimes_A D$. Da D vollständig und $H^p(Y, \mathcal{G})$ ein endlich erzeugter D-Modul ist, folgt $(H^p(K^\cdot))^\wedge = H^p(Y, \mathcal{G}) \otimes_A D$ (nach (2.3.33 iii)). Mit (9) erhalten wir das Ergebnis

$$H^p(Y, \mathcal{G}) \otimes_A D = H^p(S, r^*\mathcal{G}).$$

Zusammen mit (3.12.13) und (A.10) folgt hieraus (3.12.17). (Man beachte, daß man für den Raum S in (3.12.17) nach Übergang zu geeigneten offenen affinoiden Teilmengen, die S überdecken, annehmen kann, daß $\mathcal{O}_S(S)$ noethersch ist.)

LITERATUR

[B] **N. Bourbaki**, "Commutative Algebra". Hermann, Paris 1972.

[B_1] **N. Bourbaki**, "Topological vector spaces", Springer 1987.

[Be] **V. Berkovich**, Non-archimedean analytic spaces and buildings of semi-simple groups. Preprint, The Weizmann Institute of Science, Rehovot (1989).

[BGR] **S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert**, "Non-archimedean analysis". Grundlehren 261, Springer 1984.

[D] **L. van den Dries**, Some applications of a model-theoretic fact to (semi-)algebraic geometry. Indagat. Math. 44, 397 - 401 (1982).

[DK] **H. Delfs, M. Knebusch**, Semialgebraic topology over a real closed field II. Math. Z. 178, 175 - 213 (1981).

[EGA*] **A. Grothendieck, J. Dieudonné**, "Eléments de Géométrie Algébrique I". Grundlehren 166, Springer 1971.

[EGA] **A. Grothendieck, J. Dieudonné**, Eléments de Géométrie Algebrique. Publ. Math. IHES 8 (1961), 11 (1961) und 28 (1966).

[FP] **J. Fresnel, M. van der Put**, "Géométrie analytique rigide et applications". Birkhäuser 1981.

[G] **L. Gerritzen**, Endomorphismen nichtarchimedischer holomorpher Tori. Inventiones math. 11, 27 - 36 (1970).

[Gr] **A. Grothendieck**, Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. 9, 119 - 221 (1957).

[H] **M. Hochster**, Prime ideal structure in commutative rings. Amer. Math. Soc. Transactions 142, 43 - 60 (1969).

[Hu] **R. Huber**, Semirigide Funktionen. Preprint, Universität Regensburg (1990).

[K] **R. Kiehl**, Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Inventiones math. 2, 191 - 214 (1967).

[L] **Q. Liu**, Sur les espaces de Stein quasi-compacts en géométrie rigide. Preprint, Université de Bordeaux I.

[Lü] **W. Lütkebohmert**, Properness in rigid geometry. Vortrag in Oberwolfach auf der Tagung "Formel and rigid geometry and applications to moduli spaces" (1989).

[M] **H. Matsumura**, "Commutative algebra". Second edition, Benjamin publishing company 1980.

[Me] **F. Mehlmann**, Ein Beweis für einen Satz von Raynaud über flache Homomorphismen affinoider Algebren. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 2. Serie Heft 19 (1981).

[Mu] **D. Mumford**, An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings. Compositio Math. 24, 239 - 272 (1972).

[P] **M. van der Put**, Cohomology on affinoid spaces. Compositio Math. 45, 165 - 198 (1982).

[Pu] **M. Puente**, Riemann surfaces of a ring and compactifications of semi-algebraic sets. Thesis, Stanford University (1988).

[Pr] **A. Prestel**, "Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie". Vieweg 1986.

[R] **M. Raynaud**, Géométrie analytique rigide d'apres Tate, Kiehl, ... Bull. Soc. math. France, Mémoire 39/40, 319 - 327 (1974).

[RG] **M. Raynaud, L. Gruson**, Critères de platitude et de projectivité. Inventiones math. 13, 1 - 89 (1971).

[S] **N. Schwartz**, Compactification of varieties. Erscheint im Arkiv för matematik.

[S$_1$] **N. Schwartz**, The basic theory of real closed spaces. Amer. Math. Soc. Memoirs 397 (1989).

[T] **J. Tate**, Rigid analytic spaces. Inventiones math. 12, 257 - 289 (1971).

[ZS] **O. Zariski, P. Samuel**, "Commutative Algebra". Van Nostrand, Princeton 1960.

Symbolverzeichnis

Stichwortverzeichnis

REGENSBURGER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

der Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg, PF 397, 8400 Regensburg.
Preis: 15,– DM pro Exemplar (ohne Gewähr).

1. G. Wassermann. Classification of singularities with compact abelian symmetrie (1977)
2. P. Slodowy. Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen (1978), vergriffen, jetzt: Simple Singularities and Simple Algebraic Groups, Springer Lecture Notes 815 (1980)
3. J. Rung. Mengentheoretische Durchschnitte und Zusammenhang (1978), vergriffen
4. R. Waldi. Äquivariante Deformation monomialer Kurven (1980)
5. J. Koch. Über die Torsion des Differentialmoduls von Kurvensingularitäten (1983)
6. G. Meixner. Ein algebraischer Modulraum für die kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g (1983)
7. Ch. Meier. Über Familien von C^∞-Funktionen mit vorgegebenen Singularitäten auf D^2 (1983)
8. K. Jänich. Linienfelder mit Verzweigungsdefekten (1984)
9. S. Hellebrand. Deformation dicker Punkte und Netze von Quadriken (1986)
10. G. Bauer, R. Mennicken. Störungstheorie für diskrete Spektraloperatoren (1986)
11. E. Kunz. Über die Klassifikation numerischer Halbgruppen (1987)
12. M. Rost. Abbildungsdefekte in 4-Mannigfaltigkeiten (1987)
13. W. Krimmer, R. Mennicken. Entwicklungen analytischer Funktionen nach Eigenlösungen im Parameter nichtlinearer Differentialgleichungen (1987)
14. S. Kosarew. Grothendiecks existence theorem in analytic geometry and related results (1987)
15. N. Schwartz. The basic theory of real closed spaces (1987) (Doppelband DM 20,–)
16. H. Wagner. Charakterisierung von kubischen Galoiserweiterungen (1987)
17. M. Möller, C. Uschold. Über Randeigenwertprobleme für Differentialgleichungen mit der charakteristischen Gleichung $\lambda^p(\gamma^l - 1) = 0$ (1988)
18. J. Karl. Nichtnormale Umlaufseigenwertprobleme bei Differentialgleichungen im Komplexen (1988)
19. M. Seppälä. Topics on Teichmüller Spaces (1988)
20. R. Bieber. Der Satz von Emmy Noether über invariante Variationsprobleme (1988)
21. M. Kreuzer. Vektorbündel und der Satz von Cayley-Bacharach (1989)
22. A. Thalmaier. Asymptotik Brownscher Bewegungen (1989)
23. R. Huber. Bewertungsspektrum und rigide Geometrie (1993)